VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

TWAALFDE DEEL.

AMSTERDAM
C. G. VAN DER POST.
1878.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE.**

TWEEDE REEKS.

TWAALFDE DEEL.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

TWAALFDE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Twaalfde Deel. — Eerste Stuk.

AMSTERDAM.
C. G. VAN DER POST.
1878.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

XII. Adriaan Anthonisz.

1. Het is bekend, dat onderscheidene der naderingsbreuken van $1 : \pi$, als men deze in eene gedurige breuk ontwikkelt, ook op andere wijzen als benaderingen werden gevonden. Voor die kettingbreuk vindt men den betrekkingswijzer [3, 7, 15, 1, 292, 1, enz.] en daaruit voor de opeenvolgende naderingsbreuken.

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{106}{333}, \frac{113}{355}, \frac{33102}{103993}, \text{enz.}$$

De eerste is slechts eene zeer grove benadering. De tweede is de verhouding van Archimedes, en heeft tot waarde 3, 1428, is dus bij twee decimalen zuiver. De vierde heeft tot waarde 3,1415929 en heeft derhalve zes juiste decimalen: zij draagt den naam van „verhouding van Metius". Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat zij niet op de bovenstaande wijze werd afgeleid; maar hoe zij werd afgeleid was eene onbekende zaak; evenzeer wist men niet, wie haar had gevonden. Daaromtrent zijn de vreemdste gissingen te voorschijn gebracht, en is men tot velerhande gevolgtrekkingen gekomen. Laat ons zien, wat daarvan de oorzaak is: dit onderzoek zal ons tevens menige merkwaardige bijzonderheid leeren kennen. Wij willen

echter dadelijk uitgaan van de einduitkomst van dit onderzoek; dat deze benaderings-verhouding namelijk is gevonden door ADRIAAN ANTHONISZ., den vader van den beroemden ADRIANUS METIUS, Hoogleeraar te Franeker.

2. Deze ADRIAAN ANTHONISZ. werd te Metz geboren, omstreeks het jaar 1527. Hij kwam hier te lande in krijgsdienst, en wel bij het wapen der genie, waarbij hij in den tachtigjarigen oorlog groote diensten aan den lande bewees, zoo bij veldslagen tegen de Spanjaarden, als bij het belegeren en verdedigen van onderscheidene vestingen. Hij verkreeg toen den titel van „Stercktebouwmeester der Vereenighde Nederlanden." In den jare 1573 werd hij tot „Burgermeester der stadt Alcmaer" benoemd; en overleed aldaar in den jare 1607. Hij was gehuwd met SUIDA Dirksdochter, uit het geslacht der VAN BREDERODES.

Onder zijne kinderen zijn er twee zoons zeer bekend geworden in de geschiedenis der wetenschappen. De eene heette ADRIAAN ADRIAANSZ, de andere JACOB ADRIAANSZ. Toen deze beide zoons te Leiden studeerden, verkregen zij den bijnaam van „Metius", omdat hun vader van Metz afkomstig was. Dezen bijnaam namen beide aan, zoodat zij bekend zijn geworden als ADRIAAN METIUS en JACOB METIUS.

De eerste werd den 9den December 1571 te Alkmaar geboren. Hij studeerde en promoveerde in de medicijnen; doch maakte steeds veel werk van zijne studiën in wiskunde. Dientengevolge ook werd hij in het jaar 1600 beroepen aan de Friesche Akademie te Franeker als Hoogleeraar in de wiskunde. Bij een tweeden druk van zijn „Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae", te Franeker in 1646 uitgegeven door „B. FULLENIUS, Matheseos Professor Ordinarius" noemt deze hem in het „TOTDEN LESER" „zijnen Antecessor ende Praeceptor in dese Faculteyt."

De hier genoemde opvolger B. FULLENIUS was een zwager van den zeer bekenden, om niet te zeggen befaamden, BALTHASAR BEKKER, leeraar der Doopsgezinden: hij speelde een rol in eene twist omtrent het vinden van Oost en West (het bepalen der lengte op zee, zoo als dit vraagstuk thans heet) van den wiskundige WILLEM LIEUWES GRAAF: waarop wij later misschien wel eens zullen terugkomen.

ADRIAAN METIUS bekleedde die betrekking tot aan zijnen dood, den 6den September 1635; en schreef in dien tijd een groot getal werken, waarvan wij er enkele zullen moeten aanhalen bij het onderzoek, dat ons straks zal bezig houden.

Zijn broeder JACOB METIUS hield zich in 1606 te Alkmaar bezig met het slijpen van glazen voor verrekijkers, en heeft alzoo zekeren rol gespeeld bij hare uitvinding. Hij overleed tusschen 1624 en 1630 te Alkmaar.

3. Het eerste werk van ADRIAAN METIUS, waarmede wij te maken hebben, is zijn "Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae," dat reeds hierboven werd aangehaald. Dit werk kwam in 1633 te Franeker uit, en zijn opvolger B. FULLENIUS bezorgde daarvan eene tweede uitgave in 1646 mede te Franeker 1). Daarin verhaalt METIUS, op bladz. 151,

"By mijn salighe Vader gevonden || middelraminge, seggende als de *Dia-* || *meter* is 113, soo geeft den omring des || *Circuls* 355 gedeelten, is geen verschil || van een $\frac{1}{100000}$ gedeelte, daerom dese || *proportie*, sonder eenige merckelijcke || faute in een *Circul*, zijnde soo groot || als de *Circumferentie* van 't aertrijck ge- || bruyckt can werden."

Van de eerste uitgave van bovengenoemd werk, verscheen ook reeds te Amsterdam een herdruk in 1634 2): daarin leest men op bladz. 102.

„Nu kanmen || wel tusschen beyden naerderen/ gelyck by myn sali- || ghe Vader een middelraminge gevonden is: seggen- || de als de diameter is 113/ soo geeft den omring des || circuls 355 gedeelten/ 't welk geen verschil geeft van een $\frac{1}{100000}$ gedeelte/ ende daerom dese proportie, || sonder eenige merckelijcke faute in een circul, zijnde || soo groot als de circumferentie vant t'aert- rijck/ ge- || bruyckt can werden."

Op beide plaatsen evenwel wordt niets gezegd omtrent de manier, waarop deze benadering zoude zijn afgeleid: hier wordt dus alleen aangetoond, dat zij door den vader van ADRIAAN METIUS is gevonden.

Gaan wij echter terug tot een vroeger werk van ADRIAAN METIUS, zijne "Arithmetica et Geometria nova" van 1625 3),

dat derhalve acht jaren ouder is, dan leest men aldaar in de „Geometriae Practicae Parte II, Cap IV, de Mensura Circuli", waar men derhalve het eerst gaat zoeken, slechts de volgende woorden (bladz. 178 en 179).

„Quocirca praestat assumere eam peripheriae ad diametrum propor- || tionem, quam ante annos aliquot repperit parens meus Confoederatorum Bel- || gii Provinciarum Geometra insignis, qui Archimedeis demonstrationibus in- || venit proportionem peripheriae cujusvis circuli ad suam diametrum esse $3\frac{113}{61}$ *) || id est $\frac{355}{113}$: quae quidem proportio minoribus constat terminis, quam ea quam, || posuit Mr. Ludolph, à qua tamen distat minori differentia quam $\frac{1}{1000000}$."

Dit leert ons dus niets nieuws: gaan wij evenwel terug tot de „Pars Prior" van dezelfde „Geometria Practica" in Cap. VII bladz. 58, zoo vinden wij daar.

„In ma- || joribus [circulis] licebit ad triplicem diametri longitudinem, 14159 partes, qualium Dia- || meter continet 100000, per 3 praec. cap 4 acquisitas, superaddere, vel 16 qua- || lium diameter 113 habet. || Qui accuratiorem Circuli dimensionem desiderat, proportionem diametri || ad peripheriam assumat, quam posuit Ludol à Coln (sic) ut sequitur ||

Diameter,		Periph. major quam vera
100000000000000000000	—	314159265358979323846
Diameter,		**Periph. minor quam vera**
100000000000000000000	—	314159265358979323845."

Eindelijk iets verder in Cap. X (die hier verkeerdelijk „Cap. VIII" wordt geheeten) met den titel „De Circulo" bladz. 88, 89) zegt METIUS.

„Parens. P. M. Illustrium DD. Ordinum || Confoederatarum Belgiae Provinciarum Geometra, in libello quem conscrip- || sit adversus Quadraturā circuli, Simonis à Quercu || demonstravit proportionem peripheriae ad suam || diametrum esse minorem

*) Moet zijn $\frac{16}{113}$.

$3\frac{17}{120}$, hoc est $\frac{977}{720}$ *), ma- ‖ jorem $4\frac{15}{106}$ †), hoc est, $\frac{333}{106}$, quarum proportionum ‖ intermedia existit $3\frac{16}{113}$, sive $\frac{355}{113}$. Quae quidem in- ‖ termedia proportio paulo major est quàm ea, ‖ quam invenit M. Ludolph à Collen, cujus tamen ‖ differentia est minor $\frac{1}{100000}$ §)."

Van dit laatste werk bezit ik nog eene latere uitgave van 1640 [4]) door de gebroeders ELZEVIER te Leiden, waarin de vorige drukfouten niet voorkomen: en verder eene soort van voorloopige uitgave van 1611 [5]) de "Arithmeticae et geometriae Practica", gedrukt door ROMBERTUS DOYEMA te Franeker.

Dit laatste werk schijnt een eerste opstel te zijn geweest, dat eerst later aanmerkelijk uitgebreid, dan ook onder nieuwen titel verscheen. Aldaar komen in de Geometriae Pars Prior, Cap. VII, de Triangulis 7, blz. 45, slechts deze woorden voor. "In majoribus licebit ad triplicem diametri longitudinem..... superaddere, vel 16 qualium diameter 113 habet,"
die ons omtrent den oorsprong van deze verhouding niets leeren.

Gaven de vorige aanhalingen ons minder dan wij gewenscht hadden, deze laatste geeft ons veel meer. Vooreerst toch zien wij daaruit, dat de vader van ADRIAAN METIUS, als bij toeval, tot zijne vrij sterke benadering is gekomen. Hij vond toch, dat onze verhouding begrepen was tusschen $3\frac{17}{120} = 3{,}1416667$ en $3\frac{15}{106} = 3{,}1415094$, die beide slechts tot in drie decimalen juist zijn: het is dus wel toevallig, dat het quotient van de rekenkundig middenevenredigen van teller en noemer der zuivere breuk zulke veel zuiverder benadering geeft. $3\frac{16}{113} = 3{,}1415929$, waarvan er zes decimalen juist zijn. En dit is nu zeker de be-

*) Moet zijn $\frac{377}{120}$.

†) Moet zijn $3\frac{15}{106}$.

§) Moet zijn $\frac{1}{1000000}$.

werking, die in de vroegere aanhalingen door het woord „middelraminge" werd aangegeven.

Wij vonden dus de methode van deze benadering, hetgeen wij zochten; maar bovendien leert ons nog deze laatste aanhaling, bij welke gelegenheid de vader van ADRIAAN METIUS haar afleidde: namelijk bij eene wederlegging der cirkelquadratuur van SIMON VAN DER EYCKE, waarvan vroeger in N°. VII dezer Bouwstoffen sprake was. Zoo straks zullen wij hierop terugkomen; maar eerst ga de opmerking vooraf, hoe deze aanhaling, die ons op den goeden weg hielp, in vroegeren tijd juist op een dwaalspoor heeft gebracht, dat wel bijna gedreigd heeft dit onderzoek voor goed te verstikken.

4. Zooals bekend is, was J. F. MONTUCLA de schrijver van de „Histoire des recherches sur la Quadrature du Cercle" in 1754 uitgekomen [6]), en waarvan er in 1831 [7]) een herdruk verschenen is.

Dit werk bevat veel merkwaardigs, hoezeer er ook onderscheidene fouten, vergissingen en verkeerde oordeelvellingen in voorkomen, evenzeer als in zijne „Histoire des Mathématiques", waarover wij op het oogenblik te spreken hebben. Zijn zulke fouten op zulk uitgestrekt geschiedkundig gebied, waar het den moeijelijken toegang tot de oorspronkelijke, meestal zeldzame bronnen geldt, niet wel altijd te vermijden: te minder is dit aan MONTUCLA zoo hard aan te rekenen, als wel eens plaats heeft, wanneer men in het oog houdt, dat hij als baanbreker op dit wijde veld mag beschouwd worden.

MONTUCLA nu las uit de letters P. M. (die in deze aanhaling voorkomen en die „Piae Memoriae" dat is „Zaliger Gedachtenis" beteekenen) integendeel den naam des vaders van ADRIAAN METIUS, en noemde dien vader dadelijk, op recht fransche wijze, „PETRUS METIUS." Op bladz. 42 zegt hij.

„*Metius* est le premier des Mo- ‖ dernes à qui l'on doit quelque invention ‖ remarquable sur la mesure du cercle. ‖ ... Soit bonheur, soit adresse, *Metius* ‖ rencontra, de toutes les fractions possi- ‖ bles exprimées en 3 chiffres seulement, ‖ celle qui est la plus exacte Au reste ce ‖ *Metius* n'est point *Adrianus Metius*, ‖ Mathématicien connu du commence- ‖ ment du 17 siècle, & frère de *Jacques* ‖ *Metius* réputé l'inventeur du té-

lescope; || c'est *Pierre Metius*, le pere de l'un & || de l'autre, Mathématicien des Etats || de Hollande, & qui vivoit sur la fin du || 16e siècle. Je ne fais cette observation || que parce que jai remarqué qu'on se || trompoit ordinairement en attribuant || au fils cette invention, que lui-même || revendique à son pere dans ses ouvra- || ges."

Het blijkt hier, dat MONTUCLA niet wist, hoe men aan de genoemde verhouding was gekomen; en dat hij om de dwaling te voorkomen, dat zij aan ADRIAAN METIUS zoude toegeschreven worden, door overijling, tot eene nieuwe dwaling komt, als hij dezen PETRUS METIUS in het leven roept.

Hetzelfde herhaalde zich in de voormelde „Histoire des Mathématiques" [8]), Tome I, Partie III, Livre III, bladz. 579, waar men leest,

„Pierre Métius, pere de Jacques Métius, ré- || puté l'inventeur du télescope et d'Adrien Métius, mathéma- || ticien connu du commencement du dix-septième siècle, est || célèbre. C'est lui, et non Adrien Métius, qui est l'auteur du || rapport approché, que fait le diamètre à la circonference, comme || 113 à 355. (1).... Ce fut la prétendure quadrature du cercle d'un certain || Simon Duchesne (Simon *à Quercu*) musicien Franc-Com || tois, qui donna lieu à cette découverte. || [In de noot] (1) Adr. Metii, *Geom. Practica*, p. || 1, cap. 10."

Men heeft reeds in N°. VII der Bouwstoffen gezien, dat deze SIMON VAN DER EYCKE *niet* met SIMON À QUERCU te verwarren is, die musicus was; deze leefde toch veel vroeger.

Daar het nu steeds de gewoonte pleegt te zijn, hetgeen dan ook wel het gemakkelijkste is, om het oordeel van voorgangers, zonder nader onderzoek, slechts over te schrijven, heette van toen af aan de verhouding 355 : 113 aan PETRUS METIUS toe te behooren; maar van dezen was nergens anders een spoor te vinden, veelmin een of ander werk op te sporen, waarin de gemelde verhouding zoude voorkomen.

5. Toen men echter later gevonden had, dat die vader van ADRIAAN METIUS, niet PETRUS METIUS, maar ADRIAAN ANTHONISZ. heette, scheen men nog niet veel gevorderd te zijn. Onze groote geschiedvorscher in de wiskunde, J. H. VAN SWINDEN, hield het werk, dat wij zoeken, en waarin de quadratuur van

SIMON VAN DER EYCKE zoude bestreden worden, voor niet bestaande. Men weet, dat VAN SWINDEN aan de eerste uitgave van zijne Grondbeginselen der Meetkunde van 1790 [9]), later bij de tweede uitgave van 1816 [10]) een rijken schat van geschiedkundige aanteekeningen toevoegde. Hij schrijft omtrent dit punt in het Boek VII, Afdeeling III, Werkstuk XIX, Aanmerking VII en noot, op bladz. 305, 306, dat

„[METIUS] er bijvoegt „dat de zelve, [ADRIAAN ANTHONISSE] in het boekje dat hij tegen de *Quadratuur van* SIMON VAN EIK geschreven heeft . . . .” Ik heb het werkje || van ADRIAAN ANTHONISSE nimmer aangetroffen; ik kan derhalven || over de bewijzen daarin vervat niet oordeelen.”

VAN SWINDEN geeft daarop eenige conjecturen over de wijze, waarop ANTHONISZ. tot zijne verhouding zoude gekomen zijn, die duidelijk bewijzen, dat hij de boeken van ADRIAAN METIUS wel aanhaalt, maar over dit punt niet had nagelezen. In de noot blijkt verder, dat VAN SWINDEN de werken van SIMON VAN DER EYCKE niet kende: immers zegt hij: „misschien || was de naam DU CHESNE.” Hij laat daarop volgen

„Het || Boekje van ADRIAAN ANTHONISSE wordt in geen der veelvuldige ca- || talogussen genoemd die ik geraadpleegd heb: het geen mij doet twij- || felen of het wel gedrukt is geweest.”

Evenzeer onze G. MOLL, wien ook de latere papieren van VAN SWINDEN ten dienste stonden, behandelde deze vraag in zijne belangrijke verhandeling. „Geschiedkundig onderzoek naar de eerste uitvinders der Verrekijkers” [11]), en zegt daaromtrent (blz. 117) „De Heer VAN SWINDEN heeft het boekje van DU- || CHESNE even zoo min als dat van ADRIAAN ANTHONISSE, ooit gezien, ten || minste niet toen hij de tweede druk zijner *Meetkunde* uitgaf, en hij twij- || felt zelf, of het boekje van ADRIAAN ANTHONISSE wel ooit gedrukt || zij.”

Iets vroeger schreef MOLL

„Het is jammer, dat ADRIAAN METIUS, in wiens schriften men alleen || de rede van 113 tot 355 vermeld vindt, ons niet heeft onderrigt, op || welk eene wijze zijn vader ADRIAAN ANTHONISSE dezelve had gevonden.”

Hieruit ziet men, dat MOLL dit punt zelf niet heeft onder-

zocht, en slechts VAN SWINDEN heeft nageschreven, niettegenstaande hij (bladz. 118) zoo tegen dit naschrijven opkomt.

„Volgens gewoonte, heeft het *imitatorum servum pecus*, MONTU- || CLA nageschreven . . . . dit zal weder door velen worden nageschreven."

Ten laatste mag hier genoemd worden J. J. DODT VAN FLENSBURG, die in zijn opstel: „Letterkundige Aanteekeningen aangaande den twist tusschen SIMON VAN DER EYCKE, LUDOLF VAN CEULEN en ADRIAAN ANTHONISZ. over de leer van den Cirkel" [12]), — waaruit ik o. a. de resolutiën der staten enz. heb getrokken, die soms door mij zijn aangehaald, — houdt het er voor, dat dit boek nimmer het licht zag. Hij tracht dit aan te toonen uit twee resolutiën der Staten van Hollandt, de eerste van 5 December 1587 [13]), de tweede van 12 July 1595 [14]).

Nu is het mij gelukt, omtrent de uitgave van dit boek nadere inlichtingen te verkrijgen, al is het mij niet mogelijk geworden, de zaak ten eenen male uit te maken. Dit kan mogelijk zijn weggelegd voor hem, dien het gelukken zal een afdruk in handen te krijgen van dit werk, indien het althans werkelijk bestaat.

6. De aanleiding tot het vinden dezer nadere bijzonderheden was het nazien van een ander zeer zeldzaam werkje van onzen ADRIAAN ANTHONISZ, dat in mijn bezit is. Het is getiteld

„Solutie op die een en vijftichste ende tween vijftichste Propositie by Meester Nicolaum Petri Daventriensem. t' Alckmaer 1589 in 4°." [15]).

De schrijver noemt zich op den titel wel eenigzins anders. „Ghedaen by Adrianum Anthonij. || Alcmarianum Geometram": maar hij is, buiten eenigen twijfel, dezelfde persoon, als onze ADRIAAN ANTHONISZ.; zooals trouwens duidelijk genoeg uit de voorrede „Totten Const Liefhebbende Leser" blijken zal. In de tekst is telkens ruimte overgelaten voor twaalf meetkundige figuren, die naderhand met den passer en liniaal, en voorzien van gewone schrijfletters, daarin met gewone schrijfinkt zijn geteekend. Met dezefde hand geschreven vindt men op de laatste bladzijde, die wit is, de zeven „Errata" opgeteekend. Hoogstwaarschijnlijk is dit alles van de hand van den schrijver zelven. Op den titel komt eene houtsnede voor, waarop die zelfde schrij-

ver in zijn studeervertrek, en omringd door boeken en werktuigen is voorgesteld, zittende aan zijn tafel, en met een uitzicht door een geopend raam op een stad, die denkelijk Alkmaar moet voorstellen.

Is dit boekje dus wel merkwaardig wegens zijn uiterlijk, en de bijzonderheden daarvan opgemerkt, van niet minder belang is zijn inhoud. Beginnen wij met de voorrede.

„Totten Const Liefhebbende Leser. || HEt sullen ter auontuere enige verwondert sijn van dat wy eer- || tijdts hebben geschreuen tegens den Quadrature des Circkels || van Meester Symon van Eijcke/ eñ nu weder dese bedencken || eñ waernemingen op enige Propositiē by Meester Nicolaum || Petri Dauentriensem voor ghewent/ als ofte wy onse werck || alleenlick daer van sochten te maken omme eenē ygelick te be- || rispen: Seeckerlick die gheē die bekendt is den oorsake onses eersten schriuens/ || die sullen ons wel houden verdeedicht/ wel wetende dattet selue wt schuldighe || plichte ter begeerte van dē doorluchtige vorste WILHELMUS van Nas- || souwe Hooch Loffelicker Memorien gedaen is geweest/ als begerende onsen || oordel ende sententie van den voorseijde nieuw gheuonden Quadrature/ daer || van hem dē Authoor soo hooge was roemende. Dit selue en was voor ons niet || te weijgeren/ noch af te slaen/ende hebben aengenomen onse verclaringe daer || van te doē/ maer hebben lieuer gewilt dat het selue geschiede by geschrifte dan || by eenigh mondelinge Rappoort ofte openbaerlicken inden Drucke/ op dattet || niet schijnē en souden dat wy ijets wat verkeerdelick hadden aengegeuen ende || verclaert/ ofte dat wy sochten des Authoors schade in sijnē gedruckte Exemp- || laren/ want het was ons genoech voor die tijt dat synen Ex.tie onse wederleg- || ginge bekendt was. So is dan dese onse Ciuiliteyt ende Modestje effen wel vā || den voorgenoemdē Authoor also geduijt/ als of wij niet en durftē onsen Trac- || taet openbaerlick inden druck ten proeue stellen/ Sulcx dat daer naer die wel || eruaren M. Ludolph van Cuelē (sic) in Geometrische Reeckeninge sijnen Tout- || steen optē selue Quadratur heeft openbaerlick inden druck laten wtgaen/ we- || sende tot sulcx oock sonderlingh beweecht. Wy souden oock connen tot allen tij- || dē als wy willen tselue noch ampler eñ breder laten geschieden so wanneer wy || onse voorgemelde geschreuē boecxkē geresiuneert (sic) hebbende inde drucke veruor- || deren. Maer wat salt connen gelden: nu dē Authoor

(gewesen sijnde van sijne || eersten Inuentie) eenen anderen Quadrature weder van nieuws Anno 86 ter || baenen heeft ghebracht/ Als namentlijck des Nicolai Cusani/ Die ouerlange [in margine is met inkt bijgeschreven: tijdt] || door Johannem Regiomontanum is weeder gelecht ende geconfuteert/ Ende || omme sulcx wy daerom geen arbeijt noch moeyten behoeuen te doen."

Hieruit blijkt dus, hoe en waarom in het jaar 1589 het bedoelde geschrift nog niet in druk was uitgegeven, hoezeer in den aanhef diezelfde wederlegging als genoegzaam bekend wordt ondersteld; misschien wel zijn daarvan eenige afschriften gemaakt en genoegzaam verspreid, om toch eene meer algemeene bekendheid te mogen aannemen. Zijne zelfverdediging bewijst zeker, dat hij niet aan hoogmoed leed, en niet genoeg gewicht hechte aan de door hem gevonden verhouding, om daarmede de uitgave van zijn boekje te rechtvaardigen. Hoe hij verder over SIMON VAN DER EIJCKE dacht, blijkt uit het vervolg.

„Seeckerlijck het is wel te verwonderen dat desen Authoor in sijne eerst ghe- || uonden Quadrature Anno 84. wt gegeuen/ hem sonderlinge was fonderende || datse quam te gevallen binnē den Limitē Archimedis/ eñ is nu wel merckēde/ || ia selfs bekennende dat dese sijne laetste Cusanische Quadrature buite de voor- || seijde Limiten is comende/ ende euenwel die selue is invoerende als een claerd || bewijs van sijnen eerste Quadrature/ Sulcx dat hy hem is onderwindende || niet alleen met veele lastighe moeylicke eñ eensdeels ongefundeerde bewijsre- || denen die selue te beweren ende staende te houden: Maer oock met grote Jac- || tantie ijdele glorie eñ temeriteyt is hy Condemnerende die onwederspreecke- || lijcke bewijsreedenen Archimedis/ die welcke by Eutocium Ascholonitam sijn || breeder verclaert eñ wt gelecht. Die ooc werdē van Johanne Regiomontano, || Buteone/ ia van alle Mathematicis die gesont sijn van oordel/ als eene vastē || grondt gheuolght/ aengenomen/ ende ontfangen. Maer dese alle moeten daer || om van desen Authoor werden verclaert voor sectarisē/ recht of die niet anders || dan een schijn der waerheyt warē volgende/ die andersins om die extractie der || Irrationale wortelen (so desen Authoor meent) sijn deceptible/ ende derſſ inne || sulx die limitē Archimedis weder spreken/ die nochtans van Nicolaus de Cu- || sa self (van dē welcken desen sijnen Quadrature ontleent is) volcomelijck wert || geapprobeert/ also dat desen Authoor is strydende teegens alle die Mathe-

ma- || ticos met ghesloten Ooghen op den maniere der Anda- bateren."

Dit oordeel over de beide quadraturen van SIMON VAN DER EIJCKE komt vrij wel overeen met hetgeen wij daaromtrent in N°. VII dezer Bouwstoffen hebben gezien, waar evenzeer gewezen werd op de quadratuur van den Kardinaal NICOLAUS DE CUSA.

Het overige van deze voorreden spreekt over de redenen, die hem toch noopten tot het uitgeven van deze aanmerkingen op het boekje van NICOLAUS PETRI DAVENTRIENSIS, zooals die wiskundige gewoonlijk genoemd wordt.

„Dit heeft mijn || goedt ghedacht dus verre te verhalen tegen M. Symon vā Eijcke/ ende heeft || mijn oock oorsake gegeuen om beneffens dese beijde solutien vanden 51 ende 52 || Propo- sitie die by den voornoemden M. Niclaes voor alle die werlt met wille || sonder facit sijn voorgestelt oock indē druck te be- uiijtigen/ daer beneuens oock || byvoughende eenige corte beden- cken/ Cautelen/ ende waerneminghen op eeni- || ge andere Pro- positien mede inden seluen boeck begrepen. ||

Niet dat sulcx geschiet door enich afgunste/ ofte versmaet- heyt/ nochte oock || om dese Conste Geometria en Astronomia verdacht te maken ende in verach- || tinge te brengen/ dz sij verre: want wij die seluen niet alleen hoochlicken prijsen| || maer hebben oock tot noch toe onsen priuate studie den seluen son- derlinge ge- || consecreerdt ende houden alsulke alle prijs waer- dich die daer arbeijden eñ naer- || sticheijt doen om dese gelijck ooc alle liberale vrije Constē te verbreijden. Maer || de wijle wy sien dat dickwijls gheuolcht werden al sulcke Propositien/ || Regulen/ eñ Exemplen die by verscheijden geleerden sijn voor- gewent die welc- || ke somtijts beuonden werdē (gelijck oock den goedē Homerus) geslapē te heb- || ben/ ende euenwel oppet ver- trouwen haerder Authoriteyt ghehouden werden || voor vast ende wel gefundeert/ daerse nochtans geen vasten Reghel noch se- ker || gebruijck en connen hebben. Gelijckerwijs dit selue eens- deels oock ghespeurt || wert aen desen Authoor/ die welcke schijndt mede gesteundt te hebben op die || Authoriteyt eniger voortref- felicker Authoren inder Mathematischer Conste/ || int voorstellen van eenige Mathematische Propositien/ sonder wijder naer- || denckinge ofte oock die selue als een seekere/ vaste/ ende ge- nerale reghel souden || mogē int geheel werden vertrout. ||

So ist dat wij tselue aenmerckende/ aengenomen hebben om te bewijsen/ dat || eenijge Propositien in voegen als die sijn voorgestelt/ geen vaste noch seker ge- || bruijck connen hebben. Daer mede dan alle liefhebbers deser Conste ghe- || waer- schout souden mogen wesen/ van die erroren ende doelingen daer inne sy || onweetende souden mogen vallen. Hoepende dat dese onse arbeijt ten besten || verstaen ende den Constliefheb- bende aenghenaem sal wesen/ dat welck || bevindende: Sullen geoorsaeckt wesen om dese Conste naer onse || vermoghen oock in onser duijdtsche tale te helpẽ verbre- || den/ ende verciere͂ met meerder ende hoger spe- || culatien/ tot dienste van alle lief- || hebbers/ ende verwec- || kinge van alle In- || geniosen tot die || studie deser || heerlicker || vrije co͂- ste."

Dit boekje bevat voorts

Regula 1. Solutie des li. en propositie.

Regula 2. Dit selue deur Spherische rekeninghe te vinden.

Regula 3. Dit selue te vinden door Spherische Triangulen.

Regula 4. Die andere Propositie is dese.

Regula 5. Bedencken ende waerneminghe op dat vilj. Capittel.

Regula 6. Aenmerckinghe opten xij. ende xxiiij. Capittel.

Regula 7. Bedencken op dat xxxij. Capittel om den Azimuth || der Sonne te vinden.

Regula 8. Bedencken op dat xlvij. Capittel.

Regula 9. Bedencken op die xlviij. Propositie.

Ander Vraghe.

De twaalf figuren, die in de opengelaten plaatsen tusschen de tekst voorkomen, zijn met schrijfinkt geteekend, en uit de hand getrokken. De letters dezer figuren, eenige veranderingen in de teksten, een zevental „Erraten" tegenover de laatste bladzijde, zijn alle van dezelfde hand: denkelijk dus van die des schrijvers zelven.

Het beschreven boekje is het eenigste, dat mij van ADRIAAN ANTHONISZ. immer in handen is gekomen; en ik heb het nergens aangehaald gevonden. Van hem is nog bekend, dat hij in 1603 een octrooi 16) heeft genomen voor een astrolabium; hiervan had hij eene beschrijving zamengesteld, waarvoor hij reeds vroeger (zie Noot 14) een octrooi had aangevraagd; ook dit werkje schijnt niet gedrukt te zijn geworden.

7. Een andere arbeid van onzen ADRIAAN ANTHONISZ. ont-

moeten wij in een der oudste Nederlandsche zeevaartboeken „de Spieghel der Zeevaerdt" van LUCAS JANSSZ. WAGHENAER van Enckhuyzen. Leiden 1584. in folio [17]).

Op bladz. 10 van het „Eerste Deel" toch leest men.

„Corte onderrichtinghe vande tafele der || Declinatie der Sonnē van nieuws ghecalculeert ende gherectificeert/ || eyghentlijck opte vier eerstcomende Jaeren van 1585. 86. 87. ende 88. *per* || *Adr. Anth. Geometram:* Ingenieur der Staten Graeffelijcheyts van || Hollandt."

Op bladz. 11 volgt dan de „Onderrichtinghe" en bladz. 12, 13 de tafels zelve.

Het tweede deel van deze „Spieghel der Zeevaerdt" [18]) is te Leiden uitgekomen in het volgende jaar 1585. Toen is tegelijkertijd een herdruk van het Eerste Deel verschenen met een half latijnschen titel „Pars prima speculum nauticum" [19]), waarvan de tekst hollandsch is. Maar er is ook eene latijnsche vertaling van dit Speculum uitgegeven te Leiden in het jaar 1586 [20]): de vertaler is de bekende MARTINUS EVERART uit Brugge.

Dat deze boeken werkelijk opvolgende drukken, geene nieuwe titeluitgaven zijn geweest, blijkt uit de volgende bijzonderheden, die te eerder hier eene plaats verdienen, omdat zij ten deele de beschrijving van den Heer F. MULLER in zijn „Essai sur la Bibliographie Neerlando-Russe" [21]) aanvullen en verbeteren.

Het boek van Noot 17 heeft eene voorrede blz. 5—40 en 23 kaarten.

Dat van Noot 18 heeft eene voorrede blz. 1—19, een uittreksel uit die van het vorige boek, en 21 kaarten. In de Opdracht aan de Staten zegt hij:

„Ende wil- || le daerom V.M.E. onderdanigh ghebeden hebben| dat de selue ghelieue de- || se anderde vrucht... || ...te nemen onder haer protectie ende bescherminghe/ omme || daer van te weren alle onnutte wespen/ die zelfs niet voortbrenghen/ maer || alleenlick aerbeyden ende daer op wtsijn/ om de vruchten van ander lieden || naerstic heyt/ moeyten ende aerbeyt schandelijck tot haer te trecken. Voor de || wangunstighe berispers/ wil ick my met alle constliefhebbers troosten ende || . . ."

Deze opdracht is gedateerd „Enck-huy en desen xvij Julius. Anno M.D.LXXXV."

De bewerking van Noot 19 heeft eene voorrede blz. 1—36, gelijk aan die in het boek van Noot 17, maar met andere letter gedrukt: bovendien is zij op de laatste bladzijden met nieuwe opgaven vermeerderd. Er komen 23 kaarten in voor.

Het werk van Noot 20 heb ik niet te zien kunnen krijgen.

Omtrent dit merkwaardige werk, het eerste in zijne soort, vindt men merkwaardige bijzonderheden in eene hoogduitsche vertaling „Desz Spiegels der Seefart" 22). De vertaler „RICHART SLOTBOEM DAVENTRIENSIS" zegt daaromtrent.

„Hat sich funden Lucas Johan Wagener, ein wohlversochter Künstreicher/ vnd weytberümbter Pylot/ vnd || Schiffs Steurman zu Enckhüsen/ vnd nit allein von kunst der Seefart vnd gebrauch der Instrument || (welchs dan auch andre vor ihn gethan) artlich gehandlet/ sonder auch alle Meer Vffere oder Cüsten || beynha von gantz Europa in 47. Taffeln oder Carten... || ... || offentlich ans liecht bracht. Also das so lange die Welt gestanden dergleichen || werck von Seecarten/ in keinem Land Europe auszgangen. Landtaffeln haben zwar vil gemacht/ aber || Seecarten von so vil Land/... || ...hat sich biszher zu/ niemand anders vnderwunden. Diese || gemelte 47. Seecarten/ vber wolche er mehr dan 20. Jar gearbeit vnd zu letzt in Truck bracht/ hat er in || zwey vnterscheitliche Bücher verfaszt/... || ... || ...vnd seind diese Ex- || emplar/ ob wol sie in Hollandischer und für ander Land in einer vnbekanten sprach beschriebē/ dannoch || vm der Seecarten vnd des Gesichtes willen/ nit allein in Teudtschland/ sonder nach Italien/ Hispa- || nien/ Franckreich/ Enghelland/ etc. in grosser mengen gezogen vnd hingeführt worden."

Men ziet hieruit, dat dit zeekaartenboek het eerste in zijne soort was, twintig jaren arbeids heeft vereischt, maar dan ook bleek te voldoen aan eene alom gevoelde behoefte. SLOTBOEM vervolgt nu.

„Deszhalben er || sie/ der gantzen Welt zum besten/ durch einen Hochgelärte Man [de beroemde MARTINUS EVERART van Brugge] in Lateinischer sprach hat lassen vber- || setzen/ vnd das ein Buch Könniginlicher Maiesteit in Enghelland/ das ander Hochlöblicher Gedäch- || nüsz Frederico 2. Könnig zu Denn- marck vnd Sohn oder Generi C.F.D. gededlciert."

Na die opdracht volgt „Lucas Wagener zum Leser" en ook hier ontmoeten wij enkele bijzonderheden van gewicht.

„Habe ich die arbeit mit lust angegriffen, vnd den ersten theil des Spiegels der Seefart/ || ... im 1583. Jar in Nieder- landischer sprach/ lassen in truck ausz- || gehen."

Waaruit blijkt, dat de druk van Noot 17) werkelijk de eerste is geweest. Nader verhaalt hij, hoe dit werk hoog werd geschat, „Welchs andern vil mehr/ als mijr ge- || bürt zu sagen" en hoe in eene zitting van den „Grosten vnd Secrete Rade" || van Engeland, verklaard werd „das nötig wer/ das ein sulch Büch in einer gemeinen sprach translatiert vnd || vbersetzt würde, auff dasz esz bey allen Nationen müchte gelesen vnd verstande werden. Welchs mich vrsach vnd anleitung gegeben hat/ sulchs zu erster gelegener zeit zu volbringen." Hij had het tweede deel dan ook uitgegeven, en aan de Staten van Holland en West-Friesland opgedragen, die „auch mijr mit alsulcher remu- neratiön vnd ge- || schenck verehrt vnd begifftigt haben/ das ich inen al mein lebenlang wol dancksagen"; zooals toen ter tijde de gewoonte was.

In alle de aangehaalde uitgaven vindt men de door onzen ADRIAAN ANTHONISZ. berekende tafels van zonsdeclinatiën.

Bovendien vindt men nog fransche, portugeesche en engelsche vertalingen van deze kaarten, die in Engeland zooveel gebruikt werden, dat later aldaar ieder kaartenboek „a Wagener" plagt geheeten te worden. Dit veelvuldige gebruik, ook ten onzent, gepaard misschien met een betrekkelijk hoogen koopprijs, is misschien de oorzaak, dat alle exemplaren allengs versleten zijn geworden en dus thans slechts zelden voorkomen. J. C. PILAAR in het Tijdschrift toegewijd aan het Zeewezen, Tweede reeks, vijfde deel, bladz. 26, spreekt van „een vierde nederduitsche druk te Amsterdam uitgegeven."

8. Behalve de reeds genoemde werken van den beroemden zoon ADRIAAN METIUS, schreef deze nog meer andere, waarvan ik de volgende aangehaald vond.

„Doctrinae Sphaericae Libri V." Hiervan verscheen een latere druk te Franeker in 1598: en een nadruk te Frankfort in 1591.

„Astronomiae Universae Institutiones. Franeker 1605. 8°."

„De genuino usu utriusque globi. Franeker 1611. 4°;" waarvan een herdruk kwam in 1624 [23]).

„Institutiones Astronomicae et Geographicae, Fondamentale ende grondelijcke onderwijsinge van de Sterrekonst. Franeker 1614. 4°. [24])."

Van dit werk bestaat een herdruk van 1621 [25]): het is misschien eene omwerking van het voorlaatste boek.

„Nieuwe geographische onderwijsinghe. Franeker 1614. 4°." [26]).

„Praxis nova geometrica per usum circini. Amst. 1623. 4°." [27]).
waarvan eene hollandsche vertaling

„Maetconstigh Liniael in 1626." [28]).

„Problemata Astronomica. 1625."

„Geometria de munitionibus."
waarvan eene hollandsche vertaling in 1626

„Sterckebouwing" [29]).

„Handt-Calendier 1627." 8°. [30]).

„Fondamentale onderwijsinghe aengaende het Astrolobium. Drie Tractaten. Franeker 1627. 4°." [31]).

„Primum Mobile, Astronomicè, Sciographicè, Geometricè et Hydrographicè nova Methodo Explicatum. IV Tomi. Franeker 1631. 4°. [32])."

„Astronomische ende Geographische onderwijsinghe. V Deelen. Franeker 1632." 4°. [33]).

Waarschijnlijk hetzelfde werk, dat ook wel

„Opera Astronomica. Amsterdam 1633. 4°."
wordt genoemd.

„Mensura Geographica." Amst. 4°. [34]).

De beide voorlaatste werken schijnen wel de laatste van zijne hand geweest te zijn. In de opdracht van het boek van noot 33) schrijft hij dan ook:

„Ick heb- || be, mijn Heeren, gedurende de tijt mijner Professie van || 32. Jaren, daer na getracht, dat ick niet alleen d'Studenten || tot de genoechlijcke speculatie des Hemel-loops hebbe || aengevoert . . . ende hebbe also, door verscheydene wtgege- || vene ende meermaels herdruckte boecken, gesocht || niet alleen de Mathematische konstē tot meerder *perfectie* || te brenghen, maer inzonderheyt te verrijcken eñ versterc- || ken met *inventien* d'*sterckte-bouwinghe* ende *Navigatie* || concerneerende."

Hij eindigt dit werk (blz. 220) met de

„Censure vande Auteur, soo van de || oude als de nieuwe Jan

Henricx [deze is Jan Hendrick Jarighs van der Ley] regel, welcke || hy voor generael houd, ende van de doorschy- || nende Lopers, met de caerten by Jan Henricx || voorgegeven."

Merkwaardig is hetgeen hij, hoezeer hij blijkt dien regel als geheel verkeerd te beschouwen, daaromtrent zegt op bladz. 197.

„Maer dewijl de Mog. || Heeren Staten generael/ door eenige soo Theoristen hem de Mathema- || tische consten ten besten verstaende/ als mede verscheyden Stuyrluy- || den ende ingenieurs van de zeevaert/ syne inventie ende generale reghel || (gelijck hy die selve noemt) hebben doen ondersoecken/ ende is door goet || rappoort van de Examinateurs daer op ghevolcht/... so hebben wy oock die || selve niet ganschelijck connē verwerpē/ maer houdē voor goed/ datmē de || selve onder anderen mede volget/ tot dat men een ander eñ beter bekome. || Want gelijck een Medicijn-meester sijn beste doet/ ende vertrout op syne || Medicamenten... maer || alsoo hy de kranckte altoos niet te recht en kennet/ soo bevint hy hem || somwijlen bedrogen."

De beoordeeling van dien regel valt er echter niet te minder ongunstig om uit.

AANTEEKENINGEN.

1)* Manuale || arithmeticae || et || Geometriae Practicae: || *In het welcke* || Beneffens de Stockrekeninge ofte || *Rhabdologia J. Nepperi*, kortelijck ende duydelijck || 't gene den Land-meters ende Ingeniuers, (sic), nopen- || de het Landmeten ende Sterckten-bouwen noot- || wendich is, geleert wordt ende exemplaerlijck || aengewesen. || *Door* || adrianvm metivm || Med. D. & Mathes. Prof. ordinar. || binnen Franeker. || *De tweede Editie gecorrigeert, gelijck in de Praefatie* || *tot den Leser te sien is.* || *Tot Franeker*, || Gedruckt by Ulderick Balck, Ordi- || naris Landschaps ende Academiae Boecke- || Drucker. Anno 1646. in 8°.

VIII bladz. (zonder pagineering), bevatten den titel en de „Tot den leser" (4 bladz.) van b. fullenius. Math. Prof. Ord., die metius noemt „zijnen Antecessor ende Praeceptor || in dese Faculteyt"; en zegt, dat de eerste druk van het jaar 1633 is; vervolgens „petri baardt Naeghebootste *Vranie*" (2 bladz.)

A—Bb, bevatten het werk (bladz. 1—377) en dan het Register 11 bladz. (zonder pagineering).

2)* Manvale || Arithmeticae & Geometriae Practicae: || In het welcke || Beneffens de Stock-rekeninghe ofte || Rhabdologia J. Nepperi cortelick eñ duydelic t' ge- || ne den Landmeters eñ Ingenieurs, nopende 't Land- || meten eñ Sterckten-bouwen nootwendich is/ wort || geleert ende exemplaerlick aenghewesen. || *Op een nieu verrijckt met een nieuwe inventie om alle ronde va-* || *ten hare wannigheden af te pegelen.* || Door || Adrianum Metium. Med. D. & Ma- || thes. Profess. ordinar. binnen Franeker. || Vignette: eene meetkundige figuur, zie bladz. 171. || Tot Amsterdam/ || By Henderick Laurentsz, Boeckvercooper op 't || Water/ int Schryfboeck/ Anno 1634. in 8°.

XVI bladz. (zonder pagineering), bevat titel, „Epistola dedicatoria" (3 bladz.) gedateerd „In Franeker den 26. Septemb. || 1634." hetgeen in strijd schijnt te zijn met de opgaaf van 1633, in Noot 1. „Tot den Leser" (11 bladz).

A—Q, het werk, bladz. 1—246, en het Register 8 bladz. (zonder pagineering).

2*

[3]) ADRIANI METII ALCMAR. || Mathes. Prof. ordinar. || ARITHMETICA, ET || GEOMETRIA NOVA, || Quarum illa || *Libris II comprehensa, Numerandi artem egregie explicat. Cui* || *adjungitur Trigonometriae planorum methodus succincta.* || *Altera vero in VI. partes distincta:* || Propositis breviter & nervosè principiis. Omnem magnitudinem ex || arte mensurare: Idemq; per nova regulae Proportionalis inventa praestare: || Quaecumque loca adversus hostium insultus juxta usitatam hoc saeculo || praxin, munire: Astronomica Problemata Geometricè solvere: & Sciateri- || ca quaelibet in plano facilè extruere, compendiosè & solidè docet. || Vignette: eene zinnebeeldige voorstelling met het randschrift „PATIENTIA VINCIT DVRVM." || FRANEKERAE. || Excudebat Vldericus Balck, Ordinum Frisiae Typograghus (sic). 1625. in 4°.

XVI bladz. bevat den titel, de opdracht „*Nobilissimis Amplissimis* || SVPREMAE FRISIORVM CVRIAE || SENATORIBVS" (6 bladz.) gedateerd „Ex Academia || nostra. Kal. Sept. Ann. CIƆ.IƆ.CXXV" een „CARMEN PIERII WINSEMII. Icti & Historiographi" (4 bladz.) een vers „van M. WINSEMIUS Med. D. & Prof." (1 bladz.) een „CARMEN GRATVLATORIVM van JACOBUS RODRIGIUS. Harlemensis" (2 bladz.) „Errata Arithmeticae." (1 bladz.).

A—P, bladz. 1—118; bevatten, bladz. 1—59, ARITHMETICAE LIBER 1. Cap. XXVIII.

Bladz. 60—88, LIBER SECUNDUS. Cap. V.

Bladz. 89—109, SVCCINTA || TRIGONOMETRIAE || PLANORVM || METHODVS.

Bladz. 110—118, CANON TRIANGVLORVM || *in Gradibus & scrup. primor. decimis, ad partes* || *Radii* 100.000.

Daarop

GEOMETRICAE || PRACTICAE, || PARS I & II. || *Quae rei cujusvis mensurabilis vim, proprietates & habitudines* || *interpretatur & exercet.* || Authore || ADRIANO METIO ALCMARIANO || Matheseos Professore ordinario || Vignette: eene zinnebeeldige voorstelling als op den hoofdtitel. || FRANEKERAE, || *Excudebat Uldericus Balck, Ordinum Frisiae, & eorundem Aca-* || *demiae Typographus,* Anno 1625. in 4°.

In verso van den titel de „Errata Geometriae."

A—Ff, bladz. 1—229. De Pars I, bladz. 1—123; de Pars II bladz. 124—229.

Een blad wit; dan titel.

GEOMETRIAE || PRACTICAE || PARS TERTIA. || *Vsum Circini & Regulae Proportionalis.* || EXPLICANS || Autore || ADRIANO METIO ALCMARIANO, || Mathaes (sic) Professore ordinario. || Vignette: meetkundige figuur, zie bladz. 22. || FRANEKERAE, || Ex officinâ Vlderici Dominici Balck, Ordinum Frisiae || & eorundem Academiae Typographi. || MDC.XXV.

Bladz. 232. In verso van den titel: „CARMEN" „PIERII WINSEMII, Historiographi" en plaat.

Gg—Nn, bladz. 233—280; de beide laatste zonder pagineering. Daarop de titel.

Geometriae || Practicae || Pars qvarta, || continens || *Munitionum delineandarum muniendarumque genui-* || *nam et propriam Institutionem.* || Autore || Adriano Metio Alcmariano, || Mathes. Professore ordinario. || Vignette: eene meetkundige figuur, zie bladz. 74. || Franekerae. || Ex officinâ Vlderici Dominici Balck, Ordinum Frisiae || & eorundem Academiae Typographi. || M.DC.XXV, met eene plaat.

Nn—Qq, bladz. 279—308.

Daarna de titel.

Geometriae || practicae || Pars qvinta. || Continens. || *Problemata Astronomica Geometricè delineata, & Arithme-* || *ticé resoluta.* || Autore || Adriano Metio Alcmariano || Mathes. Professore ordinario. || Vignette: eene meetkundige figuur, sphaera armillaria. || Franekerae, || Ex officinâ Vlderici Dominici Balck, Ordinum Frisiae Typographi. || MDC.XXV.

Qq—Vu, bladz. 1—34.

Daarop den titel (met bladz. 35 gepagineerd).

Geometriae || practicae || pars sexta. || Quae est || *De Sciatericis Horologiis Superficiebus planis in-* || *scribendis.* || Vignette: een zonnewijzer, zie bladz. 79. || Franekerae, || Apud Vldericum Balck, Ordinum Frisiae Typographum. || Anno 1625.

Xx—Hhh, bladz. 35—102; een „Index Capitum" (14 bladz. zonder pagineering).

4)* Adr. MetI Alcmariani || Arithmeticae || libri dvo: || et || Geometriae || Libri VI. || *In quibus etiam Tractatur* || Trigonometria Planorvm, || Geodaesia, || Vsvs circini & regvlae proportionalis, || Architectura Militaris, || Problemata Astronomica, || Sciaterica Horologia. || *Editio postrema priore multo auctior.* || Vignette: een boom met tuinman, en opschrift „Non solus." || Lvgdvni Batavorvm, || Sumptibus Bonaventurae & Abrahami Elseviriorum. || CIↃ IↃ C XL. || in 4°.

Hetzelfde werk als dat van Noot 3), waarbij — wat de Geometria Practica betreft — de Pars Tertia 10 bladz. meer bevat, en de Pars Quinta en Sexta doorloopende pagineering hebben: dus dit geheele werk A—Hhh, bladz. 1—426, en 14 bladz. zonder paginatuur. Daarop nog een „Index Rerum et Verborum."

5)* Arithmeticae || et || Geometriae practica || Adriani Metii || Alcmar. matheseos profess. || in academia frisiae fra- || nequerana ordin. || Vignette: het zegel der hoogeschool van Franeker. || Franeqverae, || Excudebat || Rombertvs doyema. 1611 || *Prostant in Officina Lugdunensi apud Elzevirium.* in 4°.

XII bladz. bevatten Titel, opdracht aan de Staten van Friesland, gedateerd „*Ex Acade-* || *mia vestra, quae est Franequarae, VIII. Kalend.* || *Octob. CIƆCXI.* || ” (2 blz.) daarop eenige verzen, van S. ARCERIUS, *pro tempore Rector Acad.*, MARCELLVS VRANCKHEIM || L. V. D. & Scholae Zutphaniensis Moderator, BERNARDUS FURMERIUS, Leovardiensis Frisius || Patriae Historicus, en JACOBVS RODRIGIVS HARLEMENSIS (1 blz.). Dan „Index" 8 blz.

A—I, blz. 1—71. Arithmeticae Libri II.

A—V. blz. 1—164. Geometriae Partes II.

[6]* HISTOIRE DES RECHERCHES || SUR LA || QUADRATURE || DU CERCLE ; || Ouvrage propre à instruire des découver- || tes réelles faites sur ce problême célé- || bre; & à servir de préservatif contre || de nouveaux efforts pour le résoudre : || *Avec une Addition concernant les problêmes* || *de la duplication du cube & de la trisec-* || *tion de l'angle.* || A PARIS, || Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur- || Libraire du Roi en son Artillerie, rue || Dauphine, à l'image Notre Dame. || M.DCC.LIV. || *Avec Approbation & Privilege du Roi.* in 8o. met 8 platen.

a—ε. bladz. i—xliij. et 4 bladz. (zonder pagineering) 1 bladz. wit.

Bevat:

Titel „Préface" (27 bladz.) „AVIS AU LECTEUR" (1 bladz.). „TABLE || DES MATIERES" (12 bladz.) „APPROBATION, || *du Censeur Royal*" (1 bladz.) „PRIVILEGE DU ROI" (3 bladz.) „ERRATA" (1 blz.).

A—N, blz. 1—304, waarvan de tien laatste geven de „TABLE || ALPHABÉTIQUE || DES MATIÈRES".

4 blz. (zonder pagineering) bevatten eene lijst van „LIVRES || DE MATHÉMATIQUE."

[7] HISTOIRE || DES RECHERCHES || SUR LA || QUADRATURE || DU CERCLE || etc. PAR MONTUCLA || NOUVELLE ÉDITION, etc. PARIS etc. 1831. in 8°.

[8]* HISTOIRE || DES || MATHÉMATIQUES, || ... || NOUVELLE EDITION, .. || *Par* J. F. MONTUCLA, *de l'Institut national de France.* || TOME PREMIER. || A PARIS, || . . . || AN VII. in 4°.

[9]* GRONDBEGINSELS || DER || MEETKUNDE || DOOR || J. H. VAN SWINDEN, || HOOGLEERAAR IN DE WYSBEGEERTE, || WIS-, NATUUR- EN STERREKUNDE || TE AMSTERDAM, LID VAN || VERSCHEIDEN GELEERDE || GENOOTSCHAPPEN. || *Te* AMSTERDAM, || BY PIETER DEN HENGST. || MDCCXC. met VII platen in 8°.

Blz. I—XLVIII.

A—Hh, blz. 1—486.

[A]—[C], blz. 1—44.

10)* GRONDBEGINSELS || DER || MEETKUNDE, || DOOR J. H. VAN SWINDEN, || *Hoogleeraar in de Wijsbegeerte, Wis-, Natuur- en Sterrekunde* || *te Amsterdam; Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut* || *van Wetenschappen, Letterkunde en Kunsten, van de* || *Koninklijke Academie te Brussel, en van verscheide* || *geleerde Genootschappen: Correspondent van de Koninklijke Academie van Wetenschappen,* || *te Parijs.* || TWEEDE, VERBETERDE, EN ZEER VERMEERDERDE DRUK. || TE AMSTERDAM, BIJ || PIETER DEN HENGST EN ZOON, || MDCCCXVI. in 8°.

VIII blz. (zonder pagineering) bevat titel en „INHOUD" (6 bladz.)

blz. I—XLVIII. bevat VOORBERIGT (3 blz.) gedateerd 1 *Julij* 1816. VOORREDE || VAN DEN || EERSTEN DRUK (15 bladz.) gedateerd 18 *Julij* 1790." AANWIJZING || DER || WISKUNDIGEN, || WIER UITVINDINGEN VERMELD, OF WIER || SCHRIFTEN, IN DIT WERK, AANGEHAALD || WORDEN. (15 bladz.) AANWIJZING VAN TAFELS (3 blz.) AANWIJZING || DER || MATHEMATISCHE WERKTUIGEN, || WELKE IN DIT WERK UITGELEGD WORDEN. (2 blz.), DER TEEKENS (1 blz.). AANTEEKENING, DER PROPOSITIEN VAN EUCLIDES (9 bladz.), INLEIDING (2 blz).

A—Pp, blz. 1 –174, het werk in XII boeken.

Pp—Rr, blz. 375—610. Aanhangsel en 6 platen.

A—D, blz. 1—45. Werkstukken en 2 platen.

NB. De eerste druk, van 1790, bevat een veel kleiner aantal geschiedkundige aanteekeningen.

11)* GESCHIEDKUNDIG ONDERZOEK || NAAR DE || EERSTE UITVINDERS || DER || VERREKIJKERS, || UIT DE AANTEEKENINGEN VAN WIJLE || DEN HOOGLEERAAR || VAN SWINDEN, || ZAMENGESTELD || DOOR || G. MOLL.

= NIEUWE VERHANDELINGEN || DER || EERSTE KLASSE || VAN HET || KONINKLIJK-NEDERLANDSCHE INSTITUUT || VAN || WETENSCHAPPEN, LETTERKUNDE EN || SCHOONE KUNSTEN || TE || AMSTERDAM. || DERDEN DEELS EERSTE STUK. || TE AMSTERDAM, BIJ || C. G. SULPKE || 1831. || in 4°. bladz. 103—210.

12)* LETTERKUNDIGE AANTEEKENINGEN || *aangaande den twist tusschen* SIM. VAN || DER EIJCKE, LUDOLF VAN CEULEN EN || ADRIAAN ANTHONISZ., *over de Leer van* || *den Cirkel.* || DOOR J. J. DODT VAN FLENSBURG.

= TIJDSCHRIFT || TOEGEWIJD AAN HET || ZEEWEZEN, || TWEEDE REEKS. || Redactie || J. J. PILAAR, J. M. OBREEN. || *Vijfde Deel* || MEDEMBLIK, || BIJ DE WED. L. C. VERMANDE. || 1845. in 8°. bladz. 269—284.

13) Resolutien der Staten van Hollandt, 5 December 1587.

„Den Eersamen ende wel geoeffenden Adr. Antonisz. te mogen doen drucken sine boucxken bij hem gemaeckt, geintituleerd: „Re-

denen van het verloop des jaers met eenen nieuwen altijt durenden Calender"; noch een boucxken van de metinghe des circkels, ende noch een boucxken van de beschrijvinghe van allerhande sonnewysers."

[14]) Resolutien der Staten van Hollandt, 12 July 1595.

„Op't versoeck van Adriaen Antonisz., lantmeter, is den selven octroy verleent, als volcht:

De ridderschap enz. doen te weten. Alsoe Adr. Antonisz, lantmeter, ons te kennen gegeven heeft, dat wy hem gegunt hebben octroye van seeker boucxken, te mogen doen drucken, voornamelyck een tractaet, geintituleert: „Redenen van den verloop des jaers, met eene nieuwe altijt durende calendrier," ende dat de divulgatie van deselve boucxkens langer heeft aengelopen, dan den suppliant selfs meende, eensdeels wesende verhindert door andere occupatien, anderdeels, dat den Suppliant verhoopt hadde lichtelijck te kunnen bekomen het boucxken, geintituleerd „nova ratio restituendi Calendarii Romani," in welck boucxken te voorschijn sullen gebracht worden die hypotheses van de correctie des selven calendriers, als mentie gedaen wordt in de „calendario Gregoriano perpetuo, canone 2"; dan en hadde hij suppliant na lange gedane moeyte ende costen, ende veel vervolgs, deselve niet kunnen becomen, als oock wedervaren was Michael Mestlinus, den voortreffelijcken mathematicum in Hoochduitschland, tegen welken Christophorus Clavius, een Jesuit hadde laten uitgaen de „Apologie", onlangs tot Romen gegedruckt, tot beschermenisse van de Pauselycke reformatie des Calendriers, vervattende alle de hypotheses en argumenten, daer die Reformateurs desselven Calendriers haar op sijn funderende, den suppliant oock onlangs ter handen gecomen, der welcker principaelste argumenten den suppliant verhoopte om te stooten; ende te bewijsen, dat se geensins sijn gefundeerd, nochte op dat Niceenische concilium, nochte op de Astronomia, daer sij haer besonder op sijn beroepende, maer veel meerder op haar eygen superstitien, ende maer also hy suppliant beduchtende was, dat sijn verkregen octroy souden verstaen worden geexpireert te sijn binnen de tien jaren, na dato dat hetselve is gegeven, ende dat hij sulx gefrustreerd soude blijven van het profyt, dat hij hadde verwacht voor sijn gedane moeyten enz. versoeckende daerom enz. octroy te mogen doen drucken, in verscheiden spraken;

Eerstelick het voorsz. boeck: „Reedenen van den verloop des jaers enz." met een nieuwen altijts durende calendrier, volgende het formulier bij hem geexhibeert, met noch eenige instrumenten totte selve boucken behorende, als voornaemlyck dat instrument geinti-

tuleert „speculum noemenarum aut lunationum, in duitsch, den spiegel der nieuwe maenden” de selve te doen maecken in papier, kooper, silver of gout, oft ander stoffe, om met de handt geregeert te worden, of automato motu met gewicht te doen bewegen.

Nogh een boucxke van de meetingen des circkels, Noch een boucxken van de beschrijvinge en dat gebruyk der algemeene Sterrenhandthaave bij Gemmam Frisium genaamd astrolabium catolicum, welks gebruyk eertijts bij denselven was begonst eñ na sijn doot bij sijnen soon Corn. Gemma geabsolveert, ende hetwelck bij den supplt. seer soude sijn verbetert ende vermeerdert, enz.

Soo ist dat wij enz. hem bij dese octroyeren, enz.”

15)* Solutie op die eē en vijftich- || ste ende tweenvijftichste Propositie. die met wille sonder Fa- || cit sijn voorghestelt in eenen Boeck onlancx wtghegheuen || by Meester Nicolaum. Petri Dauentriensem. || van die inleydinghe hoemen verstaen ende ghebruycken sal || die Celeste ende Terrestre Cloote. || Mitsgaders eenighe bedencken/ Cautelen/ ende waerneminghen op verschey- || den Geometrische Propositien int selue Bouck voorgestelt. || Vignette: een houtsnede, voorstellende den schrijver in zijn studeervertrek. | Ghedaen bij Adrianum Anthonij. || Alcmarianum Geometram. || beminder der Mathematische || Conste. || Ghedruckt t'Alckmaer by Aert Cornelissz./ wonende by de Craen op Dronc- || ken oort/ tegen ouer de steenen Brugge. Anno 1589. in 4°.

A—C. (24 bladz. zonder pagineering.

Na den titel „Totten Const Liefhebbende Leser” (2 bladz.), het werk met 12 meetkundige figuren, uit de hand met inkt geteekend in daarvoor tusschen de tekst gespaarde ruimten; op eene witte bladzijde de „Errata” zeven in getal, met dezelfde hand geschreven.

16) Generaliteits Notulen, 17 Maart 1603.

„Octroye verleent aen Mr. Adr. Anthonisz. ingenieur van de generaliteyt, in 10 jaren alleene te mogen maken, uytgeven ende vercopen, seker instrument bij hem geinventeert, dat hij noemt „astrolabium annulare”.

17) Een gegraveerde titel, „*Joannes à Doetecum Fecit*”, stelt een gebeeldhouwde kast voor tusschen twee stuurlieden; daaronder eene zee met schip, dolfijn en visch, rondom zeevaartkundige instrumenten; daarboven eenige matrozen aan een kaapstander; hierboven nog een bord met de woorden

Teerste Deel vande

Verder op de kast het overige van den titel.

Spieghel der Zeevaerdt, vande nauigatie || *der Westersche Zee, Innehoudende alle de Custē* || *vā Vranckrijk, Spaignien eñ t'principaelste* ||

deel van Engelandt, in|| diuersche Zee Cäertē || begrepē, met den gebruijcke van dien, nu met || grooter naersticheijt bij eē vergadert eñ ghe- || practizeert, Door Lucas Jansz Waghenaer || Piloot ofte Stuijrman Residerende Inde || vermaerde Zeestadt Enchuijsen. || Cum Priuilegio ad decennium. || Reg. 1.5.8.3. *Ma. tis. || et Cancellarie Brabantie.*

Onder dezen gegraveerden titel is gedrukt

Ghedruct tot Leyden/ by Christoffel Plantijn/ || voor Lucas Janssz/ Waghenaer van Enckhuysen. || Anno M.D.LXXXIIII. in folio.

A, 8 bladz. (zonder pagineering); bevat in verso van den titel „SONET" van I. DOVZA., Opdracht van Waghenaer aan Prins Willem I (3 bladz.) gedateerd „Wt Enckhuysen den lesten || dach van October. Anno 1583," een „Ode" geteekend „Hout en wint" (1 bladz.). „Aen de Oude ende Nieuvve Compaignie van t'by nae || veruallen Comptoir van Asseurantie binnen der stadt || HOORN. || Op desen Spieghel der Zeevaert. || ODE." van J. WALRAVEN (1 bladz.). „Sommarisch begrijp ende inhout deses || Chaerte Boecks/ ende d'ordre daer inne ghevolcht" (1 bladz.).

B—D, bladz. 5—40. Dan 23 dubbele kaarten van Holland, Frankrijk, Spanje en Engeland: op de eerste reeks komt de beschrijving.

Op deze kaarten komt soms zijn naam aldus voor (op kaart 4, 15) „*Lucas aurigarius Enchu- || sianus Inuentor. || Joannes a Doetinchū fecit.*"

Daarop volgt de vertaling van eenige plaatsen in „François, Spaensch en Engelsch." (1 bladz.). Dan de titel.

„Tafele der Declinatien der Sonnen/ || nae die oude maniere ende int Boeck van Peeter || de Medina uytghegaen" (1 bladz.).

Vervolgens een dubbel previlegie, van „Die Coninclijke Maiesteyt..." ...Ghegheuen in onse Stadt van Antvverpen den tvvintichsten De- || cember 1579. Gheteeckent *J. van Asseliers.*" en van „Die Staten van Hollandt ende ghecommitteerde vande Staten van Zeelandt... ...Ghedaen inden Hage... den 7. Mey, anno 1580." (1 bladz.). Daarop volgen de tafels der declinatie (2 bladz.), een „Totten Leser" (1 blz.) en tot „Aenden Boeckbinder" (1 bladz.).

[18]) Deze titel is mede een gegraveerde, doch nu versierd met zes vrouwenbeelden.

„Het tweede deel || Vanden Spieghel || der Zeevaert: inhoudende de ghe- || heele Noordtsche ende Oostersche || Schipvaert/ beghinnende vande || hoofden oft Voorlant van Enghe- || lant/ tot Wyburch ende der Nerue || in verscheyden Caerten begrepen: || Midtsgaders t'gebruyck van dien. || Met grooter neerstichеyt nu eerst by een || vergadert/ ende beschreuen door Luy- || cas Janssz./ Waghenaer/ Stierman/ || woonende inde vermaerde Caopstadt || van Enckhuysen. || *Cum Priuilegio Regiae Maiestatis, || & Caneellariae Brabantiae.* || Ghe-

druct tot Leyden, by Christoffel Plantijn, || voor Lucas Jansz Waghenaer van Enckhuysen. || ANNO. M.D.LXXXV. in folio."

A, 4 bladz. (zonder paginatuur) bevat in verso van den titel „Sommarisch begrijp ende inhout || deses tweede deel des Caertboecks." Dan opdracht aan „de Staten t'slants van Hollandt, ende VVest-Vrieslant." gedateerd „tot Enck- || huysen desen xvij. Julius. Anno M.D.LXXXV."

B—C, bladz. 1—19, tekst (ontbreekt in de exemplaren, die ik hier beschreef).

j—xxj, 21 dubbele kaarten.

19) Dezelfde gegraveerde titel als bij het boek van Noot 17). In het vak boven den kaapstander staat: „*Teerste Deel vande.*" Op de kast zelve het volgende.

PARS PRIMA || *Speculum nauticum super nauigatione maris Oc-* || *cidentalis confectum, continens omnes oras mari-* || *timas Galliae, Hispaniae & praecipuarum partiū* || *Angliae, in diuersis mappis maritimis comprehensū* || *vna cum vsu & interpretatione earundem, accurata* || *diligentia concinnatū, & elaboratū per Lucam Johannis* || *Aurigarium.* || *Spiegel der Zeevaerdt, vande nauigatie der Westersche* || *zee Innehoudende alle de Custen van Franckrijck, Spaig-* || *nen, ēn t'principaelste deel van Engelandt, in diuersche* || *zee caerten begrepen, met den gebruijcke van dien,* || *nu met grooter naersticheijt bij een vergadert,* || *ēn gepractizeert Door Lucas Jansz Wagenaer.* || *Cum Priuilegio ad decennium. Reg. Ma. tis.* || *et Cancellarie Brabantie.* || 1.5.8.3. in folio.

Hetzelfde voorwerk als in het werk van Noot 17), behalve dat B—D hier gepagineerd is van 1 tot 36, en met andere letters is gedrukt.

Dan volgens het „Sommarisch begrijp ende inhout", kaart 1—23, en daarachter de twee niet genommerde kaarten

„*Beschrijvinghe van de vermaerde Ca-* || *nael ofte foert van Bristow.*"

„*Custe van Noorweghen.*"

20) Pars prima. Speculum nauticum super navigatione maris Occidentalis... ...Pars altera speculi marini cum Borealis tum Orientalis navigationis... ...auctore Luca Jansonio Aurigerio... interprete Martino Everarto Brugensi... Lugduni Batavorum, Franc. Raphelengius. 1586. in folio.

Latijnsche tekst met 45 kaarten.

21)* ESSAI || D'UNE || BIBLIOGRAPHIE || NEERLANDO-RUSSE. || CATALOGUE || D'UNE COLLECTION REMARQUABLE || DE || LIVRES, ATLAS, CARTES, || PORTRAITS, PLANCHES, MANUSCRITS, || HOLLANDAIS, || ET DE PLUSIEURS LIVRES ÉTRANGERS, || TOUS CONCERNANT || LA RUSSIE ET LA POLOGNE. || AVEC DES NOTICES BIBLIOGRAPHIQUES ET HISTORIQUES SUR LES ÉCRITS DE || AITZEMA, BLAEU,

MASSA, WAGHENAER, WITSEN, ETC. || PLUSIEURS SUR LES PORTRAITS ET PLANCHES HISTORIQUES, || ET UNE TABLE SYSTÉMATIQUE. || Le tout recueilli, décrit, et offert aux prix marqués par F. MULLER. || Amsterdam || FREDERIK MULLER. || 1r *Octobre* 1859. in 4°.

8 bladz. zonder pagineering.

1—22, bladz. 1—177.

22) Een gegraveerde titel gelijk aan die in de reeds beschreven uitgaven, met het onderscheid, dat de kaapstander vervangen is door eene globe met vier matrozen en twee jongens. Daarboven staat „Der erst Theil" en op de kast zelve

„Desz Spiegels der Seefart/ von || Nauigation des Occidentischen Meers/ || oder der Westseen: In welchem alle Meer Vffer || oder Cüsten von Franckreich/ Hispanien/ Engel- || land/ etc. in viel See Carten (sampt ordentlich practi- || siertem gebrauch derselben) mit grossem fleisz zusam- || men getragen. Durch den Kunstreichen/ Hocher- || fahrnen/ vnd Weitberühmbten Piloten vnd Schiffs- || Steurman: Lucam Johannem Wagener von || Enckhüsen. || Cum Priuilegio ad decen- || nium Reg. Ma.tis & Can- || cellarie Brabantie. || Ausz Niederlandischer in Hochteudtscher sprach getrewlich vbersetzt: Vnd allen hohen vnd niedrigen Standes Personen zum || besten/ mit hinbeygefügter (zu iederer Cärten) Chronographey/ oder (in Summarischem begreiff) || kürtzlich verfasten beschreibung: der gelegenheyt desselben Landes vermehret. || Durch Richart Slotboem. Dauentriensem. || Getruckt zu Ambsterdam durch Cornelium Claeszsohn Buchhandlern doselbst. || Wonhafftig zum Schreibbuch/ an der altten Brucken auf dem Wasser. || M.D.LXXXIX. in folio.

A. acht bladzijden (zonder paginatuur). In verso van den titel een gedicht van den vertaler: „Der Schiffman spricht vom || Spiegel der Seefart." De opdracht aan „Ulrichen Hertzogen zu Meckelnburg" van Richart Slotboem Dauentriensis (2 bladz.) gedateerd „Datum || Ambsterdam am 23. tag des Maymanats/ Anno Christi 1589." Dan „Lucas Wagener zum Leser" (2 bladz.) gedateerd „Gegeben zu Enckhüsen/ Anno 1586. am 25. tag Martij." Vervolgens „Summarisch begreiff oder inhalt des er- || sten vnd andern theils dieses Cartbuchs" (1 bladz.) en „Register der Chronograpfey vnd Land- || beschreibung Richardi Slotboem" (1 bladz.). Deze komt telkens voor op de vierde, tot op deze uitgave wit gebleven, bladzijde van iedere kaart; zij bevat eene korte staatkundige aardbeschrijving.

B—D, bladz. 1—36 tekst.

Kaarten N°. 1 tot 19, XIX, 20—22.

Dan een titel, gelijk aan den voorgaanden alleen met de woorden „Der ander Theil" enz.

„Desz Spiegels der Seefart von || der Nördschen das ist Mittnachtigen/ vnd || Orientischen Schiffart: Nemlich von den Hoeff- || den oder den Vörläde

von Engelland abe bisz gehn || Wyburgh vnd der statt Nerna. In viel Seecarten || (samt ordentlich practisiertem gebrauch dorselbi- || gen)," enz.

Daarop een opdracht aan de „Fürsten vnd Herren/ Herrn Johan Fridrichen/ vnd Herrn || Ernest Ludwigen Hertzogē zu Stättijn"/ Pomern enz. (2 bladz.), gedateerd „Datum || Ambsterdam/ am 28. tag des Monats Junij/ Anno Christi. M.D.LXXXIX."

Dan kaarten N°. 23—46.

Eene lijst van vreemde namen (1 bladz.). „Zum Leser" (1 blz.). Declinatietafels naar den ouden stijl (3 bladz.), „Der Autor zum Leser", opwekking tot mededeeling van aanmerkingen; „An den Büchbinder" (1 blz.).

23) ADRIANI METII || *Alcmar. Prof. Mathes. in Acad. Frisiorum* || DE || GENVINO VSV VTRIVSQVE || GLOBI || TRACTATVS, || Adjecta est nova Sciatericorum & artis Navigandi ratio || novis Instrumentis, & inventionibus illustrata. || Vignette: eene zinnebeeldige voorstelling, waarvan de hoofdpersoon een keten aan den voet draagt, waarop de waterstraal eener fontein nederkomt: rondom staan de woorden „DVRVM PATIENTIA VINCIT." || FRANEKERAE || *Excudebat Vldricus Balck, Ordinum Frisiae Typographus.* || Sumptibus Joannis Jansonii, Bibliopolae Amstelodamens. Anno 1624. in 4°.

XVI bladz. bevatten titel, opdracht „ORD. FRISIAE DEPVT" (2 blz.) gedateerd „5 *Kal. Febr.* 1624", brief aan D. FABIANUS CZEMA (3 blz.) gedateerd. „Ex Acad. Fris. Kal. Febr. CIϽIϽIXXIV." Een vers van H. Bouricius (1 blz.) en een vers met Noot van PIERIUS WINSEMIUS (8 bladz.).

Dan

A—Dd, blz. 1—210 het werk onder het hoofd INSTITVTIONES ASTRONOMICAE. Libri I—IV.

24)* Institutiones Astronomicae & Geographicae, || Fondamentale ende gron- || delijcke onderwysinge van de Sterre- || konst/ ende beschryvinghe der Aerden/ door || het ghebruyck van de Hemelsche ende || Aerdtsche Globen. || Item hoemen op alderleye vlacke superfitien, de principale || Circulen des Hemels beschryven ende verscheyden || Sonnewysers bereyden sal. || Mitsgaders een korte ende klare onderrechtinghe van de || noodelijcke konst der Zeevaert: Inhoudende nieuwe ghe- || practiseerde instrumenten/ konstighe practijcken || ende regulen daer toe dienende. || *Alles niet min dienstigh voor Schippers ende Stuerluyden, als* || *vermakelijck voor alle liefhebbers der selver konste.* || Beschreven door D. Adrianum Metium Alcmariensem, Mathe- || seos Professorem in de Universiteyt van Vrieslandt. || Vignette: eene sphaera armillaria. || Ghedruct tot Franeker, by Thomas Lamberts Salwarda. || Voor Willem

Jansz. tot Amsterdam in de Sonnewyser. 1614. || Met privilegie voor ses jaren. in 4°.

X bladz. bevatten titel en in verso „Extract uyt de Privilegie," de opdracht (4 bladz.) gedateerd „*Actum Franeker; den* $\frac{2}{12}$ *April*, 1614." Twee verzen van *J. Jurians Brouvver* (3 blz.) *Olivier* (1 blz.).

A—Ee, blz. 1—150, daarop bij drukfout 251—323. Het werk zelf in vier Boeken.

Op bladz. 323 komt eene vignette voor, een weegschaal met de twee globen: bij de hemelglobe, die de weegschaal doet doorslaan, staat „PRAESTAT."

25) Van dit werk is een verbeterde, dichter in een gedrukte, herdruk van 1621, houdende, behalve hetzelfde voorwerk, A—Aa, blz. 1—185.

26)* Nieuwe Geographische || ONDERVVYSINGHE, || VVaer in ghehandelt vvordt die be- || schrijvinghe ende afmetinghe des Aertsche || Globe, ende van zijn ghebruyck. || Mitsgaders een gronde- || lijcke onderwijsinghe vande principale puncten der Zee- || vaert: Inhoudende sonderlinghe nieuwe ghepracticeer- || de Instrumenten/ Constighe practijcken/ di- || versche noodtlijcke Regulen/ die alle || Pilooten ende Stuer-luyden || behooren te verstaen. || Beschreven door Adrianum Metium Alcmariensem || Professorem in de Academie van Vrieslandt. || Vignette: een schip omringd door zeemonsters, waarboven: „GODT BEWAERT IN NOOT. || Tot Franeker/ By || Thomas Lamberts Salvvarda. 1614. in 4°.

A—N, blz. 1—104.

O, 8 bladzijden (niet gepagineerd) eene „TABULA SINUUM, TANGENTIUM, SECANTIUM," voor elke 10 minuten in 5 decimalen, met eene „Korte instructie."

27) PRAXIS NOVA || GEOMETRICA || PER || VSVM CIRCINI || ET || *Regulae Proportionalis.* || Autore || ADRIANO METIO ALCMARIANO, || Mathaes. Professore ordinario. || Vignette: eene meetkundige figuur, met de inscriptie „*Prop.* 2 & 4 || *Lib.* 6. *Eucl.*" || FRANEKERAE, || Ex officinâ Vlderici Dominici Balck, Ordinum || Frisiae & eorundem Academiae Typographi. || Expensis Johannis Jansonii, Bibliopol. Amstelrodami. || M.DC.XXIII. in 4°.

VIII bladz. bevatten: titel en in verso „CARMEN" van PIERII WINSEMII, Opdracht „ORD. FRIS. DEPVTATIS: || ET || ACADEMIAE CVRATORIBVS" (4 blz.), brief aan „D. LAVRENTIO REAEL" (2 bladz.) waarin de figuur op den titel wordt aangehaald.

A—F, blz. 1—47 het werk zelf.

28)* ADRIANI METI || M. D. & Matheseos Profess. Ordinarii. || Maet-constigh Liniael/ || ofte || PROPORTIONALEN RY || ende || PLATTEN PASSER. || Als mede || De Sterckten-Bouwinghe/ || ofte || FORTIFICATIE. || Onlanghs uyt het Latijn in onsen Nederlandtschen || sprake overgheset/ || Door PETRVM BAARDT, M. D. & Ma || theseos Studiosium. || By den Autheur vele vermeerdert/ gelijck de volgende Pagina aenwijst. || Vignette || Ghedruckt tot Franeker. || By Ulderick Balck/ Boeckdrucker Ordi- || naris der E. E. Heeren Staten van Vrieslandt. 1626. || Men vintse te koop tot LEYDEN, || By Bonaventura ende Abraham Elzevier. Met plaat. in 4°.

XII blz. bevat titel en in verso „Inhoudt deses Boecks," zestien afdeelingen; opdracht aan „ERNEST CASIMIR || Grave toe Nassau &c. || Stadthouder van Vrieslandt enz." door Petrus Baardt M. D. (4 blz.). Dan diens „Naeghebootste *Vranie*" (2 blz.); De vier Specien van ARITHMETICA; ghe- || lijckmen die selve inde practijck van GEOMETRIA || ghewoonlijck is te ghebruycken" (4 blz.).

A—M, blz. 1—58, 55, 58, 61, 58, 59, 64, 65, 62—95, blz. 96 in blanco.

29)* FORTIFICATIE || Ofte || Sterckten-Bouwinghe || ADRIANI METII Matheseos Pro- || fessoris Ordin. tot Franeker. || Waer in gheleert wert/ hoemen op de nu || ter tijdt ghewoonlijcke manier/ alle Schanssen, For- || tressen, Steden/ etc. sal afbeelden/ afsteecken ende || vast maken. || Vignette: meetkundige figuur, een regelmatige vijf en tienhoek, met omgeschreven cirkel. || *Tot Franeker.* || Ghedruckt by Ulderick Balck/ Boeck- || drucker Ordinaris der H. H. Staten van Vrieslandt. Anno 1626.

A—E, blz. 3—39.

30) Eeuwighe || Handt-Calendier || In het welcke gheleert wordt/ eeuwich- || lijck/ alle de Feest-daghen/ des Jaers soo be- || weechlijck als onbeweechlijck/ midtsgaders de || Lunatien ende water-ghetijden/ op een nieuwe || manier/ door de leeden der vingeren des handts || te reeckenen/ ende te tellen. || Door || ADRIANUM METIUM M. D. & Ma- || thes. Prof. Ordinar. || Vignette: eene uitgestoken hand met ten deele digtgeknepen vingers, zie de laatste bladzijde van vel C. || Tot Amsterdam/ By Jan Jansz. Boeckvercooper op 't Water in- || de Pas-Caert. Anno 1627 in .

VIII blz. bevatten titel, opdracht aan de Curatoren van Franeker (5 blz.).

A—D, 64 bladz. (niet gepagineerd).

31)* Fundamentale onder- || wysinghe/ || *Aengaende* || De Fabrica, ende het veelvoudigh ghebruyck || van het Astrolobium, || Soo *Catholicum,* als *particulier.* || Beschreven || Door Adrianum Metium M. D. eñ Professorem in de || Mathematische consten binnen Franeker. || Vignette: eene meetkundige figuur, zie bladz. 4. || Voor Hendrick Louwerens Boeckvercooper

tot Amsterdam.||Tot Franeker,||Ghedruckt by Vlderick Balck, geordineerde Boeck-||drucker der E. H. H. Staten van Vrieslandt.||Anno 1627. klein 4°.

VIII bladz. bevatten titel, opdracht aan „de Heeren BEWINTHEBBEREN||der Vereenighde ende gheoctroyeerde Oost-Indi-||sche Compaignie deser Nederlanden," gedateerd „Ghegheven tot||Franeker den 5. Julij 1627" (4 blz.). Een „Tot den goetwillighen Leser". Een naamvers van „PIERIUS WINSEMIUS||Frisiae Historiographia", waar van de veertien eerste regels beginnen met de letters ADRIANVS METIVS.

A—Aa, blz. 1—190, het werk in „eerste tot vijfste deel." Aan het einde staat „Eynde deses eersten Tractaets."

Daarop volgt de titel.

Het tweede Tractaet/||Van de||Proprieteyten, eygenschappen/ Solutie en̄||ontsluytinghe der Sphaerische Triangulen.||*Midtsgaders*||Een figuerlijcke aenwysinghe, hoe door de selve alle||Astronomische en̄ Geographische quaestien ofte Vraeg-||stucken solveert worden/ alles in drie deelen ver-||vatet.||Door Dn. Adrianum Metium M.D. ende Profess. ordin.||Vignette: een sphaera armillaria.||Tot Franeker/||Ghedruckt by Vlderick Balck, geordineerde Boeck-||drucker der E. H. H. Staten aan Frieslandt. Anno 1627.

In verso van den titel „Psal. 19. vers. 1."

Aa—Xx, blz. 1—168, in drie deelen.

Daarna de titel.

Het derde Tractaet'||Van't||Opmaken ende het ghebruyck des par-||ticulieren *Astrolabiums.*||Door||Dr. Adrianum Metium M. Doct. ende Profess. ordin.||Vignette: eene zonnewijzer||Tot Franeker,||Ghedruckt by Vlderick Balck, geordineerde Boeck-||drucker der E. H. H. Staten van Vrieslandt.||Anno 1627.

Bb—Ddd, blz. 3—48.

32)* Als verzameltitel voor het werk een gegraveerde titel. Te midden van zeven symbolische figuren een steenen tafel, waarop ADRIANI METII ALCMAR. D. M.||*et*||Matheseos profess. ordin.||PRIMVM MOBILE||ASTRONOMICÈ, SCIOGRAPHICÈ,||GEOMETRICÈ *et* HYDROGRAPHICÈ||*nova Methodo Explicatum*||IN||I. Sphaera.||II. Planisphaerio.||III. Triang. Sphaericis.||IV. *Tab.* Astronomicis||Loxodromicis.||V. Lineamentis Geo-||metricis||Opus absolutum, IV. Tomis distinctum.||Een fraai portret van den schrijver, waarom een lauwerkrans,||*Cum Privilegio.*||Amstelodami,||*Apud Joannem Janszonium.*||Anno 1631. in 4°.

Daarop eene opdracht „*Illustribus & Praepotentibus*||Frisiae inter Flevum & Lavicam||ORDINIBVS" gedateerd „Nonis Martii CIↃ.IↃC.XXXI." (6 bladz.): Dan verzen van H. BOVRICIVS, JC. ac Senat. Fris (1 blz.) van JACOBVS *à* TEYLINGEN J.V.D. *apud Alcmar. vir consularis* (1 blz.) van PIERII WINSEMII JCti. (9 blz.) van M. WINSEMIUS D. & Med.

Prof. ordin. (1 blz) van GEORGIUS PASOR G.L. Professor (2 bladz.). Daarop de „Synopsis” der vier deelen (3 bladz.).

A—Ff, blz. 1—232. Doctrinae Sphaericae Libri I—IV.

Dan titel.

Doctrinae Sphericae, || LIBER V. || GEOGRAPHICVS. || DISTINCTIONEM MENSVRAM || & usum globi terrestris continens. || PER || ADRIANVM METIVM S.S. *Med. Doct. & Matheseo* (sic) || *Professorem in Acad. Franeq.* || Vignette: eene sphaera armillaria. || FRANEKERAE. || Apud VLDERICVM BALCK, Ordinum Frisiae & eorun- || dem Academiae Typographum. || Anno 1630.

Gg—Zz, blz. 235—352, 153—166 (moet zijn 353—366).

Dan nog een vers van D. DAVID HERLICUS, || *Physicus Ordinarius Lubecensium, & P. L.* (2 blz.).

Het tweede deel heeft tot titel

EXERCITATIONIS || ASTRONOMICAE || Tomus Secundus || ASTROLABIVM, || Hoc est, || *Astrolabii utriusque accurata descriptio, eorundumque fabricam, &* || *usum in Astronomia et Geographia multiplicem complectens, et* || *Triangulis Sphaericis* (*modo hactenus incognito*) *demonstrans.* || Opus Mathematicum Studiosis apprimè utile & ne- || cessarium, continetque partes sex. || *Autore* ADRIANO METIO. SS. *Med. Doct. & in inclyta Frisio-* || *rum Acad. Matheseos Professore ordinario.* || Vignette: eene meetkundige figuur, zie bladz. 7. || FRANECARAE, || Excudebat VLDERICVS BALCK, Ord. Fris. Typographus.

Dan een „Ad Lectorem” (2 blz.).

A—Mm, blz. 3—271, waarvan blz. 181—271 bevat

Canon Triangulorum || SIVE || TABVLAE || SINVVM || TANGENTIVM || ET || SECANTIVM. || „*Ad partes Radii* 100000. *et ad scrupula prima Quadrantis*,” dus voor elke minuut met 5 decimalen.

Het derde deel heeft tot titel

EXERCITATIONIS || ASTRONOMICAE || TOMVS TERTIVS, || SIVE || Historia Astronomica, || QVAE || Duobus modis historiam de astrorum situbus explicat; || 1. *In Triangulis sphaericis per Astrolabium & per canonem Trian-* || *gulorum.* || 2; *In Tabulis Astronomicis.* || Vignette: een meetkundige figuur, (zie bladz. 100 van het tweede deel). || FRANEKERAE || Excudebat Vldericus Balck, Illustr Fris. Ord. & eorun- || dem Academiae Typographus. Anno 1630.

A—Ii, blz. 3—256.

Het vierde deel heeft tot titel

INSTITVTIONIS || ASTRONOMICAE || TOMVS QUARTVS. || IN QUO || *Primi mobilis problemata Geometrice delineantur &* || *Arithmeticè resolvuntur.* || ATQUE || TABVLAE GEOGRAPHICAE ET HYDRO- || graphicae describuntur, & per easdem, tumque per Canones ex || Secantibus conflatos ars Navigandi absolvitur. || Vignette: eene meetkundige figuur, zie bladz. 23. ||

FRANEQVERAE.|| Apud Vldericum Balck, Ordinum Frisiae,|| & eorundem Academiae Typographum.|| Anno 1631.

A—V, blz. 1—146, en dan 14 blz. (zonder pagineering) met den titel

Canon Parallelorum ex singulorum minu-|| torum Secantium additione conflatus,|| per quem canon Rumborum construi-|| tur atque axiomata artis navigandi gene-|| raliter absolvuntur.

[33])* Astronomische ende Geographische || ONDERVVYSINGHE. || Inde welcke || Door t' gebruyck des Aertschen Globi, ofte || gebulte Caerten/ midtsgaders t'Astrolabium Catho- || licum, ende platte Pas-Caerten de const der Zeevaert verlicht/ ende || de Schippers ende Stuerluyden duydelijck ende cortelijck in haere || voyagie onderricht worden. || *Beneffens* || Twee nieuwe tafelen ROMBORUM, || Wt de welcke veerdich ende met seer geringe moeyte de Zeylagien naer de rondicheyt van de Globe/ sonder eenighe merc- || kelijcke faulte/ worden afgereeckent. || DOOR || Adrianum Metium. Alcm. Med. Doct. & Mathe- || seos Prof. ord. binnen Franeker, || vignette: eene meetkundige figuur: (zie bladz. 188). || Tot Amsterdam, || By Hendrick Lauwerensz. Boeckvercooper op 't Water/ || in 't Schrijf-boeck./ Anno 1632. in 4⁰.

XX bladz., bevatten titel, opdracht aan de regeering „des wijtberoemden Coopstadts || Amsterdam" (5 bladz.), gedateerd „In Franeker || den 1. November. 1632."

Daarop volgt „Extract uit de Privilegie" (1 blz.) en verzen van PETRUS BAARD, Medicus (2 bladz.) van J. JURIANS, Brouwer (2 bladz.) met eenige „fauten". Dan „Index" (7 bladz.) met „Fauten" (2 bladz.).

A—I, blz. 1—72.

Daarop de titel

Het tweede deel/ Waer in ghehandelt wordt t'gebruyck || van het || Astrolabium Catholicum, || AENGAENDE || De puncten die ghedienstigh zijn tot de Zeevaert/ ende || alle Stuyrluyden nootwendich behooren || te weten. || Vignette: meetkundige figuur (als op den titel van het werk in Noot 31). || Tot Francker, || Ghedruckt by Vlderick Balck, boeckdrucker || ordinaris van Frieslandt. || Anno 1632.

K—P, blz. 75—116.

Dan de titel

Het derde Deel. || Clare ende grondelijcke || onderwijsinghe der princepaler pun- || cten des Zeevaerts. || Aengaende eenighe Instrumenten, die om in Zee || te gebruycken, de bequaemste zijn. || Vignette: een zonnewijzer, zie bladz. 143, || Tot Franeker enz. als boven.

R—V, blz. 119—158.

Dan de titel

Het vierde Deel. || Van tweederley Cijffer- || tafelen/ genaemt || TABVLAE

Romborvm. || Wt welck men met seer geringe arbeyt al- || leen door Additie ende Subtractie in de eerste tafel; || Maer in de tweede/ door een simpele multiplicatie/ seer perfect ende || sonder merckelijcke faute alle afmetinge der Zeylagien naer de ron- || dicheyt van de globe konnen afmeten. || Vignette: dezelfde meetkundige figuur als voor het tweede deel. || Tot Francker, || Gedruckt by Vlderik Balck, boeckdrucker || ordinaris van Frieslandt. || Anno 1632.

Op de verso van dezen titel een „Nota" en daarop

X—Ff, 76 bladz. (zonder pagineering). „De eerste Tafel || Romborvm" in vier deelen en „De tweede Tafel || Romborvm" in *twee Deelen.*

Gg—Ii, blz. 161—175 en 3 bladz. ongepagineerd. Daarop de titel

Het vijfste Deel, || Van de || Onvolmaecktheyt en het || onseker gebruyck der Zeevaert/ || Ende || Hoemen bequaemlijck remedieren sal, als bevon- || den werdt/ door de geobserveerde polus hoochte/ dat in de || bekende gissinge der beseylder mijlen/ ofte in sijn vertroude course || door het wraken van het Schip ofte andersins ghevalieert en || misgeslagen is. || Vignette: eene meetkundige figuur, zie bladz. 188. || Tot Francker, Ghedruckt by Vlderick Balck, Boeckdrucker || Ordinaris van Frieslandt. || Anno 1632.

Ii—Oo, blz. 177—223.

34) Mensvra || geographica, || et || Vsvs globi terrestris, || *Artisque Navigandi Institutio, novis Instrumentis & || Inventionibus adaucta* || per || adrianvm metivm Alcmarianum. || Vignette: dezelfde als op het boek van Noot 23. || Franecarae || *Excudebat Vldericus Balck, Ordinum Frisiae Typographus.* in 4°. zonder jaartal.

a—l, blz. 1—84, het werk met het hoofd „Institvtio || geographica || *Mensuram & usum Globi Terrestris continens* || pars altera."

Hieruit zoude volgen, dat het een tweede deel van het voorgaande werk is. Een jaartal ontbreekt geheel, waardoor dit vermoeden wel bevestigd wordt.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

XIII. Handschrift van Franciscus van Schooten.

1. Onder de talrijke, prachtige en belangrijke feestgaven, die de Leidsche Hoogeschool ter gelegenheid van haar driehonderdjarig bestaan, den 8sten Februarij 1875, ontving, behoort een folioband met den rugtitel

MATHEMATI-(sche)
WERCKEN DOO(r)
F. VAN SCHOOT(en).

Dit is een geschenk van ons medelid J. G. DE HOOP SCHEFFER; het is merkwaardig voor de geschiedenis der wetenschappen van dien tijd, omstreeks 1620. De gever houdt het doorloopende schrift, waarmede ook een nader te vermelden tusschen-titel voorkomt, voor eigenhandig: het keurige schoonschrift op de 52 eerste bladzijden voor dat van een onder VAN SCHOOTEN's leerlingen. Zijne meening, als zoude het eerste schrift gemakkelijk als zijn eigen hand kunnen geconstateerd worden, door middel van het Album Civium Academicorum, is niet bevestigd, omdat onze VAN SCHOOTEN nimmer Rector Magnificus is geweest. Het is mij ook niet mogen gelukken, in de verzamelingen aan onze Bibliotheek een handschrift of brief van onzen VAN SCHOOTEN in handen te krijgen, ter vergelijking. Toch

ben ik het met den gever eens, dat dit werk waarschijnlijk grootendeels eigenhandig door VAN SCHOOTEN, den vader, is ter neder geschreven.

Verder deelt de gever nog mede, dat hij het boek in 1854 geërfd heeft van zijnen oom J. DE HOOP; deze in 1822 van zijne nicht MARIA KRUIJER; en deze laatste wederom van haren neef MATTHIJS VET. Laatstgenoemde was in 1744 geboren, en verzamelde eene bibliotheek, ook over wiskunde; uit deze bibliotheek was dit handschrift bewaard gebleven om de prentjes, die er in voorkomen. De genealogie van dit werk gaat dus eene eeuw terug, verder niet.

2. Wat vooreerst den schrijver aangaat, Mr. FRANCISCUS VAN SCHOOTEN, deze werd in 1581 te Leiden geboren, waar hij 11 December 1646 stierf. Na den dood van LUDOLF VAN CEULEN in 1610 (zie Bouwstoffen N°. VIII) nam hij diens hollandsche lessen in wiskunde waar, en werd in 1615 tot hoogleeraar alhier aangesteld; deze betrekking bekleedde hij tot zijn dood, en werd toen door FRANCISCUS VAN SCHOOTEN, zijn zoon en naamgenoot, opgevolgd. In het jaar 1627 gaf hij uit Tabulae Sinuum Tangentium Secantium in 8°. [1]), waarvan ik nog bezit een herdruk door J. J. STAMPIOEN van 1632 te Rotterdam [2]), van 1683 te Brussel [3]), alsmede eene fransche vertaling van dezen herdruk [4]), eindelijk een druk te Rouen van 1672 [5]). In den eersten druk zegt hij.

„Heb || daerom de selve voor eenighen || tijt tot mijn particulier gebruyck, || met groote moeyte uyt haer dif- || ferentien ghecorrigeert, alsoo dat || ick seecker houde gheen eenighe || faute daer in te zijn. Daerom, en || door begeerte van eenighe lief- || hebbers, heb niet connen naelaten, || de selve door den druck ghemeen || te maecken, in welcke mede zoo || nau en sorghvuldigh is ghelet, dat || daer door van der selver seecker- || heyt niet en is te twijfelen.”

Vandaar de, helaas niet onbetwiste, roem van nauwkeurigheid bij deze tafels.

Verder gaf hij uit „de 15 Boecken der Elementen van Euclidis,” waarvan ik slechts een tweede uitgave bezit door J(acob) v(an) L(eest) te Amsterdam in 1662 bezorgd [6]). Eindelijk nog „Roozenkrans te Dordrecht, 1623 in 4°.”

Hij was ook ingenieur in dienst van Hunne Hoogmogenden; en dat hij een goed teekenaar en graveur was, bewijst o. a. het door hem vervaardigde portret van RENATUS DES-CARTES, voorkomende in diens Principia Philosophiae te Amsterdam, 1660 in 4°. 7). Dit portret toch bevat als randschrift, rondom het ovaal,

„RENATVS DES-CARTES, DOMINVS DE PERRON, NATVS HAGAE TVRONVM, ANNO. M.D.XCVI. VLTIMO DIE MARTII." In de vier hoeken van het kader leest men *„Franciscus à" „Schooten Pr. Mat." „ad vivum delineavit" „et fecit. Anno* 1644." Daaronder een vers van „CONSTANTINI HVGENII FLY."

3. En thans hebben wij genoeg gegevens, om over te gaan tot de beschrijving van ons handschrift.

Het bevat 512 bladzijden, groot folio, waarvan de 301 eerste gepagineerd; bij de 153 eerste zijn de vier marges met roode lijnen afgesneden. De 52 eerste bladzijden zijn grootendeels met eene fraaie hand in het net geschreven; daartusschen komen enkele toevoegsels voor van dezelfde hand, met donkerder inkt, die men van af bladz. 54 ontmoet. Mede van diezelfde hand is, hetgeen men leest als titel op bladz. 285:

„Begonnen den 25en november || Anō 1622 door Frans van Schooten || proffessor der Fortificatien en || Dependerende scientien in̄ universiteyt || tot leyden."

Een enkele maal, bijv. op bladz. 111, vindt men een andere hand daartusschen; dit zijn denkelijk toevoegsels uit lateren tijd.

Uit dit alles mag men met den gever wel besluiten, dat het een handschrift is van FRANS VAN SCHOOTEN zelven.

Dit wordt nog bevestigd door de inrichting van het boek zelve Het is niet doorloopend volgeschreven, maar van tijd tot tijd komen er hoofden voor boven aan de bladzijden; daarop volgt dan de tekst, maar er blijven soms nog verscheidene bladzijden wit. Soms ook volgen op die hoofden nog eerst eenige bladzijden wit. Het schijnt daaruit te blijken, dat het boek eerst allengs is volgeschreven tot den tegenwoordigen toestand; ook is er niet een bepaalde volgorde te bespeuren tusschen de werkstukken, die onder een zelfde hoofd voorkomen. Men verkrijgt dus den indruk, dat het gediend heeft, als eene verzameling adversaria tot gebruik bij te geven lessen. Slaat men nu het

oog op den straks vermelden datum, 25 Nov. 1622, dan wijzen ook deze omstandigheden er op, dat het boek door F. VAN SCHOOTEN, bij zijne lessen werd gebruikt. En daarmede komen goed overeen de keurige prentjes, waarmede de figuren soms zijn geïllustreerd, zie bijv. 136—169; zij wijzen op een geoefend teekenaar, zooals VAN SCHOOTEN was. Voor ons hebben zij te meer waarde, omdat zij, naar de overlevering, het middel zijn geweest, om dit boek uit de vergetelheid te bewaren.

4. De inhoud van dit handschrift volge nu.

blz. 1. „Extractie Des quadraet wortel:"

Voorbeeld

			19				
	1	4	97	53			
2	20	21	88	65	12		
3	81	46	97	26	56	25	Quadraet
1	9	5	3	1	2	5	sijde
	23	89	00	66	22	4	
		33	99	00	00		
			33	9			

waarbij alle cijfers, behalve die van de „sijde" doorgestreept zijn.

blz. 4. „Extractie Des Cubiq wortel."

Voorbeeld

	14		
3	726	250	
30	517	578	125
3	1	2	5
	99	393	6

waar alle cijfers wederom zijn doorgestreept, behalve de zijde 3125.

31	312	3125
9	93	936
2791	936	18750
	2808	9375
	29016	28125
	2	2925000
	580328	5
		14625000
		125
		146250125

waarbij alle cijfers der uitkomsten zijn doorgestreept.

blz. 7. „Vande Tiende Getallen."

Hij gebruikt deze notatie „346,875(3)", om aan te duiden dat er drie decimalen zijn.

blz. 16. „Fondamenten van Geometrie." Difinitien [1—32] (Tusschen de bladz 16 en 17 is er een blad uitgesneden.)

blz. 23. „Gemene Bekentenissen" [Axiomata 1—16].

blz. 25. „Volgen de propositien" [1e Bouckx, Prop. 4—6, 13, 8, 15, 16, 18—21, 26, 27, 29, 32—35, 37, 41, 43, 47].

blz. 36. „2en Bouckx." Prop. 1, 3—6, 9, 10, 7.

blz. 44. „3en Bouckx." Prop. 3, 16, 20, 22, 31, 32, 35, 36.

blz. 47. „Des 6en Bouckx." Prop. 1—4, 8, 14, 16, 19. De bladzijden 53, 54 zijn wit.

blz. 55. „Van t'Gebruyck des passers en Liniaels ‖ Te Weeten, Hoemen door deselue alle geometrische Fygueren, ‖ linien en Houcken, maecken en vinden sal" Etc. ‖ (Bladz. 62—64 wit). De laatste werkstukken luiden: Hoemen Beschrijven sal een slanghtrek, een geometrische Rose.

blz. 70. „Transformatie van Fygueren, Te weeten Hoemen ‖ allerley Rechtlinische Fygueren veranderen sal in sodanige ‖ Form alsmen Begeert."

blz. 76. „Additie in Fygueren."

blz. 78. „Subtractie in Fygueren."

blz. 80. „Multiplicatie in Fygueren."

blz. 83. „Divisie in Fygueren." Het laatste werkstuk leert een cirkel, wiens inhoud 12 is, te verdeelen in drie cirkels, wier inhouden zijn 3, 4, 5.

blz. 92. „Practijck des Landmeetens ‖ Te weeten Hoemen alle Formen van Beganglicke ‖ landen met de Roede Meeten, Ende door getallen ‖ wtreeckenen sal."

De werkstukken op bladz. 108, 109, 110, zijn alleen geconstrueerd, niet berekend, zooals de vorige dit waren. Het werkstuk op blz. 111 is van de vroeger vermelde latere hand. Bladz. 112 is wit.

blz. 113. „Vant gebruyck der Tafelen Sinus Tangens ‖ en Secans, te weeten hoemen door deselue ‖ alle Onbeganglicke distantien, Hooghten ‖ en Diepten meeten sal."

Schrijver gebruikt hier vijf decimalen, maar geen decimaalteeken achter den index.

blz. 135. „Exempelen vant Meeten van ‖ allerley Hoochten En Diepten."

De werkstukken op bladz. 140, 141, 142, 148, 149, zijn

niet afgewerkt. Bladz. 171—173 zijn wit. Bij verschillende werkstukken is de constructie met andere inkt geschreven, dan de berekening, die dus later is bijgevoegd; doch altijd met dezelfde hand. Het is in deze afdeeling, dat de prentjes voorkomen.

blz. 173. „Meetinge van onbeganglicke landen, || Door 't gebruyck der tafelen, Sinus, Tangens, || Secans." Het werkstuk op bladz. 190 is niet afgemaakt.

blz. 191. „Meetinge van Circkels en Circkelstucken." Bovenaan staat een cirkel, met de twee grenzen van het getal π in 35 decimalen, op dezelfde wijze als de figuur op de titelplaat van LUDOLF VAN CEULEN's „vanden Cirkel. Delf 1596 in folio" (zie Bouwstoffen, N°. VIII).

blz. 198. „Deelingen van Allerley Formen van Landen." Bladz. 221, 222 wit.

blz. 223. „Metingen van Onbeganglicke landen sonder || t'gebruyck der Tafelen." Blz. 241, 242 wit.

blz. 243. „Meetingen van Allerley Formen van Corpora || Als van Aerde, Steen, Hout, Water, Iser, Etc." Hier verdeelt hij de maten als volgt:

Cubiq Roede, Este	Cubiq Duim
Schijfvoet ofte Schacht	Schijfgrein
Riemvoet	Riemgrein
Cubiq voet	Cubiq Grein
Schijfduim	
Riemduim	

waarbij ieder volgende maat het tiende deel der vorige is, „Na de ordre der Tiendegetallen", namelijk Grein, Duim, Voet

Bladz. 254, 256, 260, 262, 268, 270—278 zijn wit.

blz. 279. „Vant wijn Roeijen, of Meeten van allerley vaten grootte". Bladz. 282—284 wit.

blz. 285 bovenaan. „Begonnen den 25en nouember || Anō 1622 door Frans van Schooten || proffessor der Fortificatien En || Dependerende scientien in̄ Vniversiteyt tot leyden." Verder is deze bladzijde wit, even als 286.

blz. 287. „Diffinitien 1—42." Bladz. 293 wit, 294—297 constructien.

blz. 298. „Vant maecken der Regulare Fygueren met den || passer En liniael, opt papier."

blz. (304) zonder pagineering. "Manier Hoemen Opt veldt een Irregulaer || Bolwerck afsteecken sal." Bladz. (307)—(314), (322), (324), (326), (328), (336), (338), (340) wit. De overige bladzijden bevatten teekeningen van bolwerken, hetzij opgeteekend, hetzij in schets.

blz. (341). "Manier Hoemen een Irregulare plaets ofte oude stadt || welcke men Begeert te fortificeeren, Inden grondt sal leggen || Ofte een perfeckte Afteickeningh daervan maecken sal. || Mede te Bereeckenen hoe groot deselve sy."

Bladz. (342)—(352), (354), (356)—(358), (360), (362), (364), (366), (368), (370), (372), (374), (376), (378), (380), (382), (384), (386), (388), (390), (392)—(396), (398), (400), (402)—(404), (406), (408), (410), (412), (414), (416)—(418), (420)—(422), (424), (426), (428), (430), (432)—(434) wit; de overige bevatten teekeningen zonder tekst, hetzij in schets, hetzij meer of minder opgeteekend en gewasschen.

blz. 435. "Batterien" (met potlood) (436), (438), (440), (444), (452), (454), (458), (459), (462), (464), (466), (468), (470), (472), (474), (476), (478), (480)—(486), (493), (495), (497), (499), (500), (505), (506), (511), (512) wit. Bladz. (488)—(491), (501)—(504) en (507)—(510) bevatten tekst en berekeningen; de overige alleen teekeningen, of slechts in schets, of ook meer of minder opgeteekend en gewasschen. Bij bladz. (477) staat met potlood, maar altijd van dezelfde hand, "leger voor gulick."

5. Uit de voorgaande beschrijving volgt duidelijk genoeg, dat het werk, dat voor mij ligt, niet op eens, maar slechts van lieverlede ontstaan is; dat het niet alleen bestemd was voor opteekening ten eigen nutte, maar wel degelijk, om den inhoud ook aan anderen mede te deelen. Brengt men dit in verband met den reeds besproken datum, dan mag men zich gerechtigd houden tot het besluit, dat het voor des schrijvers lessen of collegien heeft gediend. En dat wij dus den welwillenden gever dank mogen heeten, dat hij dit bewijs van ijverige wetenschappelijke werkzaamheid van den hoogleeraar FRANS VAN SCHOOTEN aan de Leidsche Hoogeschool als feestgave heeft willen schenken.

6. Na zijn dood werd deze FRANCISCUS VAN SCHOOTEN op-

gevolgd door zijn zoon en naamgenoot FRANCISCUS VAN SCHOOTEN, die professor bleef tot aan zijnen dood 30 Mei 1660. Hij maakte zich vooral beroemd door de invoering niet alleen van de methode van DESCARTES in ons land: maar inzonderheid door zijne uitgaven van de wiskunde van DESCARTES. De eerste was zijne „Geometria à Renato des Cartes van 1649" in 4°. [8]) met de Noten van FLORIMOND DE BEAUNE, en zijne eigene Commentarii, benevens een Additamentum. De tweede druk van 1659, in twee deelen, 4°. [9]), bevatte echter veel meer; tusschen de Commentarius en het Additamentum voegde VAN SCHOOTEN in een Appendix de cubicarum aequationum resolutione; na het Additamentum komen nu twee brieven van den Burgemeester JOHANNES HUDDE en een van HENDRIK VAN HEURAET. En het tweede deel bevat „de Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes", de tweede druk, [de eerste druk was in het jaar 1651 afzonderlijk verschenen [10])], en daarvan twee Tractatus posthumi van FLORIMOND DE BEAUNE (die, zoo als ook uit de opdracht blijkt, 27 Sept. 1601 geboren, den 19den Augustus 1652 overleden was). Beide stukken zijn van de hand van ERASMUS BARTHOLINUS CASPARI fil.; de voorrede van het eerste is gedateerd „*Scribebam Leidae*, || *Anno* CIƆIƆCL. || *Calend. Jun.*", hij was toen student te Leiden; die van het tweede „*Hafniae, Anno* || CIƆIƆCLVII", toen hij Medicinae & Mathematum Professor Regius publicus in Academia Hafniensi was geworden.

Uit dezen tweeden druk zoude, wat den titel betreft, waarop de naam van FRANS VAN SCHOOTEN niet voorkomt; — en evenzeer wat de „LECTORI S." aangaat — schijnen te blijken, dat BARTHOLINUS de schrijver was. In die voorrede toch deelt BARTHOLINUS mede, dat hij dit werk naar de lessen van FR. VAN SCHOOTEN, met zijn goedkeuring, en na zijn onderzoek schreef; „*postquam ad hasce oras, Academiam Illustrem,* || *quae Leidae est, accessi, Vir Celeberrimus atque Doctissimus* || *Franciscus à Schooten, Matheseos ibidem Professor publicus,* || *me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximiâ fide* || *docuit... non modò veniam (de elementis hisce evulgandis) hujus zeli impetravi, sed & eam* || *humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud grava-* || *tus fuerit, lucemque ingenii & consilii sui porrigere*". Maar op de beide

Catalogi, voor de beide deelen gedrukt, staat er: "FRANCISCI A SCHOOTEN, Principia Matheseos Universalis" en op de laatste bladz. 48 staat aan het hoofd: FRANCISCUS À SCHOOTEN || AD LECTOREM, en daarin geeft deze de "menda" van dit werk zelf, en tevens die van zijne "Exercitationes" van het jaar 1657; alsof het werk hemzelven toekwam. Wendt men zich echter tot de eerste uitgaaf [zie Noot (10)], dan vindt men daar "Francisci à Schooten Principia — edita ab Er. Bartholino, Casp. Fil."; overigens bijna hetzelfde voorwerk en dezelfde tekst, als bij de "Editio secunda". Men mag het er dus voor houden, dat de "Principia" het werk zijn van FRANS VAN SCHOOTEN, maar dat zij door ERASMUS BARTHOLINUS zijn "edita of conscripta", bijv. naar de lessen of het dicteeren van VAN SCHOOTEN zijn opgeteekend.

Daarop volgen in de verzameling de Elementa curvarum linearum van JOHANNES DE WITT, 2 Libri; en eindelijk een Tractatus posthumus van FRANS VAN SCHOOTEN De Concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo Algebraico; hetwelk door zijn broeder PETRUS VAN SCHOOTEN in het licht werd gegeven.

Behalve dezen arbeid gaf hij uit in 1657 zijne "Exercitationum Mathematicarum, Libri V" [11]: welk boek ook in het nederlandsch in het jaar 1659 verscheen "Mathematische Oefeningen, in V Boucken" [12], waarvan er eene nieuwe titeluitgaaf in 1660 uitkwam [13]. Van deze vijf boeken zijn de voorredens in het latijn (en ook in het hollandsch) gedateerd, van het eerste, 12 Sept. 1656, van het tweede, 15 December 1656, van het derde, 1 Januari 1657; die van het vijfde draagt geen datum; die van het vierde is gedateerd 1 Nov. 1646. Van dit laatste boek bestaat er dan ook een vroeger afzonderlijke uitgaaf "De organica Conicarum Sectionum in plano descriptione Tractatus." Lugd. Bat. 1646 in 4°. [14]).

7. De zoo straks genoemde broeder PETRUS VAN SCHOOTEN was geboren 22 Febr. 1634, was reeds een jaar lang lector in de wiskunde, toen hij zijne broeder FRANS opvolgde in 1661: in 1669 verkreeg hij verlof, om ook in het latijn te onderwijzen; hij bleef professor tot aan zijn dood, 30 September 1679. Het is mij niet bekend, dat hij iets heeft uitgegeven, dan het bovengenoemd werk van zijn broeder FRANS.

Deze drie VAN SCHOOTENS, de vader zoowel als de beide zoons, waren geplaatst aan de Ingenieurschool, opgericht in het jaar 1600 (zie Bouwstoffen N°. VIII), en waaraan LUDOLF VAN CEULEN de eerste hoogleeraar was; te zamen onderwezen zij dus aan die school zeventig jaren.

Maart 1875.

NASCHRIFT.

8. Hoezeer door mij geene moeite was gespaard, om eene gelegenheid te zoeken tot het identifieeren van het handschrift van FRANCISCUS VAN SCHOOTEN den vader, in het behandelde MSS, mogt mij dit niet gelukken; tot ik onlangs van mijnen ambtgenoot Prof ENSCHEDÉ te Groningen vernam, dat aan de bibliotheek zijner Akademie, eene reeks MSS. van de familie VAN SCHOOTEN voorhanden waren, waarvan hier de opgaaf moge volgen.

I. Een MSS. van F. A SCHOOTEN, gedat. 5 Dec. 1632, bevattende:

Demonstratio Constructionis quatuor Ovalium.

Oplossing der Cubische Aequatien door de Parabel en Hyperbola.

Problemata uit de Lessen van Prof. Golius en Otterlo.

Aanmerkingen op de beschrijving der Parabola en Hyperbola, volgens Descartes.

Aanmerkingen over verscheidene Problemata van Apollonius, Archimedes, &c.

Clavis Mathematica.

Specimen Arithmeticum et Algebraicum.

De grootste gemeene maat.

Van de gebrokene getallen.

De Genesi et Analysi Potestatum, &c.

Over de Wortels eener Cubische Aequatie.

Verschillende Regelen, om te bepalen, welke getallen quadraat of cubicq zijn.

Compendium Musicae.

Doctrina Prostaphaeretica.

Trigonometria Logarithmica.

II. MSS. van FR. à SCHOOTEN bevat:
Matheseos universalis. Lib. I.
Ratio et proportio. Lib. II.
De Symmetria et Asymmetria. Lib. III.
De Analysi Mathematica. Lib. IV.
Pars altera de Arithmetica.

III. Verschillende stukken van Diophantes Alexandrinus, uitgewerkt door FR. à SCHOOTEN.

IV. Verschillende uitgewerkte stukken van FR. à SCHOOTEN over de Algebra.

V. Lessen van F. VAN SCHOOTEN over Arithmetica.

VI. F. VAN SCHOOTEN, Verhandeling over de Arithmetica.

VII. Lessen, gehouden door F. VAN SCHOOTEN, 9 Dec. 1655, over de Natuur, constructie en 't gebruik der Logarithmische Tafelen van Briggs en Vlacq.

VIII. Eene volledige verhandeling over de Sphaerische Driehoeksmeting van F. VAN SCHOOTEN, door zijn broeder.
Hierbij vele Astronomische Problemata.

IX. Kompleet Tractaat over de Arithmetica en een groot gedeelte der Algebra, behelzende de laatste Voorlezingen van Prof. FR. VAN SCHOOTEN, die 30 Mei 1660 overleden is, en door zijn broeder P. VAN SCHOOTEN is opgevolgd.

X. MSS. van F. à SCHOOTEN, waarbij Aanteekeningen van P. VAN SCHOOTEN, gedat. April 1656, bevat:
Arithmetique ou l'art à chiffrer.
Tabulae Logarithmicae &c. in het Nederduitsch.
Deeling der figuren door evenwijdige linien zamengesteld.
Fundamenta quibus usus fuit FR. à SCHOOTEN.
Eene Verhandeling over de Fortificatie.

XI. P. à SCHOOTEN et F à SCHOOTEN.
Ad locos planos et solidos.
Appendix ad Isagogen topicam, continens Solutionem problematum solidorum per locos.
De Tangentibus Linearum Curvarum.
De Centro gravitatis parabolici Conoidis.
Extrait d'une lettre du 15 Juin 1636 au P. Mersenne &c.
Propositio per quatuor puncta Parabolam describere.

Problema 10 Nov. 1642: invenire cylindrum maximi ambitus in sphaera.

XII. PETRUS VAN SCHOOTEN (Prof. te Leiden) a° 1655, verschillende verhandelingen.

1°. Figurae ceteraque quae desiderantur in L. II. Geographiae B. Vareni.

2°. Guido Ubaldi Planisphaeriorum universalium Theorica. Dit handschrift heeft aan het einde:

„Scripsit PETRUS à SCHOOTEN, Hagae Comitis, Anno 1665,"

waaruit zoude volgen, dat hij toen te 's Gravenhage woonde.

XIII. Oplossing van verschillende Geometrische en Algebraische Vraagstukken, door P. VAN SCHOOTEN.

XIV. Specimen Problematum algebraicorum sectionumque, quae in cono effici possunt, auctore P. VAN SCHOOTEN.

XV. De Cos-rekening, benevens eene Verhandeling over de Irrationale grootheden. Door P. VAN SCHOOTEN.

XVI. Euclidis Elementa van PETRUS VAN SCHOOTEN.

9. Het handschrift N°. 1 heb ik door de welwillendheid van bovengenoemden Hoogleeraar kunnen gebruiken, tot vermeld doel.

In den aanvang bleef dit Handschrift N°. I weigerachtig, omdat daarin meer dan éène hand scheen voor te komen; maar een nauwgezetter onderzoek bracht mij eindelijk op het spoor. Aan het einde toch van het Compendium Musicae staat:

„Bredae Brabantinorum pridie Calendas || Januarias anni MDCXVIII completo."

Daaronder met andere hand

„cum ageret (ni fallor) annum 21num.

Scripsit haec pro domino Zecmanno Scholo Dordra- || cenae moderatore, nunc temporis cum primum in has regiones venisset, et ex Schola Flechiana in Gallia ubi studuisset, sortitus esset, ut ibi multas || se incumberet. Mansit autem Bre- || dae per 15 menses unde in Germaniam discessit || dum intestina bella ibi orirentur: ut mihi ipse || narravit. ||

Habentur et Libri in Bibliotheca Flechiana sua || manu notati et Collegio donati, nam ibidem moris || est quemquam non egredi scholam qui non donarit || ipsae Bibliothecae librum aliquem."

Deze bijzonderheden kunnen alleen slaan op RENATUS DESCARTES, en zij strooken dan ook geheel met hetgeen van zijn

reizend en trekkend leven bekend is; waartoe dan het bovenstaande eene misschien nog onbekende bijzonderheid oplevert. De sprekende (of schrijvende) persoon [ut *mihi* ipse narravit] is dus zonder twijfel onze FRANCISCUS VAN SCHOOTEN: derhalve ziet men hier zijne hand.

En nu is deze kleine, geleerde hand volstrekt ongelijkvormig aan het groote klerkachtige schrift, dat eerst in het Leidsche MSS. voor de hand van VAN SCHOOTEN gehouden werd.

Het blijkt dus dat het in dit opstel beschreven handschrift van VAN SCHOOTEN — hoewel zeer waarschijnlijk door hemzelven opgesteld, en van tijd tot tijd vermeerderd, — niet door hemzelven is geschreven; maar dat hij daartoe twee verschillende schrijvers achtereen gebruikte; dit laatste blijkt daaruit, dat in het eerste gedeelte (blz. 1—52), met een staande letter geschreven, later aanmerkingen zijn ingelascht, geschreven met meer loopende hand.

10. Maar het onderzoek van het Groningsche Handschrift N°. I leerde mij nog meer. Vooreerst vond ik daarin onder het hoofd, Caput. XII, „de genesi et Analisy potestatum &c." een manier om den vierkantswortel te trekken uit een irrationeel quadrinomium. De bewerking luidt dus

Extraheert den quadraetwortel uit $108-\sqrt{1200}+\sqrt{2000}-\sqrt{60}$

$108 - \sqrt{1200} + \sqrt{2000} - \sqrt{60}$

$108 - \sqrt{1200}$

864
108
11664
1200

$12864 - \sqrt{55987200}$ quadraet des eenen deels

substratr. $2060 - \sqrt{480000}$ quadraet des anderen deels

$10804 - \sqrt{46099200}$ Rest

10804
43216
86432
10804
116726416
46099200
70627216

$\sqrt{}$

8404
10804   10804
19208   9604
9604   1200

$\sqrt{}$

$98 - \sqrt{1200}$ wortel

Addeert $108 - \sqrt{1200}$ meeste deel

$206 - \sqrt{4800}$ Somme

$103 - \sqrt{1200}$ Helft

103
309
103
10609
1200
9409

$\sqrt{}$

97
103   103 $108 - \sqrt{1200}$ Meeste deel
200   100 $103 - \sqrt{1200}$ substraheert
100   3   5

$\sqrt{}$

wortel oft 10 $- \sqrt{3}$ $+ \sqrt{5}$

eerste deel   Rest of tweede deel des wortels

Komt voor den begeerden wortel $10 - \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Hiervan luidt de stelkundige verklaring aldus

Zoek $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ uit $(a + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = (a^2 + b + c) + $
$+ 2a\sqrt{b} + 2a\sqrt{c} + 2\sqrt{bc} = R^2$.

Neem daartoe

$$\begin{aligned} P^4 &= (a^2 + b + c \;\; + 2a\sqrt{b})^2 - (2a\sqrt{c} + 2\sqrt{bc})^2 = \\ &= [(a^2 + b + c)^2 + 4a^2 b - (4a^2 c + 4bc)] + \\ &+ [(a^2 + b + c)\, 4a\sqrt{b} - 8ac\sqrt{b}] = \\ &= [(a^2 + b - c)^2 + 4a^2 b] + [(a^2 + b - c)\, 4a\sqrt{b}]. \end{aligned}$$

Om hieruit den wortel te trekken zij verder

$$\begin{aligned} Q^2 &= [(a^2 + b - c)^2 + 4a^2 b]^2 - [(a^2 + b - c)\, 4a\sqrt{b}]^2 = \\ &= [(a^2 + b - c)^2 + 4a^2 b + (a^2 + b - c)\, 4a\sqrt{b}] \times \\ &\times [(a^2 + b - c)^2 + 4a^2 b - (a^2 + b - c)\, 4a\sqrt{b}] = \\ &= [a^2 + b - c + 2a\sqrt{b}]^2\, [a^2 + b - c - 2a\sqrt{b}]^2 = \\ &= [(a^2 + b - c)^2 - 4a^2 b]^2 \end{aligned}$$

dus $Q = (a^2 + b - c)^2 - 4a^2 b$.

Neem hiervan som en verschil met het rationele deel van P^4, dan komt er

$$\begin{array}{ll} 2 & \begin{array}{ll} 2(a^2+b-c)^2 & 8a^2 b \\ \hline (a^2+b-c)^2 & 4a^2 b \end{array} \\ \sqrt{} & \begin{array}{ll} \hline a^2+b-c & +2a\sqrt{b}. \end{array} \end{array}$$

Tel hierbij de beide eerste termen van R^2

$$\begin{array}{lll} & \begin{array}{ll} a^2+b+c & +2a\sqrt{b} \\ \hline 2(a^2+b) & +4a\sqrt{b} \end{array} & \text{dan komt er} \\ 2 & \begin{array}{ll} \hline a^2+b & +2a\sqrt{b}; \end{array} & \text{trek af van genoemde} \end{array}$$

twee 1[e] termen van R^2 $\;a^2+b+c+2a\sqrt{b}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a^2+b \qquad +2a\sqrt{b}$

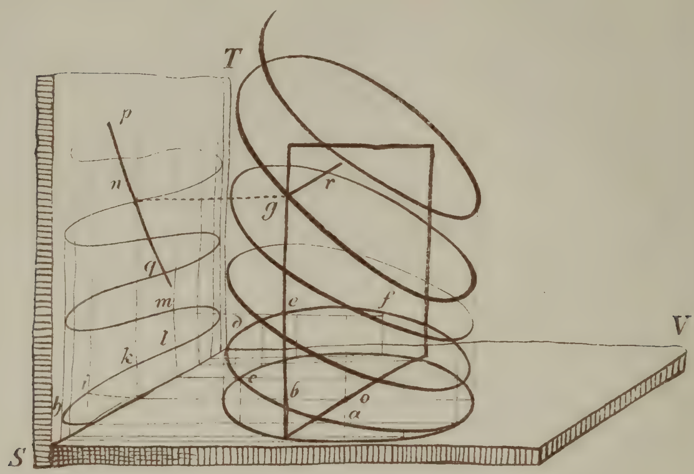
op de gewone wijze vindt men hier

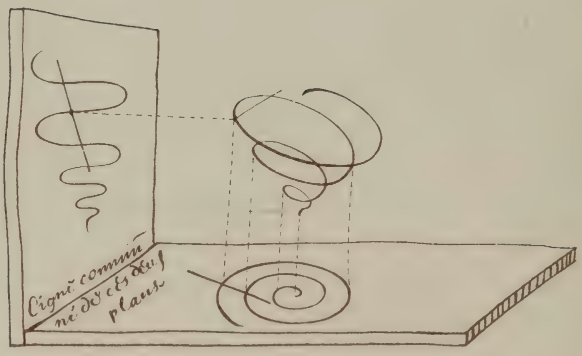
$$\begin{array}{llll} & a^2 & b & c \\ \hline \sqrt{} & a & +\sqrt{b} & +\sqrt{c} \end{array}$$

is dus de wortel, waarvan men was uitgegaan.

11. Vooral belangrijk kwam mij de oplossing voor van een vraagstuk door twee loodrechte projectie-vlakken, als in de beschrijvende meetkunde, zooals men hier in 1632 zeker niet zoude verwachten.

Dit stuk komt voor onder het hoofd: „Over de wortels eener Cubische Aequatie", en luidt aldus.


T
p
n
g
r
q
m
c
f
V
d
l
k
i
h
e
b
o
a
S



Ex Descartio, quot radices in cubicis aequationibus || occurrunt, tot plurimum problema admittit casus. || Sub primo genere linearum curuarum continentur circulus || Parabola, Hyperbola, Ellipsis, sub secundo genere || comprehendentur, Conchoidis vulgaris, parabola || descripta ex motu alterius alicujus, et rectae lineae || et catena nempe quae eodem modo describuntur per || intersectionem rectae lineae et aliae cuius libet coni sec- || tionis, ut circuli, Hyperbolae et Ellipseos. Et quem- || admodum circulus linearum curuarnm primi generis prima est atque || simplicissima, sic item conchoides quae ortum suum || habent ex circulo curuarum secundi generis, prima || est atque simplicissima. Rursus, quoniam circulus || non soluit omnia problemata solida et quadrato-qua || dratica, sic item conchoides nón omnia soluit pro- || blemata surdesolida, et quadrato-cubica et rursus ut || parabola soluit omnia problemata cubica et quadrato-cu- || bica (quae ad cubica reduci possunt) sic item parabola || secundi generis soluit omnia problemata surdesolida || et quadrato-cubica (quae ad surdesolida reduci possunt)". ||

Eene nieuwe bladzijde begint met figuur 1. Daaronder

„In plano S V, proponatur cilindrus quidam, cuius basis circulus circa O constructus, et in cuius super- || fitie descripta sit helix cilindrica *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Datum || jam sit punctum *g* in Helice, et oporteat ducere rec- || tam lineam, per punctum *g* quae secet Helicem ad ad rec- || tos angulos (ut *g r*). Erigatur planum aliquod S T ad || rectos angulos, ipsi plano S V, in quo ab infinitis || punctis helicis ut *a, b, c, d, e* &c. demittantur perpendicu- || lares *ah*, *bi*, *ck*, *dl*, *em* et *gn*. Haec igitur perpen- || diculares cum in plano S T describant etiam aliam quam- || dam Helicem, ut *h*, *i*, *k*, *l, m*, *n* &c. Ducatur in plano || S T per *n* punctum recta *p n q* secans hanc helicam ad || rectos angulos, et intelligatur planum infinitum, transiens per || rectas *p n q* et *n g*, quod secet planum infinitum duc || tum per *g b*, (quae quidem perpendicularis est ad basin circu- || li) et *b o* (quae ab hoc puncto *b* ducitur per centrum cir- || culi O) secundum rectam lineam *g r*. Dico rectam || *g r* secare Helicem *a b c d* &c ad rectos angulos. At- || que in tali sensu intelligenda sunt posteriora verba Libri secundi".

Eene nieuwe bladzijde begint met figuur 2. Daaronder

„Aliquando in utraque parte aequationis non sunt || aequales dimensiones et fit quando unitas deter- || minata subintelligitur, fitque breuitatis causa, o- || riginem sumens ex progressioni, quod saepe in cubicis || aequationibus accidit ut in parabola, ubi plurimum || distantia verticis a foco pro unitate sumitur."

12. In hetzelfde handschrift N°. I, is vooraan nog eene bibliographische zeldzaamheid ingeplakt, een dier wiskunstige vraagstukken, die eenige wiskundige aan de liefhebbers ter oplossing voorstelde. Dit is een „PROBLEMA ASTROMONICUM ET GEOMETRICUM door *Johan Stampioen*" [15]) gedrukt in plano, met eene plaat in kopergravure. Aan den kant is door VAN SCHOOTEN de oplossing geschreven, althans tot zekere hoogte aangegeven.

Februari 1877.

A A N T E E K E N I N G E N.

---

1)* TABVLAE || SINVVM || TANGENTIVM || SECANTIVM, || ad Radium 10 000000; || *Met 't gebruyck der selve in* || *Rechtlinische Triangulen,* || *Door* Fr. van Schooten || *Professor Matheseos* || *tot Leyden.* || Vignette: eene meetkundige figuur voor de constructie der goniometrische lijnen. || *Tot Amsterdam,* || *Bij Willem J. Blauw* || *in de Sonnewyser.* || 1627 || in 8°. klein formaat.

A—O, 216 bladz. niet gepagineerd,

bevatten de titel, die geheel gegraveerd en met zinnebeeldige figuren versierd is, „Korte || INSTRVCTIE || deser tafelen" (12 bladz.),

dan: CANON || SINVVM, || TANGENTIVM || ET || SECANTIVM. || Ad Radium. || 10000000.

in 7 decimalen (181 bladz.).

In verso. „Van 't ghebruyck der Ta- || felen in 't meten der platte || Triangulen". 31 bladz.

2)* TABVLAE || SINVVM || TANGENTIVM *et* SECANTIVM, || ad Radium 10000000; || *Met 't gebruyck der selver in Rechtlinische* || *triangulen, Door* Fr. van Schootē || gecorrigeert, || *Ende in 't cort by gevoecht, d'ontbindinghe* || *der Sphaerischer-Triangulen, met noch* || *eenige Constige Geometrische, ende* || *Polygonaelsche questien.* || *Door* J. J. STAMPIOEN *de Jonge*; || vignette als boven. || TOT ROTTERDAM || *bij de Weduwe van Matthys bastiaenss. op 't Steyger,* in 12°.

De titel is gegraveerd, doch verschilt van dien voor het boekje in noot (1).

A—K, 236 bladz., niet gepagineerd,

is op dezelfde wijze ingericht als het vorige boekje, behalve dat het voorwerk 10 bladz. en het achterwerk 45 bladz. telt.

Daarachter volgt

Kort || BY-VOEGHSEL || der || SPHAERISCHER || Triangulen. || *Door* || J. J. STAMPIOENIVM; || *Iuniorem*; Mathematicum. || Vignette: eene meetkundige figuur, die voorkomt op de 28ste bladz. || TOT ROTTERDAM, || By de Weduwe van Matthys || Bastiaensz, Boeck-verkooper, Op 't || Steyger, in Josephus, 1632, in 12°.

A—C, 10 bladz. zonder paginatuur.

In verso van den titel, een vers van *J. J. Paep* „Aen den Gheleerden, Konst- || rycken Ionghelingh; || Johan Stampioen."

Dit boekje begint aldus:

„*Dvs verder verhaelt zynde, de || uyt-rekeningh der recht-lini- || scher triangulen; ende dat ten || deele door 't gebruyck der vo- || renen beschreven tafelen.*"'

waaruit blijkt, dat het werkelijk behoort bij de eerst beschreven tafels, en dat deze dus evenzeer in 1632 zijn gedrukt.

3)* Tabulae || sinuum || tangentivm || *et* || secantivm || Ad Radium 10,000,000. || *Met 't gebruyck der selve in Recht- || linische Triangulen.* || Door || Franciscus van Schoten || *Professor Matheseos tot Leyden.* || Van nieuws volgens de correcste || Exemplaria over-sien ende || verbetert. || Tot Brussel, || By Lambert Marchant, || in den goeden Herder. || M. DC. LXXXIII. in 12°.

A—I, 228 bladz., zonder paginatuur: met dezelfde inrichting als in Noot (1), met 12, 181, 35 bladz.

Tegenover den uitgeschreven gedrukten titel, vindt men een gegraveerden, met de woorden:

Tabvlae || sinvvm || tangentivm || secantivm || ad Radium 100000000 || cvm || Trigonometria || Triangulorum planorum || Studio || Francisci Schoten || *Math. Prof. Lugd. Bat.* || Vignette: dezelfde meetkundige figuur || Brvxellis || *Apud Lambertum* || *Marchant* || *sub signo* || *Boni pastoris.* || 1683.

4)* Tables || de sinus || Tangentes || et Secantes || Ad Radium 10000000. || *Avec une methode de resoudre tres-fa- || cilement par leur moyen tous les || Triangles Rectilignes & || Spheriques.* || Par || Francois Schoten || *Professeur de Mathematique en || l'Vniversité de Leyden.* || Reveuës & exactement Corrigées || en cette Edition, || a Brusselles, || Chez Lambert Marchant, || Libraire au Marché aux Herbes. || M. DC. LXXXIII. in 12°.

A—I, 224 bladz.

De tekst is Fransch, maar de verdeeling is weder dezelfde met 12, 181, 31 bladz.

Er is een gegraveerde titel volkomen gelijk aan die in het werk van Noot (3).

5)* Table || des Sinus || des Tangentes || et Secantes || povr le Rayon || 10000000. || *Par* Fr. de Schoten. || Vignette als bij Noot (1) || A. Roüen || chez || David Berthelin || et || Jacques Lucas || Rüe || aux Juifs. 1672. || *Avec Privilege du Roy.* in 12°.

A—T, 250 bladz. zonder paginatuur.

De titel is weder eene gravure, doch veel grover dan de voorgaande: de tekst is fransch; de inrichting is dezelfde in 12, 181, 47 bladz.

6)* De 15 Boecken der || ELEMENTEN || Van Euclidis, || Met korte verklaringen eeni- || ger Propositien. || *Uyt het Latyn Overgeset*, || Door FRANS VAN SCHOTEN, || in sijn leven Professer Matheseos der || Hooge Schoole tot Leyden. || *En nu vergroot door* J. V. L. *met* || *het sesthiende Boeck van* Christophoro || Clavio, *trouwelyck uyt Latyn Vertaelt*, || *ende met een Aenhangsel der Fonda-* || *menten vande Mathematische Namen* || *ende Coracteren* (sic) *verryckt, in dese const* || *gebruyckelyck tot gerief der Aencomelingen.* || t'AMSTERDAM, || By *Jacob van Leest*, op 't Water in de || Blaeuwe Kroon. 1662. in 12°.

VIII bladz. zonder pagineering, bevatten titel, en opdracht aan „*Den E: ende Godtvruchtighen* || *welgeleerden Jonghman* Justo || Bonardo student Matheseo, || *weuscht* (sic) J. V. L. *Geluck* || *en Salicheyt lang le-* || *ven, en Salich* || *sterven.*"

A—L. Bladz. 1—243. bevatten Bouck I—XVI. (bladz. 1—199).

bladz. 200—208. „*Fondamenten vande Mathematische const.*"

bladz. 209—243. „*Aenhang op de* 15 *Boucken* || EUCLIDIS.

7)* RENATI || DES-CARTES || PRINCIPIA || PHILOSOPHAE. || *Nunc demum hac Editione diligenter reco-* || *gnita, & mendis expurgata.* || Vignette; Minerva met een boom en het devies: NE EXTRA OLEAS. || AMSTELODAMI, || Apud Ludovicum & Danielem Elsevirios, || Anno cIↄ, IↄcLVI. || *Cum Privilegiis.* || in 4°.

44 bladz. bevatten vóór den titel een fransche titel:

„RENATI || DES-CARTES || OPERA || PHILOSOPHICA. || EDITIO TERTIA. || *Nunc demum hac Editione diligenter recognita,* || *& mendis expurgata.*"

de „CONTENTA" de „TYPOGRAPHVS || AD LECTOREM." || en het portret.

Na de Titel volgt het „PRIVILEGE" van Frankryk, de opdracht aan „ELISABETHAE. || FREDERICI BOHEMIAE REGIS, || . . . || Filiae natu maximae." (6 blz.), de „EPISTOLA AVTHORIS". (15 bladz.) en de „INDEX" (13 bladz.).

A—Ee, bladz. 1—222.

Dan een nieuwe titel en index (16 bladz.).

a—hh. bladz. 1—248.

Dan een nieuwe titel en voorwerk (24 bladz.)

A—M. bladz. 1—92.

Index. 4 bladz.

8)* GEOMETRIA, || à || RENATO DES CARTES || Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem || CUM NOTIS || FLORIMONDI DE BEAVNE, || *In Curiâ Blaesensi Consilarii Regii,* || In linguam Latinam versa, & commen-

ta- || riis illustrata, || *Operâ atque studio* || FRANCISCI à SCHOOTEN, || Leydensis, in Academiâ Lugduno-Batavâ, Matheseos || Professoris, Belgicè docentis. || Vignette: een spittende landman, met het motto: „FAC ET SPERA". || LVGDVNI BATAVORVM, || Ex Officinâ JOANNIS MAIRE. || CIↃIↃCXLIX. in 4°.

XII blz. (niet gepagineerd) bevat titel, opdracht aan „ELISABETHAE, || FRIDERICI BOHEMIAE REGIS, Comitis Palatini, & Electoris Sacri Ro- || mani Imperii, filiae natu || maximae" (4 bladz.) gedateerd „*Dabam Leydae, XII Kàl. Julii,* || *Anni* CIↃIↃCXLIX"; dan „LECTORI BENEVOLO" (3 blz.) INDEX (3 blz.).

A—P, blz. 1—118· Libri I—III.

P—X, blz. 119—161. FLORIMONDI DE BEAVNE || IN GEOMETRAM || RENATI DES CARTES || NOTAE BREVES.

X—Oo, blz. 162—294. FRANCISCI à SCHOOTEN || IN GEOMETRIAM || RENATI DES CARTES || COMMENTARII.

Oo—Vu, blz. 295—336. ADDITAMENTUM. De laatste bladzijde bevat de „Errata".

Daarop twee bladzijden (niet gepagineerd) met verbeteringen.

9)* GEOMETRIA, || à || RENATO DES CARTES || Anno 1637 Gallicè edita; postea autem || Unà cum NOTIS || FLORIMONDI DE BEAVNE, || In Curia Blesensi Consilarii Regii, Gallicè conscriptis in || Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata, || *Operâ atque studio* || FRANCISCI à SCHOOTEN, || in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris. || *Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis* || *instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorém expli-* || *cationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriae ex-* || *cellentiam facientibus, exornata,* || Quorum omnium Catalogum paginav ersa exhibet || Vignette: Minerva onder olijfboom met de spreuk „NE EXTRA OLEAS. || AMSTELAEDAMI Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, || CIↃIↃCLIX. in 4°.

XII blz. voorwerk, hetzelfde als in het vorige werk. Tegenover den titel een fraai portret van Descartes, gegraveerd door van Schooten, hetzelfde als voorkomt in het boek van Noot (7). In verso van het portret, een fransche titel

RENATI || DES-CARTES || GEOMETRIA. || EDITIO SECUNDA. || *Multis accessionibvs exornata, & plus alterâ* || *sui parte adaucta.* In verso van den titel de CATALOGVS || eorum, || Quae hoc Opere continentur. ||

[blz 1—106]. RENATI DES CARTES Geometria tribus libris com- || prehensa.

[blz. 107—142]. FLORIMONDI DE BEAVNE in illam NOTAE BREVES.

[blz. 143—344]. FRANCISCI à SCHOOTEN in eandem Commentarii, || recogniti & aucti.

[blz. 345—368]. ejusdem APPENDIX, de Cubicarum Aequationum || Resolutione.

[blz. 369—400]. ejusdem ADDITAMENTUM. in quo continetur solu- || tio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis; || & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque || Radicibus Binomiis.

[blz. 401—405: een begeleidende brief voor de twee volgende, van JOHANNES HVDDE, gedateerd „Amstelaedami ipsis || Calendis Aprilis 1658”].

[blz. 406—506, 507—516]. JOHANNIS HUDDENII Epistolae duae, quarum altera || de Aequationum Reductione, altera de Maximis & Minimis || agit.

[blz. 517—520]. HENRICI VAN HEURAET Epistola, de Curvarum || Linearum in Rectas transmutatione.

Hetgeen tusschen de haakjes [ ] voorkomt, staat niet in den „Catalogus”.

Dit eerste deel bevat vel A—Ttt.

Het tweede deel bevat vier stukken, die ook in den voorgaanden Catalogus, en op nieuw in een catalogus aan het hoofd van dit tweede deel worden aangegeven; maar ieder heeft vervolgens een afzonderlijken titel. Vooreerst de titel:

PRINCIPIA || MATHESEOS || VNIVERSALIS, || SEV || INTRODUCTIO || AD || GEOMETRIAE METHODVM || RENATI DES CARTES || *Conscripta ab* || ER. BARTHOLINUS, CASP. FIL. || *Editio Secunda, priore correctior.* || vignette, als bij het eerste deel. || AMSTELAEDAMI, || Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, || CIↃIↃCLXI.

XIV bladz. (zonder pagineering) bevatten de opdracht (10 blz.) gedateerd „*Leidae* || *Anno* CIↃIↃCL. || *Calend. Jun.*” dan LECTORI S. (4 blz.)

A—F. blz. 1—48. De laatste bladzijde heeft tot titel FRANCISCUS à SCHOOTEN || AD LECTOREM”, waarin hij de „menda” opgeeft voor dit werk en zijne „Exercitationes van 1657”.

Daarop de titel.

DE || AEQUATIONUM || *Natura, Constitutione, & Limitibus* || Opuscula Duo. || *Incoepta à* || FLORIMONDO DE BEAVNE, || *in Curia Blesensi Consiliario Regio:* || *Absoluta verò & post mortem ejus edita* || ab || ERASMIO BARTHOLINO, || Medicinae & Mathematum in Regia Academia || Hafniensi Professore publico. || Vignette, als boven || AMSTELAEDAMI, || Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, || CIↃIↃCLIX.

G, H blz. 49—63 (niet gepagineerd) bevatten opdracht aan „JOACHIM GERSDORPH”(5 blz.) gedateerd „*Hafniae Anno* || CIↃIↃCLVII”. EPISTOLA PRAELIMINARIS || *Ad Clarissimum Virum* || CLAUDIUM HARDY (16 blz.) FLORIMONDI DE BEAUNE || PRAEFATIO (1 blz.).

Dan H—T blz. 63—152. Het boek zelf, afgebroken door een

brief van Er. Bartholinus aan Franciscus à Schooten, blz. 117—120 (niet gepagineerd).

Dan de titel.

Johannis de Witt || elementa || curvarum || linearum : || Edita || Operâ Francisci à Schooten, || in Academia Lugduno-Batava Matheseos || Professoris. || Vignette, als boven || Amstelaedami. || Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, || CIƆIƆCLIX.

V. blz. 153—158. Brief van Johannes de Witt aan Fr. à Schooten (3 blz.)

V—Tt blz. 159—340. Het werk in twee boeken.

Daarop de titel.

Francisci à Schooten, || Leidensis, || *dum viveret in Academia Lugduno-Batava* || *Matheseos Professoris,* || Tractatus || de || concinnandis || demonstrationibus || geometricis || ex Calculo Algebraïco. || *In lucem editus* || à || Petro à Schooten || Francisci Fratre. || Vignette, als boven || Amstelaedami, || Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, || CIƆIƆCLXI.

VII blz. 341—344. Opdracht door P. van Schooten aan de Curatoren der Leidsche Hoogeschool.

Xx—Ggg blz. 345—420. Het werk zelf.

blz. 421 (niet gepagineerd). Errata.

blz. 422 (niet gepagineerd). Lectori Benevolo || J. Hudde S. P.

blz. 423—424. Twee verzen één latijn, één grieksch.

10) Francisci à Schooten || principia || mathaeseos || vniversalis || sev || introductio || ad || geometriae methodum || Renati des Cartes, || edita ab || Er. Bartholino, Casp. Fil. || Vignette: de tuinman met olijfboom en omschrift. „Non solus" || Lvgd. Batav. || Ex Officinâ Elseviriorum. || CIƆIƆCLI. in 4°.

XVI bladz. (zonder pagineering) bevat de opdracht. D. Christiano Thomae, || Toparchae in Stavgard (10 blz.) gedateerd, „*Leidae* || *Anno* CIƆIƆCL || *Calend. Jun.*" De Praefatio in haec principia, et || de modo legendi || geometriam (4 bldz.) gedateerd „*Leidae, Anno* || *Christi* CIƆIƆCL *Postridie Non. Maii*".

Met verkorting der beide laatste bladzijden, komt dit stuk in de Editio secunda voor als het „Lectori S.". Beide stukken zijn van Erasmius Bartholinus.

A—F blz. 1—46.

11)*Francini à Schooten || exercitationvm || mathematicarum || libri quinque. || I. Propositionum Arithmeticarum et Geome- || tricarum Centuria || II. Constructio Problematum Simplicium Geo- || metricorum, || III. Apollonii Pergaei Loca Plana restituta. || IV. Organica Conicarum Sectionum in plano || descriptio. || V. Sectio-

NES MISCELLANEAE TRIGINTA. || Quibus accedit CHRISTIANI HUGENII Tractatus, || de Ratiociniis in Aleae Ludo. in 4⁰.

A—Xxx, blz. 1—534.

Ieder dezer vijf stukken heeft een afzonderlijken titel met een afzonderlijk jaartal.

I. 1657. VIII blz. (zonder pagineering). Opdracht aan het Hof van Holland, Zeeland en West-Friesland ; gedateerd „Idibus Septembris. Anno || CIƆIƆCLVI."
blz. 1—112, het werk zelf.

II. 1656. blz. 114—118. Opdracht aan de Curatoren van de Academie te Leiden ; blz. 119—122, „Praefatio ad Lectorem ;" blz. 123—190 het werk zelf.

III. 1656. blz. 193—196. Brief aan Petrus Chanuto, gedateerd „*Kalendis Januariis Anni* CIƆIƆCLVII" ; blz. 197—202 „Praefatio ad Lectorem." blz. 203—292 het werk zelf.

IV. 1657. blz. 294—296 (niet gepagineerd). Opdracht aan de Curatoren voornoemd, gedateerd „Kal. Novemb. MDCXLVI"; blz. 297—302. Praefatio ad Lectorem; blz. 303—368 het werk zelf.

V. 1657. blz. 371—272. Brief aan Johannes Walbeeck; blz. 373—516 het werk zelf.

blz. 517—518. „Ad Lectorem."

blz. 519—520. Brief van Christiaen Hugenius aan Fr. Schotenius gedateerd: „Hagae Comitum. 27 April 1657."

blz. 521- 534. De ratiociniis in ludo aleae.

1 blz. wit. de „Errata."

Op ieder titel komt als vignette voor een olijfboom met tuinman en bijschrift. „NON SOLUS." Daaronder

„LVGD. BATAV. || Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII. || Academiae Typographi.

12)* Eerste Bouck || der || MATHEMATISCHE || OEFFENINGEN, || Begrijpende || Vijftigh Arithmetische, en Vijftigh || Geometrische Voorstellen. || *Door* || FRANCISCVS van SCHOOTEN, || Professor Matheseos in de Vniversiteyt tot *Leyden*. || Vignette: drukkersornament || t'AMSTERDAM, || Bij GERRIT van GOEDESBERGH, || Boeck-verkooper op 't Water/ in de Delfsche Bijbel/ tegen || over de Nieuwe-Brugh. || ANNO 1659. 4⁰.

A, VIII. blz. (niet gepagineerd), bevat opdracht (6 blz.). Daarop „FRANCISCI van SCHOOTEN || MATHEMATISCHE || OEFFENINGEN, || Begrepen in vijf Boecken. || I. Verhandeling van vijftig Arithmetische en vijftig Geometrische || Voorstellen. || II. Ontbinding der simpele Meet-konstige Werck-stucken. || III. APOLLONII PERGAEI herstelde Vlacke Plaetsen. || IV. Tuych-werckelycke beschrijving der Kegel-sne-

den op een || vlack. || V. Dertich Af-deelingen van gemengde stoffe. || Waer by gevougt is een Tractaet/ handelende van Reeckening || in Speelen van Geluck. || Door d' Heer || CHRISTIANUS HUGENIUS. || Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van || de Fondamenten || der || PERSPECTIVE.

B—Ffff blz. 11—544.

blz. 11—112. bevat dit „Eerste Bouck".

blz. 113—182. „Tweede Bouck".

blz. 183—273. „Derde Bouck".

blz. 273—342. „Vierde Bouck".

blz. 343—484. „Vijfde Bouck".

blz. 485—500. „Van Rekeningh in spelen van geluck".

blz. 501—543. „Tractaet der Perspective".

blz. 544. „Faulten".

Aan het slot staat

„TOT LEYDEN || *Gedruckt by* || SEVERIN MATTHIJSZ. || By de St. Pieters Kerck, in de Wereldt vol Drucks, 1660."

13)* Hetzelfde werk met dezelfde titels en tekst. Alleen komt het jaartal 1659 in plaats van 1660.

14)* FRANCISCI à SCHOOTEN || LEYDENSIS, || DE || ORGANICA || CONICARUM SECTIONUM || IN PLANO DESCRIPTIONE, || TRACTATUS. || GEOMETRICIS, OPTICIS; || Praesertim verò || GNOMONICIS & MECHANICIS || UTILIS. || Cui subnexa est Appendix, de Cubicarum || Aequationum resolutione. || Vignette dezelfde als bij Noot (11). || LVGD. BATAVOR. || Ex Officinâ Elseviriorum, || A°. cIↄ Iↄ cxcvi. in 4°.

XVI blz. (niet gepagineerd) bevat opdracht „ILLUSTRIS ACADEMIAE || LVGDVNO-BATAVAE CVRATORIBVS" gedateerd „Leydae, Kal. Novembr. Anni MDCXLVI" „de PRAEFATIO || AD || LECTOREM" (10 blz.).

A—M. bls. 1—90. het werk zelf.

M—P. blz. 91—117. Appendix.

15) PROBLEMATA || ASTRONOMICVM || ET || GEOMETRICUM || VOOR-GESTELT. || Door *Johan Stampioen* de Jonghe *Mathematicus* || Resideerende in 's GRAVENHAGHE || AENDE || Vytgevers van het Antwerpsch || VRAEGH-STVCK.

Deze titel staat aan het hoofd van een vel in plano. Daaronder een op koper gegraveerd plaatje, voorstellende een viertal heeren, naast drie stokken van verschillende lengte, wier voetpunten een driehoek A B C vormen. Daaronder het vraagstuk

„SYnde in den Lenten tijt, een *Stierman*, op een onbekende plaetse in een effen Hori- || zontael ofte Water-pas velt, op eenen morgenstont, als de Sonne klaer was schy- || nende, heeft daer drie

stocken van ongelycken lengte op-gherecht in de Loot- || rye. Eerstelick, merckende de schaduwe van den stock A. bevondt die te eyndi- || ghen in B, alsoo, dat A B lanck was 33 voeten. Een weinigh tydts daer na de Sonne || wat hoogher zijnde, heeft de schaduwe van den stock A bevonden te eindighen in C [met potlood is bijgevoegd: ten derden die van B in C]. Ten || vierden soo quam de schaduwe van B te eyndighen in A. Ten laetsten de Sonne wederom || wat verloopende, soo quam de schaduwe van den stock C te eyndighen in A. Den dach ver- || loopen zynde heeft de uyterste vande drie Koninghen staende op het beelt van Orion in || eene rechte lynie water-pas bevonden; Ende van stonden aen ghemerckt, dat het binnenste der || vier Planeetjens, die om *Jupiter* loopen Eclipseerde. Vraghe? op wat Polus hoogte, op wat || dagh van t' Jaer, op wat ure dat de Son elcke male geobserveerdt is, ende oock hoe verre de || stocken van den anderen stonden. Midtschaders oock de ware lenghte van de selve plaetse || Als de stock A langck is 6 voet. B 18 voet, ende C 8 voeten. || Antwoordt."

den op een || vlack. || V. Dertich Af-deelingen van gemengde stoffe. || Waer by gevoegt is een Tractaet/ handelende van Reeckening || in Speelen van Geluck. || Door d' Heer || CHRISTIANUS HUGENIUS. || Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van || de Fondamenten || der || PERSPECTIVE.

B—Ffff blz. 11—544.

blz. 11—112. bevat dit „Eerste Bouck".

blz. 113—182. „Tweede Bouck".

blz. 183—273. „Derde Bouck".

blz. 273—342. „Vierde Bouck".

blz. 343—484. „Vijfde Bouck".

blz. 485—500. „Van Rekeningh in spelen van geluck".

blz. 501—543. „Tractaet der Perspective".

blz. 544. „Faulten".

Aan het slot staat

„TOT LEYDEN || *Gedruckt by* || SEVERIN MATTHIJSZ. || By de St. Pieters Kerck, in de Wereldt vol Drucks, 1660."

13)* Hetzelfde werk met dezelfde titels en tekst. Alleen komt het jaartal 1659 in plaats van 1660.

14)* FRANCISCI à SCHOOTEN || LEYDENSIS, || DE || ORGANICA || CONICARUM SECTIONUM || IN PLANO DESCRIPTIONE, || TRACTATUS. || GEOMETRICIS, OPTICIS; || Praesertim verò || GNOMONICIS & MECHANICIS || UTILIS. || Cui subnexa est Appendix, de Cubicarum || Aequationum resolutione. || Vignette dezelfde als bij Noot (11). || LVGD. BATAVOR. || Ex Officinâ Elseviriorum, || A⁰. cIↃ IↃ cxcvi. in 4⁰.

XVI blz. (niet gepagineerd) bevat opdracht „ILLUSTRIS ACADEMIAE || LVGDVNO-BATAVAE CVRATORIBVS" gedateerd „Leydae, Kal. Novembr. Anni MDCXLVI" „de PRAEFATIO || AD || LECTOREM" (10 blz.).

A—M. bls. 1—90. het werk zelf.

M—P. blz. 91—117. Appendix.

15) PROBLEMATA || ASTRONOMICVM || ET || GEOMETRICUM || VOOR-GESTELT. || Door *Johan Stampioen* de Jonghe *Mathematicus* || Resideerende in 's GRAVENHAGHE || AENDE || Vytgevers van het Antwerpsch || VRAEGH-STVCK.

Deze titel staat aan het hoofd van een vel in plano. Daaronder een op koper gegraveerd plaatje, voorstellende een viertal heeren, naast drie stokken van verschillende lengte, wier voetpunten een driehoek A B C vormen. Daaronder het vraagstuk

„SYnde in den Lenten tijt, een *Stierman*, op een onbekende plaetse in een effen Hori- || zontael ofte Water-pas velt, op eenen morgenstont, als de Sonne klaer was schy- || nende, heeft daer drie

stocken van ongelycken lengte op-gherecht in de Loot- || rye. Eerstelick, merckende de schaduwe van den stock A. bevondt die te eyndi- || ghen in B, alsoo, dat A B lanck was 33 voeten. Een weinigh tydts daer na de Sonne || wat hoogher zijnde, heeft de schaduwe van den stock A bevonden te eindighen in C [met potlood is bijgevoegd: ten derden die van B in C]. Ten || vierden soo quam de schaduwe van B te eyndighen in A. Ten laetsten de Sonne wederom || wat verloopende, soo quam de schaduwe van den stock C te eyndighen in A. Den dach ver- || loopen zynde heeft de uyterste vande drie Koninghen staende op het beelt van Orion in || eene rechte lynie water-pas bevonden; Ende van stonden aen ghemerckt, dat het binnenste der || vier Planeetjens, die om *Jupiter* loopen Eclipseerde. Vraghe? op wat Polus hoogte, op wat || dagh van t' Jaer, op wat ure dat de Son elcke male geobserveerdt is, ende oock hoe verre de || stocken van den anderen stonden. Midtschaders oock de ware lenghte van de selve plaetse || Als de stock A langck is 6 voet. B 18 voet, ende C 8 voeten. || Antwoordt."

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

XIV. Josephus Scaliger J. C. Fil. als cirkel-quadrator.

1. JOSEPHUS SCALIGER was een geleerde, die, wegens zijn veelomvattende wetenschap, diepe kennis en fijne scherpzinnigheid in zijnen en ook in lateren tijd groote vermaardheid verwierf. Hij was zoowel wegens zijne geleerdheid als wegens zijne persoonlijke hoedanigheden eene merkwaardige figuur van zijnen tijd, en was een der groote lichten, die de Leidsche Akademie versierden, haar naam heinde en ver verspreidden, en van overal studenten tot haar lokten.

Hoewel, — of misschien beter gezegd, omdat — deze groote man niet tevens een groot wiskundige was, werd ook hij aangetast door de toenmaals, naar het wel schijnt, besmettelijke kwaal, om te zoeken naar de quadratuur van den cirkel. Hij deed zulks op nog vrij wat minder wetenschappelijke wijze dan SIMON VAN DER EYCKE, en liet zich door de meest onwetenschappelijke paradoxen medeslepen, om tot zijn doel te geraken. Ook hier zijn het juist de geschriften zijner tegenstanders, — en hun getal zoowel als hunne beteekenis was niet gering, — die voorzeker niet het minst onze belangstelling zullen opwekken.

2. Deze JOSEPHUS SCALIGER, of zooals zijn naam voluit luidde, JOSEPHUS SCALIGER, JULII CAESARIS A BURDEN FILIUS,

werd geboren te Agen, in Guienne, den 5den Augustus 1540, zooals blijkt uit de 60e Epistola eener straks nader te behandelen verzameling, aan zijn vriend ISAAC CAUSABONUS, met het onderschrift "Lugduni Batavorum, || Nonis Augusti Juliani, die meo Natali, quo 62. || annum mihi init. 1601. Hij was de tiende van vijftien kinderen, tien zoons en vijf dochters van JULIUS CAESAR SCALIGER, geboren in 1504, die in 1529 huwde met ANDRIETTA DE ROGUES LOBIECA; deze vader, afstammende uit het geslacht delle Scala, prinsen van Verona, overleed in 1558. Onze SCALIGER, kwam in 1593, reeds met een Europeschen roem van geleerdheid, als hoogleeraar naar Leiden, buiten verplichting van het geven van eenige colleges. Hij stierf aldaar, den 24sten Januari 1609, waaromtrent de Epistola 453 (blz. 829—848) door zijn boezemvriend DANIEL HEINSIUS aan ISAAC CASAUBONUS geschreven, belangrijke bijzonderheden bevat, onder anderen het zeer eenvoudige grafschrift: "JOSEPHVS. SCALIGER. JVLII. CAESARIS. A. BVRDEN. FILIVS. RESVRRECTIONEM. HIC. EXPECTAT."

Van zijne veelvuldige werken bezit ik behalve de werken, die straks ter sprake zullen komen, slechts vooreerst zijne oorspronkelijke uitgave van "M. Manilii Astronomicωn libri Quinque" [1]) te Parijs in 1579, in 8°. Voor dit werk ontving hij van den koning van Frankrijk een jaargeld van 2000 francs, dat echter in 1594 nog niet was uitbetaald. Van dit werk kwamen er verschillende herdrukken, o. a. een te Leiden 1600 in 4°, en te Argentorati 1655, in 4°. Van zijn groote werk "de Emendatione temporum", dat te Parijs in 1583 uitkwam, verschenen evenzeer verschillende herdrukken, te Leiden in 1598, te Coloniae in 1629 [2]), alle in folio.

Eindelijk werd zijn werk "de re nummaria" [3]) in 1616 na zijn dood door WILLEBRORD SNELLIUS in het licht gegeven; deze had reeds vroeger (1613) een eigen arbeid over dit onderwerp uitgegeven "de re nummaria. L. B. 1613" [4]).

De brieven van CAESAR SCALIGER werden door zijn vriend, den beroemde DANIEL HEINSIUS, in 1627 te Leiden uitgegeven, "J. Scaliger J. C. à B. F. Epistolae. L. B. 1627" [5]) en hiervan werd in 1628 te Frankfort een nadruk gegeven. Deze verzameling bevat, in vier boeken verdeeld, 485 brieven, waar-

van de „Index” voor het werk is geplaatst; deze is ingericht naar alphabetische orde van de voornamen der personen, aan wie de brieven zijn gericht, zoodat men bijv. de brieven aan SCALIGER gericht, op de letter J. moet zoeken.

3. Het was in zijne „Cyclometrica Elementa Duo” [6]) dat JOSEPHUS SCALIGER zijne quadratuur des cirkels in het licht gaf; dit werk verscheen in 1594, in hetzelfde jaar als de „Quadrature du Cercle” van SIMON VAN DER EYCKE. Het werd door FRANCISCUS RAPHELENGIUS te Leiden uitgegeven en is een waar prachtstuk uit deze wereldberoemde boekdrukkerij: papier, letters, figuren, druk, alles is even fraai. De tekst is zwart gedrukt; de meetkundige figuren daarentegen, met hare letters zijn met rooden inkt gedrukt; evenzeer is dit het geval, waar, in den loop van een bewijs, die letters der figuur worden aangehaald. Het boek is vol grieksche uitdrukkingen en opschriften; zoo komt elke stelling eerst in het grieksch voor met een griekschen titel. Het schijnt wel dat deze prachtige uitgave aan onzen RAPHELENGIUS het privilegie verschafte, om ook in Frankrijk zijne werken te mogen uitgeven; althans dit privilegie komt reeds dadelijk bij dezen arbeid voor, en draagt denzelfden datum. Dit feit, voor den hollandschen boekhandel van geen geringe beteekenis, volgt uit de beide volgende stukken. Het eerste vindt men op de laatste der twaalf eerste bladzijden, die het voorwerk bevatten.

„HENRICI || D. G. || CHRISTIANISSIMI || FRANCIAE ET NAVARRAE || REGIS, || SANCTIONE CAVTVM EST. ||

Ne qvis, qvoscvnqve libros nvnquam ante editos || Franciscvs Raphelengivs, Christophori Plantini || gener, primvs typis vvlgaverit, eosdem, citra ipsivs || (Raphelengii) volvntatem, intra proximvm a prima || cvivsqve libri editione decennivm, totos vel ex parte, || in vllis regni franciae ditionibvs imitari, excvdere, || alibive excvsos in iisdem venales exponere avdeat, || Privilegii conditiones, indictaeqve infractoribvs || mvlctae, lativs continentvr in literis regiis datis || sigillatisqve in consilio Regis, Parisiis, XXI. Aprilis, || Anno CIↃ.IↃ.XCIV. et reg. ipsivs qvinto, ac signatis, || DE BAIGNEAVLX. || *Exemplar Privilegij Regij in fine || Mesolabij adpositum est.*”

Dit tweede stuk vindt men dan ook aan het einde van het

tweede gedeelte „Mesolabium" op bladz. 35 (zonder pagineering).

„Priuilege du Roy de France. ||

Henry *par la grace de Dieu Roy de France & de Nauarre. Aux Preuost de Paris,* || *Bailly de Rouen, Seneschal de Lyon, ou leurs Lieutenans, & à tous nos autres Justi-* || *ciers & Officiers, qu'il apartiendra, Salut. Nostre chier & bien aimé* François || de Raphelengien, Imprimeur, gendre de Christoffle Plantin, demeurant en la ville || de Leyden, *nous a faict remonstrer que pour le desir & affection qu'il a eu de tout temps de* || *seruir au public, il s'est cy deuant efforcé à recouurer de toutes partz plusieurs bons & rares* || *liures & volumes en toutes sortes de langues, artz, & sciences, lesquelz il a mis en lumiere* || *avec grandz fraiz & despens, esperant par apres cueillir quelque fruict de son labeur: duquel* || *neantmoins il a esté le plus souuent frustré; à l'occasion que les aultres Imprimeurs de cestuy no-* || *stre Royaume, si tost qu'ils ont peu recouurer quelques copies de sesdicts liures, les ont faict r'in-* || *primer, vendre & debiter iceux: de sorte que continuaut* (sic) *à ce faire* ledict Raphalengien || *sovffriroit vne tresgrande perte, & par ce moyen seroit demeu de continuer sa vocation: chose qui seroit de tresgrande consequence & preiudice aux personnages doctes, d'estre priués de la* || *communication de ces oeuures, qui ne leur peuuent apporter que toute emulation de seruir au pu-* || *blic. A quoy voulans pourueoir,* A ces causes *nous voulons, & vous mandons que vous ayez* || *à faire très-expres commandement & defenses de par nous, sur certaines & grandes peines, à* || *tous les libraires & Imprimeurs, qui sont & resident tant en vostre ressort qu'en autres endroits* || *de nostre dict Royaume: A ce qu'ilz n'aient aucunement s'entremettre ne ingerer de vendre,* || *debiter, & distribuer ne reimprimer* aucune oeuure de nouuelle composition, laquelle || non imprimée auparauant, aura par ledict Raphelengien, premierement et nouuel- || lement esté imprimée, en tout ou partie desdicts liures, *Sinon du vouloir & consente-* || *ment d'iceluy & ce pour le temps & terme de X. ans, à commencer dès la datte de la premiere* || *impression desdicts liures. Et où il y auroit aucun si ozé de contreuenir à ceste nostre volunté,* ||

Nous voulons estre procedé contre eux par amendes & confiscations des liures, dont ils se trou- || ueront saisis & autrement selon la rigueur de noz Ordonnances (pourueu que lesdictes oeuures || & liures de ladicte nouuelle composition ne soient en rien contraires à la religion Catholicque, || Apostolicque, & Romaine, ni contre nostre estat.) De ce faire vous donnons pouuoir, autho- || rité, & mandement special; entendant que l'extraict de ces presentes imprimé à la teste ou à la || fin de ses liures, se tiennent pour deuement signifiées à tous Imprimeurs ou libraires, à ce qu'ils || n'en pretendent cause d'ignorance. Car tel est nostre plaisir. Donne à Paris le vingtvniesme || jour d'Auril, L'an mil cincq cens quatre vingt & quatorze, & de nostre Regne le cinquiesme. || Soubsigné || *Par le Roy en son conseil* || de Baigneaulx."

4. Keeren wij nu tot ons onderwerp zelf terug, en zien wij, hoe SCALIGER zelf te dien aanzien redeneert; al spoedig zal het blijken dat het oordeel niet ongegrond is, zooals het boven werd uitgesproken.

In het eerste gedeelte van zijne "Cyclometrica Elementa duo", genaamd "DE AMBITV CIRCVLI." bladz. 22 geeft hij het

"*ΣΧΟΛΙΟΝ.*

"LONGE ab hac Archimedea differt voluta Vitruuij Ionica. Nam haec Archi- || medis intra circulum constituitur: Ionica autem à circello, quem oculum volutae vo- || cat Vitruuius, extra tota eiicitur. Hoc tamen commune habent, quod aequabilibus || spatiorum contractionibus, item quadrantibus circulorum, quas ipse tetrantationes || vocat, descriptae sint. Locus apud Vitruuium sanus non est, neque ipsis summis vi- || ris, nisi palpabundis, cognitus."

terwijl op de volgende bladzijde 23 de stelling voorkomt

"*ΣΧΟΛΙΟΝ.*

"IGITVR munita est nobis via finem voluta Dinostrateae deprehendendi, quod || tamen fieri posse negabat Sporus Nicenus."

Deze aangehaalde plaatsen bewijzen genoegzaam, hoe SCALIGER volstrekt niet op de hoogte was van de wiskundige wetenschappen, ook in die dagen. Vooreerst toch kent hij het onderscheid

niet tusschen de spiraal van Archimedes, — waaromtrent zijne meening, dat deze moet besloten blijven binnen den constructie-cirkel, op eene dwaling berust, — en de Ionische spiraal, die tot de zoogenaamde „courbes de raccordement" behoort, en slechts uit aan elkander gevoegde cirkelbogen bestaat. En ten anderen ontkent hij eene der hoofdeigenschappen van de Quadratix van Dinostratus, waarvan hij toont de theorie niet te kennen. Langs dezen weg, en op dergelijke wijze voortredeneerende, komt hij tot het besluit, — hetgeen hij een „nobile paradoxon in Geometria" noemt, — dat namelijk door *berekening* een ingeschreven veelhoek den cirkel kan overtreffen. Zoo zegt SCALIGER op bladz. 28.

„PROPOSITIO V. Theorema.

Ambitus Dodecagoni circulo inscribendi plus || potest, quam circuli ambitus. Et quanto deinceps || plurium laterum fuerit Polygonum circulo inscri- || bendum, tanto plus poterit ambitus Polygoni, || quam ambitus circuli."

Gereedelijk ziet men in, dat thans, — als men eenmaal deze stelling aanneemt, — ook alles, wat men wenscht, bewezen kan worden; al is het dan ook deze uitkomst, die SCALIGER als eene gewichtige ontdekking in de wetenschap beschouwt, dat namelijk de uitkomsten langs analytischen weg, door berekening verkregen, niet behoeven overeen te stemmen met hetgeen de meetkundige weg, door constructie, ons leert. Deze overtuiging was wel de oorzaak, dat SCALIGER doof bleef voor alle bestrijding; niet omdat hij de waarde van andere methoden ontkende, maar omdat hij meende, dat die uitkomsten volstrekt niet met de zijne behoefden overeen te stemmen. Van deze weinig wetenschappelijke stijfhoofdigheid zagen wij reeds een staaltje in een der vorige Bouwstoffen, N°. VIII, waar het den strijd over dit zelfde onderwerp gold met onzen LUDOLF VAN CEULEN.

In het tweede gedeelte „DE POTENTIA CIRCVLI" van denzelfden arbeid „Cyclometrica Elementa Duo", blijft zijne redeneertrant dezelfde.

Op bladz. 72 geeft hij de

„PROPOSITIO II. THEOREMA,

Circulus potest triginta sex segmenta Hexagoni || ipsi circulo inscripti."

Op bladz. 80 een

„COROLLARIVM.

Ex his patet, circuli aream esse aequalem rectan- || gulo sub latere trianguli aequilateri in eo ipso inscri- || pti circulo, & nouemdecimis diametri concepto."

waarop bladz. 83 volgt

„PROPOSITIO V. Theorema.

Potentia circuli ad semidiametrum applicata la- || titudinem facit rectam semiambitu circuli mi- || norem.".

Eindelijk vindt hij aldaar bladz. 86 de stelling

„COROLLARIVM I.

Ex his constat, quod potentia circuli minor est || Triangulo rectangulo, cuius eorum, quae rectum || angulum continent, laterum, alterum quidem se- || midiametro, alterum autem ambitui circuli est || aequale".

Hiermede meent hij dan ook Archimedes grondig te hebben wederlegd; vandaar dat hij in het „Appendix", dat zoo straks ter sprake komen zal, op blz. 5 zegt

„Nos || hallucinati sumus in re, quae non facit ad rem. Archimedes peccauit in ip- || sam rem".

en in dit eerste werk „Cyclometria Elemento Duo" bladz. 30.

„Maiorem igitur ambitum habebit polygonum circumscribens: & || ideo latius peccatum ab eo (i. e. Archimede)."

en bladz. 37.

„AT Archimedes conatur demonstrare inductione ad impossibile longitudinem || perimetri paulo minorem esse supra diametrum tripla sesquiseptima. hoc est poten- || tiam perimetri minorem esse, quam 484, cum scilicet quadratum diametri fuerit || 49. Quem errorem satis superior demonstratio refellit. Sed quare hoc sibi & po- || steritati persuaserit, in Prolegomenis declaratum est. „Similis vero absurditas est in || XVIII & XIX περὶ ἑλικων Archimedis."

5. Het is met behulp van de voorgaande en dergelijke redeneeringen, dat hij voor zijne verhouding tusschen den omtrek en de middellijn van den cirkel vindt

$$\sqrt{10} = 3,1622777;$$

waarvan dus slechts de eerste decimaal juist is.

Hij zegt daaromtrent in het eerste gedeelte „De Ambitv Circvli" op blz. 30, 31 het volgende.

„ΣΧΟΛΙΟΝ.

Cvm igitur, vt iam ostensum est, quo pluria fuerint latera Polygoni inscripti, eo ‖ maior reperitur per numeros ambitus eius, quam circuli circumscribentis peripheria: ‖ frustra per numeros Archimedes conatus est peripheriam circuli inuestigare in poly- ‖ gono permultorum laterum circulum circunscribente: cum polygonum circunscri- ‖ bens sit proculdubio longe maius polygono simili inscripto. quod quidem polygo- ‖ num inscriptum ostensum est per numeros maiorem ambitum habere, circulo suo ‖ circunscribente. Maiorem igitur ambitum habebit polygonum circunscribens: &c. ‖ ideo latius peccatum ab eo.

Nobile est hoc paradoxon in Geometria, & ipsi, vt iam tetigimus, Archimedi ‖ non animaduersum. Alioquin non dubium est, quin peripheria sit maior subten- ‖ dente sua. Sed per numeros aliter deprehendetur. quo magis miror Mechanicos, ‖ qui globis superficies Cosmographicas inducunt. Nam ad longitudinem perimetri ‖ circuli assumunt latera omnia, id est totum ambitum Dodecagoni maximo circulo ‖ sphaerae ipsius inscripti. Non enim video, quomodo perfecte id obire possint. & ‖ non leuiter miratus cum, sum haec praecipi legissem à magno Daniele Barbaro. Nam de vulgo nihil mirum".

En daarop laat hij dan volgen

„Propositio VI. Theorema.

„Quadratum ab ambitu circuli decuplum est qua- ‖ drati à diametro".

Een tweede bewijs van deze stelling begint aldus op blz. 33.

„Aliter

Ea est natura volutae luxatae, veluti demonstrauit Dinostratus, ‖ vt semidiametrus circuli sit media proportionalis inter maius se- ‖ gmentum quod fit à fine volutae (quae vocatur cõgruens) & quadran- ‖ tem perimetri circuli. Sed cõgruens ipsa ostensa est supra, propositione ‖ III esse media proportionalis inter ipsam semidiametrum, & duas ‖ quintas eius."

6. Het schijnt dat deze arbeid reeds voor de uitgave ruchtbaarheid verkregen heeft, en alzoo reeds toen daarop aanmer-

kingen zijn gemaakt. Althans begint hij zijn "CANDIDO LECTORI || SALVTEM" aldus.

"CVM in animo haberem haec Elementa describere, || quae valde confusa & perturbata in schedis liturariis || habebam: morbo longo oppressus rem diu distuli. || Quia vero iamdudum tam amicorum preces, quam || maleuolorum conuicia hanc editionem diu deside- || rari non patiebantur, imperaui mihi: & quamuis à || longo & molesto morbo me nondum recepissem: tamen non minus || ab animo, quam a corpore aeger coepi illa confusa vtcunque digerere, || & in mundum transcribere. Sed non potui facere, quin, quemad- || modum morbus in nobis multa sui, ita nos in scriptura multa mor- || bi vestigia reliquerimus; qualia scilicet, sunt litera alia pro alia, ver- || bum pro verbo, vt *διπλάσιον* pro *δεκαπλάσιον*, *πρόβλημα* pro *θεώρημα*, & si- || milia; quae tu, candide lector, tam beneuole mihi condonabis, quam || facile deprehendes ea, non mentis, sed calami properantis errata || esse At id, quod nunc dicam, quamuis & ipsum manus festinantis || erratum est, tamen maleuoli in aliam partem interpretari possent. || "

Op deze wijze hoopte hij zeker den opkomenden storm te bezweren; maar dit schijnt hem niet gelukt te zijn, want slechts een half jaar na de "Cyclometria Elementa Duo" gaf SCALIGER zijn "Appendix ad cyclometria sua" in het licht; de beide werken toch zijn gedateerd, het eerste "Kal. Junij CIↃ.IↃ.XCIV" en het tweede "X Kal. Decembris" van dat zelfde jaar. Aan dit werk, dat evenzeer uit de pers van FRANCISCUS RAPHELENGIUS te voorschijn kwam, werd echter lang zoo veel zorg niet besteed, als aan het eerste. Het formaat is kleiner, de druk van figuren en letters met rooden inkt ontbreekt hier geheel; in het algemeen ziet dit boek er veel minder net uit dan het voorgaande; echter, op zich zelf beschouwd, behoeft die boekdrukker zich toch niet daarover te schamen. Wellicht dat SCALIGER met dezen "Appendix" te veel haast heeft gemaakt, om een even nette uitvoering toe te laten.

In de voorreden "Candido Lectori" beklaagt SCALIGER zich op ironischen, soms scherpen toon, over de miskenning, zooals hij dat noemt, die aan zijn eersten arbeid is ten deel gevallen. Men leest daar in het begin.

„Non diu mihi expectandum fuit, candide Lector, || quid iudicii foret doctis Mathematicis de meo Cy- || clometrico, quod ineunte aestate proxima emisi- || mus. Vix in manus librum sumpserunt, cum le- || gem horrendi carminis pronunciarunt, & confi- || dentissime dixerunt πάνθ' ἑλικτά, κοὐδὲν ὑγιές. Vix in || vnam, aut alteram propositionem oculos coniece- || rant, rem factam habuerunt, ἐξ ὄνυχος τ'λέοντα co- || gnouerunt. Quid faciam tot aduersis petitus? Nam manifesto teneor. Hoc || enim iudicium a contemptu studiorum nostrorum natum plane adoleuit & || confirmatum est hallucinationibus illis, quae nobis de ambitu Dodecago- || ni, & imperfecta demonstratione rationis perimetri ad diametrum excide- || runt. Magnum crimen est, & magnis accusationibus pulsamur. Non || Mathematicorum modo, sed etiam vulgi, etiam muliercularum ipsarum || aures nostris erroribus personantur . . . || . . . || Equidem scio mihi rem esse cum summis in- || geniis toto vitae tempore in hoc studiorum genere subactis: illos Mathema- || ticos esse, me Mathematices tantum studiosum."

Op bladz. 5:

„Nam si propter duas futiles demonstrationes, totum opus non est nauci, to- || ta eorum Geometria non est vnius assis propter tam futile iudicium. Tamen || nemo est hodie vel doctus, vel indoctus, qui non putet & eos vera loqui & nos operam lusisse. Quos nos non magis mouet, quam illi libri, quos || multi in nos parati sunt scribere. In quibus nihil aluid, quam inscitiam || suam prodent".

en bladz. 6:

„Quod dico, quia quidam hariolantur a nescio quo, (nomen enim perdidi,) || me hanc rationem furatum esse: quem ego auctorem non magis antehac || sciebam natū fuisse, quam illum alium . . ."

Zijn beklag verandert dus allengs in minachting, en op hoogen toon gaat hij voort.

„Quia igitur, quod || nemo hactenus potuit facere, nos & lineam Dinostrati descripsimus, & quae || esset ratio peripheriae ad diametrum, indicauimus, & potentiae circuli recti- || lineum aequale dedimus: non veriti sumus illustrissimis ordinibus Hollan- || diae, Zeelandiae, & West-Frisiae rem nouam, & a multis saeculis

frustra vexa- || tam dedicare. Quem meum gratum animum ipsi magnifico & illustri || munere prosecuti sunt: quo nomine gratias illis egimus, quas tantis viris || debuit homo ita natus, ita altus, ita educatus, vt ego".

In dit Supplementum handelt hij op nieuw over eenige stellingen van zijn eerste werk; de vier eerste zijn de 1ste en 2de, de 3de, de 6de en de 8ste van het gedeelte "de Ambitv Circvli"; de drie volgende zijn de drie eerste van het andere gedeelte "de Potentia Circuli". Overigens is er in zijne betoogtrant niets veranderd.

Hij eindigt bladz. 20 met het vers.

> Famae, beatus, qui me superuixit suae,
> Illisque meruit interesse laudibus,
> Quas vita non dat, funus ac cinis darent.
> Bonis liceret, si liceret per malos,
> Viuis negata gloria viuis frui.
> Sed si bonorum iudicia de me mei
> Tardauit aeui liuor, ac malignitas;
> Meam loquentes gloriam nepotibus
> Iniuriam horum non tacebunt posteri".

7. Men ziet dus, dat hij nog volstrekt niet bekeerd was, de "hallucinationes" aan zijne tegenstanders toeschreef, en steeds bleef beweren, dat zijne ontdekkingen de waarheid eindelijk aan het licht hadden gebracht. Waarschijnlijk echter waren toen slechts de tegenwerpingen van LUDOLF VAN CEULEN — waarvoor hij eene innige verachting schijnt gekoesterd te hebben, — en misschien die van J. ERRARD hem bekend. De bestrijding door ADRIANUS ROMANUS, door CHRISTOPHORUS CLAVIUS, door PETRUS ANTONIUS CATALDI, door FRANCISCUS VIETA is van latere dagteekening.

Uit de vermelding dezer doorluchtige namen op wiskundig gebied, in bestrijding van onzen niet minder doorluchtigen geleerde, blijkt wederom hetgeen wij vroeger opmerkten, hoezeer zulke geschriften over de cirkelquadratuur, hoe weinig wetenschappelijk deze dan ook waren, toch niet met een verachtelijk stilzwijgen worden begroet; maar de groote wiskundigen in het strijdperk riepen, en alzoo tot nut, bevestiging en uitbreiding

der wetenschap aanleiding gaven. In een vorig nummer dezer Bouwstoffen zagen wij dan ook, hoe deze waarschijnlijk de oorsprong zijn geweest van de schoone onderzoekingen en uitkomsten van LUDOLF VAN CEULEN. Laat ons nu zien, wat wij omtrent de verschillende bestrijdingen van SCALIGER te weten kunnen komen, terwijl die van ADRIANUS ROMANUS later vermeld zal worden, wanneer over dien geleerde zelven zal worden gehandeld.

Een enkele maal vindt men hierbij nog vermeldt het even bijzondere werk van SCALIGER „MÉSOLABIUM" [8]), dat tegelijk met zijne Quadratuur het licht zag.

8. Zooals wij boven opmerkten, hebben wij reeds in N°. VIII der Bouwstoffen gehandeld over de bestrijding van SCALIGER door LUDOLF VAN CEULEN. Al de bijzonderheden van dezen strijd zouden voor ons verloren zijn gegaan, — wij zagen zulks reeds daar ter plaatse, — ware het niet, dat deze ons zijn beschreven door ADRIANUS ROMANUS in zijn evenzeer aldaar aangehaald werk, gewoonlijk genoemd „Apologia pro Archimede" [9]).

In hetzelfde voorwoord „Lectori Philomathi S.", bladzijden 55—57 voor zijne „Exercitationes Cyclicae", geeft ADRIAAN VAN ROOMEN ons nog den brief van SCALIGER ten beste, dien deze hem gezonden had in antwoord op zijne aanmerkingen tegen SCALIGER's quadratuur, en op zijne verdediging van de bezwaren, die LUDOLF VAN CEULEN daartegen had ingebracht. Die brief teekent ons den schrijver in zoo juiste bijzonderheden, dat wij dien hier zullen inlasschen.

„*Josephus Scaliger Julij Caes. F. Adriano Romano suo S.*

Puto meas literas tibi redditas esse vnà cum appendiicbus ad Cyclometrica || *mea: ex quibus potuisti animaduertere quàm iniquus sim meis erroribus, neque opus esse alio castigatore quàm me ipso, sed sanè opus mihi erat* || *alijs lectoribus, quàm quos hactenus nactus sum vbique sed praesertim apud vos, vbi passim Cyclometrica nostra ita accipiuntur, vt non hu-* || *manitùs errasse, sed lege Maiestatîs commisisse videar, & nihil melius mihi expectandum sit, quàm vt sine prouocatione poenas dem, vt ho-* || *mini libero ne ad respondendum quidem sit receptus. Tu scis de quibus loquor, & qui sunt ij qui literis suis vulgo quotidie de nobis ea disse-* || *runt quibus ipsi potius digni sunt. Non agam cum illis praecise, vt ipsi faciunt.*

Nondum enim dies cessit. Accipe intereà hanc diatribam, || *quam tibi mitto, in qua non solum videbis, quam falsi sint qui Archimede magistro, circulum aequalem faciunt rectangulo sub semidiametro* || *& semipheria contento: sed etiā quam male existimationi suae consuluisse videntur, qui non capere potuerint quod & puero planū fecimus. Rem* || *utilissimam proposuimus. Ipsi eam obtrectationibus suis eludere conantur Volsellis pugnant non gladijs. Lecta mea diatriba, te ipsum iudicem* || *fero, ni inhumanè mecū experiuntur, qui ea vellicant, quae aut non intelligunt, aut si intelligūt nolunt probare, ne cogantur quae pueri didicère,* || *senes perdenda fateri. ἀλλὰ τά μὲν προτετυχθαι ἐάομεν ἀχνύμενοίπερ. Intereà, oro te, mi Romane, si quis locus est humanitati, literarum* || *vinculo, sacris Matheseos, vt diligenter perpendas ea quae in diatribam hanc coniecimus, & vt non solum tibi, sed & alijs scriptam esse sias.* || *Propterea eam illis communica, quos quamuis nobis iniquiores esse sciueris (vt sanè inhumani sunt qui de homine non ita merito, prauè &* || *sentiunt & argutantur) tamen ab his studijs alienos non esse scieueris, imo potiùs quos tibi constabit solidé de his rebus iudicare posse. De pa-* || *ralogismo Archimedis dubitare non potes, & hoc & alia quae ad quadrationē circuli spectare ὀπιςημονικῶς à nobis demonstrata sunt. Vbi ab* || *hominibus praué tenacibus expressero nos circulum quadrasse (uelint nolint hoc fateantur necesse tandem est) posteà ad reliqua pergemus. Er-* || *rores nostros tollemus, eos qui videntur & non sunt expoliemus. Tu intereà, mi Romane, clementius de nobis iudica, quàm hactenus fecisti.* || *Ego libertatem amo sed intra modum, & eam quidem quae homine ingenuo digna est. si me amas rescribas, ad ea quae tibi mitto. Non enim* || *tanti sunt neque tot errores nostri, quanti & quot vobis summis criticis videntur. Vale. Lugduni Batauorum Prid. Kal. April. stilo nouo.* || *Misi tibi Hippoliti canonem cum Appendicibus. Meliorem in partem illud opusculum accipe quàm Cyclometrica nostra. si bène asse-* || *cutus fueris diatribam quam tibi mitto, habes quod poenitentiam exprimat iudicij, quod de me fecisti. sanè omnes boni & docti sciunt me hu-* || *manius accipiendum fuisse. Iterum vale."*

Dien zelfden brief, doch in anderen stijl, vindt men in de boven aangehaalde „Epistolae" blz. 494—496. Epistola CCXXX.

Uit dezen brief leidt ROMANUS te recht af, dat zijne bemoeijin-

gen zonder vrucht zijn gebleven, en dat SCALIGER bij zijne dwalingen bleef volharden. „Quare," zegt hij, id mihi vnicum duntaxat superesse vidi vt aliorum saluti consulerem, ne multi ducem caecum sequē- || tes, simul cum eo (vti dici solet) in foueam cadant".

9. Hij begint echter met de verdeeling van deze bestrijding door J. ERRARD „quod breuis admodum sit", bladz. 56.

„Titulus eius est talis. || *Refutation de quelques propositions du liure de Monsieur de l'Escale, de la quadrature du cercle par luy intitulé, Cyclometrica elementa* || *duo. Au Roy. Par J. Errard de Barle-duc, Ingenieur de sa Maiesté.* Ipsa verò refutatio haec est. *Sire, ie presente à vostre Maiesté ce* || *petit discours, par lequel ie responds sommairement à quelques propositions du liure de monsieur de l'Escale de la quadrature du cercle (qu'il* || *a ces iours passez publié & mis en lumiere) pour deffendre le traicté de Geometrie que i'ay depuis n'aguere dedié à uostre Maiesté, dans le-* || *quel il y a quelques demonstrations d'Archimede, qui seroyent pour la pluspart tres-fausses, si les propositions dudit sieur de l'Escale estoyent* || *certaines. Il est vertueux & plein d'humanité, cela m'asseure qu'il ne prendra point en mauuaise part cest escrit. Or pour n'estre point en-* || *neuyeux à vostre Maiesté et a ceux qui pourront lire ce discours, ie reciterai briefuement l'erreur du paradoxe qu'il met au commencement de* || *son liure en la proposition cinquièsme du premier element.* ||

Il dit donc que le circuit du Dodecagone inscript au cercle peut plu que le circuit du cercle."

Na deze stelling wederlegd te hebben, gaat ERRARD aldus voort (bladz. 57).

„*Je nie aussi qu'aucune supputation d'Arithmeticque puisse destruire vne demonstration Geometrique.* || *Voyla donc le paradoxe de l'Autheur refuté en tout & par tout.* || *Quant à la propsition* (sic) *suiuante, il dit que le quarré du circuit du cercle est decuple au quarré du diametre*".

Ook van het bewijs dezer stelling toont hij de fout aan, of liever hetgeen SCALIGER niet bewezen had.

„*Mais il ne le prouue point: Par ainsi ceste quadrature de cercle demeurera pendue au croc, en-* || *semble tout necessaire.* || *Je laisserai le reste aux plus versez és Mathematiques & sup-*

plierai vostre Maiesté auoir ceci pour agreable. || *De son très-humble & très-obeissant seruiteur J. Errard. A Paris au mois de Septembre* 1594. || Edita autem fuit haec censura Parisiis, apud VVilhelmum Auray, *ruë S. Jean de Beauuais, au Bellephoron couronnè.* M.D.XCIIII."

Maer ook deze bestrijding had SCALIGER niet op den goeden weg gebracht. ROMANUS bericht daaromtrent bladz. 56.

„Scaliger hoc scripto viso, quamprimum & ipse veritatem cognouit, & vltro eo- || dem modo, edita appendice, vnam dammauit, alteram non demonstratam fassus est".

Maar, hoezeer SCALIGER dus aan den eenen kant toegaf, bleef hij toch zijn redeneertrant volhouden, zoo als wij reeds boven zagen; en bovenal gaf hij zijne uitkomst niet op.

10. Van dezen J. ERRARD bezit ik „La Fortification demonstree et reduicte en art. 2de Edition. Paris 1620 [10]). Naar den titel was de schrijver toen reeds overleden, en werd het boek door zijnen neef en ambtgenoot uitgegeven. De „PRIVILEGE DV ROY" leert ons meer. Dit Privilege werd gegeven door „LOVYS PAR LA GRACE DE DIEV ROY DE FRANCE || ET DE NAVARRE", en „Donné à Paris, le vingt-cinquiesme iour de May, l'an de grace || mil six cents quinze, & de nostre Regne le sixiesme". Het begint met het bericht, dat de vorige koning aan „JEAN ERRARD, oncle de l'exposant, || l'vn de ses Ingenieurs ordinaires" reeds „dès l'année mil cinq cents quatre-vingts quatorze" een privilege van tien jaren had verleend voor „toutes ses oeuures de Mathematiques; entre autres, les Liures par luy composez de || Geometrie, des Fortifications, l'Art de la Nauigation, la Mappemonde, de nouuelle reduction"; en dat later dit privilege voor tien jaren verlengd werd den „vingt sixièsme iour de Juillet mil six cents || quatre"; dat deze ERRARD in 1610 overleden zijnde „ledit Errard estant decede", de platen waren gestolen, en daarom nu dit nieuwe privilege aan zijn neef „ALEXIS ERRARD, l'vn de nos Ingenieurs" werd gegeven.

Deze heeft dan ook daaraan beantwoord, blijkens het „ADVERTISSEMENT" „*Je l'ay enrichy de plusieurs Figures*"; hij was een groot voorstander der praktijk, zooals blijkt uit de laatste woorden van dit Advertissement: „*Que si en quelque lieu ie prononce le* || *mot de Sciences, i'entends pourtant vne*

Science Pratique, qui équipole au mot¦ *d'Art, & s'oppose* ‖ *à la Science Speculative qui n'a autre fin que la cognoissance*".

11. Maar uit den DIALOGVS DECIMVS (bladz. 108—112) blijkt ons, dat SCALIGER, hoezeer dan ook door de bestrijding van ROMANUS niet bekeerd, dezen toch daarop een antwoord heeft toegezonden. ROMANUS haalt o. a. het volgende aan.

"*Cum igitur absur-* ‖ *dissima sit opinio vetus, quae à Dinostrato & alijs quadraticum linearum artificibus ad Archimedem transmissa, ab Archimede autem* ‖ *demonstrata* (*si modo demonstrata est*) *in animis posteritatis ita haesit, vt pro vera accepta sit: inuenienda est alia via, quâ ad verum perue-* ‖ *niri possit. Ea autem sola est quae considerat aliquot partes circuli, quae & sibi inuicem, & ipsi circulo sint commensurabiles. Quales sunt qua-* ‖ *tuor illae magnitudines à nobis demonstratae, Segmentum Hexagoni circulo inscripti, & eius Residuum. Triangulum aequilaterum, quinta* ‖ *pars trianguli Hexagoni, et eius Residuum. Cum igitur hae magnitudines non solum in appendice demonstratae sint inuicem commensurabi-* ‖ *les sed ex consequentibus porrò demonstrari possint: habebunt eae rationem inter se, quam numeri ad numeros*".

en iets later,

"ALITER *Circulus est ostensus ex hypothesi Aduersarij excedere infinita* ‖ *magnitudine* 36 *Triangula. At id impossibile est. Ergo Circulus non est maior* 36 *Triangulis. Sed non est minor. Est ergo aequalis* 36 *Trian-* ‖ *gulis. & proinde* 36 *segmentis*".

Men ziet, dat hij zijne manier van redeneering nog niet had veranderd: deze eerste "*Ergo*" kenschetst geheel zijne methode; op die wijze ontwijkt hij elk bewijs zijner paradoxen.

12. Gaan wij thans over tot andere bestrijders van onzen SCALIGER.

CHRISTOPHORUS CLAVIUS BAMBERGENSIS, die in 1537 te Bamberg geboren, te Rome den 6den Februarij 1612 overleed, heette eigenlijk SCHLÜSSEL, en was pater van de orde der Jezuïten. Hij heeft veel over wiskunde en aanverwante wetenschappen, met name over den Gregoriaanschen Kalender ge schreven, en had een grooten naam onder zijne tijdgenooten

verworven; wij zagen reeds in N°. VII dezer Bouwstoffen, dat NICOLAUS RAYMARUS URSUS DITHMARSUS hem het „salve venerande sacerdos" toeroept. Hij verzamelde zijne werken in vijf folio deelen van gemiddeld 750 klein gedrukte bladzijden ieder. In de opdracht van het vierde deel zegt CLAVIUS zelf, die toen te Rome was, — die opdracht is gedateerd „Ro- || MAE Anno Domini M.DC.XXII. Kalend. Januar", dus slechts korten tijd voor zijn overlijden, — dat hij reeds geruimen tijd niet in Bamberg was geweest, en nu door ziekte aan zijn bed was gebonden, waarom hij de taak der uitgave van dezen bundel had opgedragen aan Pater JOHANNUS REINHARDUS ZIEGLER.

„Quia vero & locorum interuallo impedior, & ingrauescēs || quotidie senectus lecto me affixum detinet, vices meas delegaui Re- || uerendo Patri Joanni Reinhardo Zieglero, vt, qui pro suo in Mathe- || maticas disciplinas insigni amore plurimum operae & laboris in eden- || dis Commentarijs meis collocauit, eosdem Celsitudini tvae (dat is JOANNI GODEFRIDO || Episcopo Bambergensi &c.") meo no- || mine offerat".

En hiermede komt overeen, hetgeen dezelfde JOANNES REINHARDUS ZIEGLERUS E SOCIETATE JESV schrijft in de opdracht voor het vijfde deel.

„*Itaq; annis ab hinc duobus initio facto, magnis ope- || ribus & impensis ad finem aliquando peruentum est: &, nisi me animus fallit, me- || liore quam sperare poteram, successu. Hoc vnum ad gaudij mei integritatem maxi- || me deest, quod cum nihil optarem magis quam vt* R. P. CLAVIVS *in vltima iam || vitae meta positus, non ante ex hoc mortalitatis stadio decederet, quam huc suum || partum augustiore à nobis, & nitidiore forma excultū adspiceret ipse, &, si ita vide- || retur, approbaret: multo tamē aliter* DEVS OPT. MAX. *euenire voluerit;*"

en daarop geeft hij den bovenstaanden datum van den dood des schrijvers.

Deze opdracht is gedateerd „MOGVNTIACI, *Die* XXV. *Martij* || ANNO M.DC.XII."

dus slechts weinige dagen na den dood van CLAVIUS.

Van dezen bundel hebben wij hier te maken met de APPENDIX van het vijfde deel, en daaruit slechts met het derde gedeelte „REFVTATIO || CYCLOMETRIAE IOSEPHI SCA- || LIGERI," || bladz.

1—20 [11]). Dit stuk heeft den vorm van een zamenspraak tusschen SCALIGER en CLAVIUS, waarbij de woorden van SCALIGER uit zijne Cyclometria genomen zijn en de bestrijding van CLAVIUS de redeneering van SCALIGER op den voet volgt, en telkens het onhoudbare, het niet bewezene aantoont, of ook doet uitkomen, hoe SCALIGER met zich zelven in tegenspraak komt. Hoe de toon is van deze bestrijding door CLAVIUS, moge uit een paar aanhalingen blijken. Hij begint aldus.

„ELEMENTA Cyclometrica Josephi Scaligeri eiusmodi sunt, vt indigna sint omnino homi- || ne Mathematico". . . . . .

Discet fortasse vel plus sapere, vel parcius scribere: discet se solum || hominem non putare: & nisi si eius rei peritus indocilis, discet posse dimicationes in re literaria, etiam ab ho || mine non gladiatore, (hier doelt hij op LUDOLF VAN CEULEN) exerceri.

Praesertim cum plerasque huius hominis ineptias erudite *Franciscus Vieta* Gallus, || *Adrianus Romanus* Belga, Mathematici praestantes, alibi etiam alij confutauerint".

QVAM multa de te iactas Josephe Scaliger hac epistola, quam vero gloriose, quam tumide, & quo te vt || arbitror, non malum panegyristen probares, incepisti à cunabulis."

terwijl hij eindigt bladz. 20.

„PROPOSVI candide Lector, quantum in me fuit, specimē aliquod doctrinae, seu mauis inscitiae Scaligeri || in re Geometrica; breuius fortasse & moderatius, quam & eius innumerabilia flagitia postulabant, & hominis || impudens petulantia extorquere abinuito videri potuit:

Atque illud || postremo ex me habeto, hominem te vel nulla virtvte, vt ait ille, redemptum à vitijs, amare tamen possumus, || improbum te non odisse, etiā non fuerit nobis difficillimū· Allatrantem in bonos, laudatosq; viros, quietos ho- || mines irritantem; mendacem, falsumque Mathematicum, inpurum, impium, non homines, non Deus, cuius || tibi iram ingentem iram thesaurisas, patietur".

Hieruit blijkt dus, dat CLAVIUS de wederlegging wel ernstig opneemt; trouwens beide mannen waren in vele opzichten, in godsdienst, in politiek, elkanders tegenvoeters; en CLAVIUS had bovendien verschillende twisten met SCALIGER gehad: onder anderen over den Gregoriaanschen Calender. Hiertegen had SCA-

LIGER geschreven de Hyppoliti Episcopi Canon Paschalis, Josephi Scaligeri elenchus et Castigatio Anni Gregoriani" [12]), waarop CLAVIUS in het volgende jaar antwoordde met zijn "Io. Scaligeri Elenchus et Castigatio Anni Gregoriani a Clavio castigata, Romae 1595", in 4°., dat in zijne Opera is opgenomen.

Deze "Opera omnia" bevatten in het eerste deel

Commentarium in Euclidis Elementa Geometrica. bladz. 1–638.

Commentarium in Sphaerica Theodosii. bladz. 1—48.

Sinuum, Tangentium & Secantium rationem & Canones. bladz. 59—148.

Tractationem triangulorum tum rectilineorum, tum sphaericorum. bladz. 149—250;

In het tweede deel

GEOMETRIAM PRACTICAM. bladz. 1—230 en 14 bladz.

ARITHMETICAM PRACTICAM. bladz. 1—78 en 6 bladz.

ALGEBRAM. bladz. 1—182.

In het derde deel

COMMENTARIUM IN SPHAERAM IOANNIS || DE SACRO BOSCO. bladz. 1—317 en 21 bladz.

ASTROLABIVM. blz. 1—34 en 20 bladz.

In het vierde deel

GNOMONICES LIBROS OCTO. bladz. 1—552 en 8, 12 bladz.

FABRICAM ET VSUM INSTRVMENTI AD HOROLOGIORVM || descriptionem peropportuni. bladz. 1—60.

HOROLOGIORVM NOVAM DESCRIPTIONEM. bladz 1—210.

COMPENDIVM BREVISSIMVM DESCRIBENDORVM HORO- || logiorvm horizontalivm ac declinantivm. bladz. 211—229.

NOTAS IN NOVAM HOROLOGIORVM DESCRIPTIONEM. bladz 230—240 en 3 bladz.

In het vijfde deel

ROMANI CALENDARII à GREGORIO XIII. P. M. RESTI- || TVTI Explicationem S. D. N. CLEMENTIS VIII. P. M. || jussu editam. bladz. 1—596 en 12, 26 bladz.

NOVI CALENDARII ROMANI APOLOGIAM aduersus Mi- || chaelem Maestlinum Gaeppingensem in Tubingensi Academia || Mathematicum duabus libris explicatam. bladz. 1—122.

APPENDICEM AD NOVI CALENDARII ROMANI Apologiam || in qua Josephus Scaliger, Georgius Germanus, & Franciscus ||

Vieta, qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt, || seorsim singuli confutantur. Accessit refutatio Cyclometriae || eiusdem Scaligeri. bladz. 1—66, 1—20, 1—24.

Van deze werken bezit ik nog afzonderlijk zijn „Commentarivs in sphaeram Joannis de Sacro Bosco, 3e Ed. te Venetie 1596 [13]), en daarvan eene latere uitgave, eveneens van CLAVIUS zelven, S. Gervasii, 1608 [14]), waaruit blijkt dat de eerste uitgave in 1581 verschenen is. Verder zijn „Geometria Practica, Mogvntiae, 1606” [15]), en zijn „Algebra, Roma, 1608” [16]).

13. Thans komen wij tot de bestrijding van PETRUS ANTONIUS CATALDI, wiens geschriften tamelijk zeldzaam zijn; hier op de bibliotheek der Leidsche Hoogeschool bevindt zich een bundel, waarin vooreerst voorkomt zijn „TRATTATO || DELLA QVADRATVRA || DEL CERCHIO”, Bologna, 1612 [17]) en het laatste gedeelte van zijn „DIFFESA D'ARCHIMEDE”, Bologna, 1620 [18]) en wel met afzonderlijke paginatuur 1—32. In het „PROEMIO” voor het eerste boekje, op bladz. 1, komt voor eene verwijzing naar het tweede boekje.

„Come io mostro vel mio Trattato della Diffesa d'Archimede, diffenden- || dolo in particolare dalle Oppositioni del Signor Joseffe Scaligero, Et da alcuni altri, che con- || tro la sua salda Dottrina.”

Neemt men hierbij in aanmerking, dat het laatste gedeelte van de aangehaalde „DIFFESA D'ARCHIMEDE” op bladz. 32 sluit met den datum

„*Die.* 10. *Junij* 1599. *paulò ante hor.* 15. *horologij Bononiae.*” dan ligt het vermoeden voor de hand, dat er tusschen 1599 en 1612 reeds eene uitgave van de „Diffesa” is verschenen.

Na dit „Proemio” op bladz. 1 en 2 van het boekje van Noot 17, volgt op bladz. 3 en 4, „In questo foglio si dà regola, e modo facilissimo || di quadrare il Cerchio, nuouamente trouato da || M. Pellegrino Borrello, Mathematico Reggiano”. De opdracht „*Al Sereniss. Sig. il Sig. D. Cesare d'Este Duca di Reggio. Modona,* (sic) *&c.*” is geteekend „Di Reggio il di 6. di Maggio 1609”; BORELLUS noemt zich aldaar „Professore di Mathematica”. Onder op bladz. 4 sluit dit stuk met de woorden: „*In Reggio, Appresso Flauio, e Flaminio Bartholi* 1609. *Con licenza de' Superiori*”. Deze quadratuur is $3\frac{69}{484}=\left(1\frac{17}{22}\right)^2$,

juist de eerste van SIMON VAN DER EYCKE. Na de behandeling dezer uitkomst en het nagaan van hetgeen er op dit gebied door CLAVIUS, LUDOLF VAN CEULEN, CHRISTOPHORUS GRUENBERGIUS was gewerkt, gaat hij op bladz. 9 over tot de „OPERATIONI NVMERALI", waarop bladz. 39 volgt:

„*Alcune considerationi intorno alle trasmutationi, ò trasformationi nelle figure curuilinee,* || *& miste di archi di parte circonferentiali di cerchio.*

Eindelijk bladz. 45: SEGVITANO ALCVNI AVVERTIMENTI || *intorno alle figure Quadrilatere, & altre.*"

Hij eindigt op bladz. 55.

Nulla res est, vel non planè ardua, quae illustri patrocinio non indigeat, || *vt rectè, maturèq; perfici, ac impretari possit.* || DOMINE EXAVDI ORATIONEM MEAM."

De in verso en vier volgende bladzijden bevatten de platen met dertig figuren.

Gaan wij over tot de beschrijving van het tweede boekje, dat geen titel heeft. Boven aan bladz. 1 staat „COME SI TROVI LA GRANDEZZA, O SVPERFICIE DEL CERCHIO," waarin op bladz. 18 de cirkelquadratuur van SIMON VAN DER EYCKE wordt besproken, naar het „*Fundamentum Astronomicum Nicolai Raymari Vrsi Dithmarsi.*"

Daarop volgt bladz. 33, (zonder paginatuur) „COME SI TROVI LA SVPERFICIE, || *& grandezza corporea della Sfera, ò Corpo tondo,*" en dan twee bladzijden met 18 figuren. Op bladz. 36 (zonder paginatuur) vindt men

„OPERE STAMPATE DI PIETR' ANTONIO CATALDI," die eene belangrijke bijdrage levert voor bibliograpbie. Zij geeft

Aritmetica vniuersale, in foglio.

Trattato del modo breuissimo di trouare la radice quadra delli numeri, in foglio.

Trattato della Quadratura del Cerchio, in foglio (het werk van noot 17.).

Algebra proportionale, in foglio.

Nuoua Algebra proportionale, in foglio.

Regola della Quantità o Cosa di cosa, in foglio.

Algebra Discursiua numerale, & lineale, in foglio.

Diffesa d'Archimede dalle Oppositioni del Signor Gioseffe Scaligero, in foglio (het werk van noot 18).

Trattato Geometrico, doue si esamina il modo di formare il Pentagono sopta ad vna linea retta, descritto da Alberto Durero, in foglio.

Elementi delle quantità irrationali o inesplicabili, in foglio.

Trattato delli Elementi delle quantità Algebraiche, in foglio.

Trasformatione Geometrica, in foglio reale.

Transformatio Geometrica.

La Reduttione alla Prattica, delli sei primi libri delli Elementi d'Euclide.

Opusculum de lineis rectis aequidistantibus, & non aequidistantibus, in quarto.

Operetta delle linee rette equidistanti, & non equidistanti, in quarto.

Trattato delli numeri perfetti, in quarto.

Prima lettione nel principio del leggere Euclide nello Studio di Perugia alli 12. di Maggio 1572. Et due lettioni fatteui nella Academia del Disegno, in quarto.

Operetta di Ordinanze quadre di Terreno, & di gente, & altre con alcuni quesiti intorno alle Ordinanze diuerse, in quarto.

Due lettioni fatte nella Academia erigenda del trouare la grandezza delle figure rettilinee, & Aggionta del trouare la grandezza, & superficie delle Sfere, & parte loro. Et delle cinque zone terrestri, & parti loro, in quarto.

Hij voegt daarbij

Molte altre Opere composte, & che si vanno componendo si Stampiariano quando vi fusse la commodità.

Van deze verschillende werken bezit ik het „Opusculum de lineis rectis aequidistantibus et non aequidistantibus, Bononia, 1607.4°. [19]). waarin hij in 15 theoremata, drie corolloria en een Problema, het vijfde Postulatum en de zevende Propositio uit het Eerste Boek der Elementen van Euclides, over de evenwijdige lijnen handelt.

14. Is de bestrijding van CATALDI eene ernstige, die van CLAVIUS getuigde van toorn en gekrenkt gevoel. Daarentegen is die van Vieta, die ons nu ten slotte nog zal bezig houden, eene geestige bespotting. Men vindt die in de uitgaven zijner „Opera Mathematica, opera et studio Francisci à Schooten Lugd. Bat. 1646" [20]) en wel in het Opus XIII. MVNIMEN || ADVERSVS NOVA || CYCLOMETRICA || Seu || *ΑΝΤΙΠΕΛΕΚΥΣ.* bladz. 436—446,

terwijl reeds in opus VIII voorkomt „PSEVDO-MESOLABVM || & alia quaedam || ADIVNCTA CAPITVLA" bladz. 258—285.

In geen van deze beide stukken wordt de naam van SCALIGER genoemd, maar toch worden zijne stellingen en beweringen bespottelijk gemaakt en wiskundig wederlegd; waarbij de eigenaardige redeneertrant van SCALIGER, zijn invoeren telkens van grieksche woorden, enz., nauwkeurig worden nagebootst.

VIETA begint zijn Munimen aldus.

„LVSERVNT illi operam infeliciter, qui suis, quas Secu- || riclas vocant, figuris conati sunt circulum triginta sex || segmentis hexagoni adaequare. Quid enim certi ex ma- || gnitudinibus plane incertis poterant resolvendo conse- || qui? . . . || . . . sed in vicium, quod || Logici appellant ἄιτημα τοῦ αἰτήματους, Diophantaei ἀνισότηθα, incident, aut || demum falso seipsos deludent calculo. || . . . Sunt autem imbelles, qui μονοστομους istas || bipennes reformidant, & jam ab iis sauciatum deflent Archimedem. . . . || . . . Quo tamen un- || dique sint tutiores,

Nubigeros clypeos, intactaques caedibus arma,

sed δυσσελεκηθὰ, quibus primum sese muniant, profero, subministraturus πο- || λεμικὰ, si forte hostium ferocior audacia est. || PROPOSITIO I. || AMBITVS dodecagoni circulo inscripti, minorem habet rationem || ad diametrum, tripla sesquioctava."

Op bladz. 445 begint „SECVNDAE *ΠΕΛΕΚΥΟΜΑΧΙΑΣ* || hypotyposis, ἐκ τοῦ προσθηκιδιου", en VIETA eindigt op bladz. 446 met

„*ΨΕΥΔΟΠΟΡΙΣΜΑ.* || Ergo triginta septem triangula BEF sunt majora triginta sex segmen- || tis BCDF. || Elenchus ασυλλογιστιας. || In Grammaticis, dare navibus Austros, & dare naves Austris, sunt aeque significantia. || Sed in Geometricis, aliud est adsumpsisse circulum BCD non esse majorem triginta || sex segmentis BCDF, aliud circulo BCD non esse majora triginta sex segmenta BCDF. || Illa adsumptiuncula vera est, haec falsa.

Cum igitur ita arguo

Triginta septem triangula majora sunt circulo.

Sed triginta sex segmenta non sunt majora circulo.

Ergo triginta septem triangula majora sunt triginta sex segmentis.

Syllogistice concludo, sed falso, quia falsum adsumo.

Pecco autem in leges Logicas cum in hanc formulam syllogismum instituo.

Circulus minor est triginta septem triangulis.

Circulus non est major triginta sex segmentis.

Ergo triginta septem triangula sunt majora triginta sex segmentis.

Est autem ὀφθαλμικὸν σφαλμα, non διανοηθικον. Cum enim initio vere proposuissent ‖ Cyclometrae circulum non esse majorem triginta sex segmentis hexagoni, legerunt ex ‖ postfacto non esse minorem, atque inde suum elicuerunt Corollarium. ‖ Finis."

Ook zijn "Pseudo-Mesolabvm" begint hij op dergelijke wijze. bladz. 258.

Pseudo-Mesolabum fabrico, ut, Pseudo-Mesolabvm, illi- ‖ bata Eratosthenis, cujus quidem epicherema fuit δυσμη- ‖ χανον, sed generaliter ac vere propositum, laude & gloria. ‖ ... Quare quatuor rectas proportionales in mu- ‖ tua sectione inscriptae & diametri ita speculabor, ut non ideo mihi appa- ‖ reat esse continue proportionales, quia erant, & sequuta est ἔφαρμοσις, ‖ sed το διότι in eo situ expendam, earum genesin a seipsis repetiturus, atque ‖ adeo angulorum, qui in ea sectione fiunt, & deluserunt incautos, sympto- ‖ mata adnotaturus. Sic igitur demonstro, sic facio."

Op diezelfde wijze voortredeneerende, eindigt hij op bladz. 274 met het

"Ψευδο προβλημα. ‖ Datis duobus lineis rectis, invenire duas medias continue proportionales."

15. Heeft dus onze SCALIGER met zijne Cyclometrica en zijn Mesolabium weinig eer behaald: het kan niet ontkend worden, dat zijne "Prolegomena in Cyclometrica" (pag. 1—16) van groote geleerdheid getuigen. Daarin toch behandelt hij de onderzoekingen van LEON NEOCLIDIS discipulus, CONON SAMIUS, ARCHIMEDES, HIPPOCRATES CHIUS, ARISTOTELES, APOLLONIUS PERGAEUS, PHILO GADARENUS, HIPPIAS, DINOSTRATUS, SPORUS NICENUS, PAPPUS ALEXANDRINUS, BRYSON, ANTIPHO, PLAUTUS, EUDOXUS, EUCLIDES, CHRYSIPPUS, NICOMEDES, PHILIPONUS, PTOLEMAEUS, en van de nieuwere ORONTIUS FINAEUS, NICOLAUS DE CUSA, JOHANNES REGIOMONTANUS.

AANTEEKENINGEN.

1)* M. MANILI || ASTRONOMI- || CΩN. LIBRI || QVINQVE. || JOSEPHVS SCALIGER || JVL. CAES. F. RESENSVIT, || ac pristino ordini suo restituit. || *Eiusdem* JOS. SCALIGERI *Commentarius* || *in eosdem libros, &* *Castigationum* || *explicationes.* || Vignette: een tuinman, die een boom snoeit, met motto: NOLI ALTUM SAPERE SED TIME. || LVTETIAE, || Apud Mamertum Patissonium Typographum || Regium, in officinâ Roberti Stephani. || M.D.LXXIX. || CVM PRIVILEGIO REGIS. in 8°.

XII pages, en A—t pag. 1—292 en 12 bladz. (zonder paginatuur).

2)* JOSEPHI SCALIGERI || JULJ. CAESARIS F. || OPVS || DE || EMENDATIONE || TEMPORVM: || Hac postrema Editione, ex Auctoris ipsius manuscripto, || emendatius, magnaque accessione || auctius. || ADDITA VETERVM GRAECORVM || Fragmenta selecta; || *Quibus loci aliquot obscurissimi Chronologiae Sacrae, & Bibliorum illustrantur:* || *Cum* NOTIS *eiusdem Scaligeri.* || Vignette: een gekroonde salamander in het vuur. || COLONIAE ALLOBROGUM, || Typis ROVERIANIS. || M.DC.XXIX. || *Cum Priuilegio Sacrae Caesareae Maiestatis.* in folio.

α, XVI bladz. bevat verkorte titel vóór dezen. Daarna de opdracht: „DOMINO || ACHILLI HARLAEO || EQVITI, || AMPLISSIMI SENATVS. || PARISIENSIS PRINCIPI". (4 bladz.), 6 bladz. verzen en aanhalingen.

β—ζ. bladz. I—LIII „PROLEGOMENA" en 4 bladz. (zonder paginatuur) CONSPECTUS.

A—Zzz. bladz. 1—784 en 48 bladz. (zonder paginatuur) de „NOMENCLATOR" en drie INDICES.

a—e., bladz. 1—60. VETERVM || GRAECORVM || FRAGMENTA || SELECTA. ||

3)* JOSEPHI || SCALIGERI || JVL. CAES. F. || DE || RE || NVMMARIA || Dissertatio, || LIBER POSTHVMVS: || *Ex Bibliotheca Academiae* || *Lugd. Bat.* || Vignette: een passer met het motto: LABORE ET CONSTANTIA. || EX OFFICINA PLANTINIANA || RAPHELENGIJ, || 1616. in 8°.

XVI bladz. (zonder paginatuur) bevatten: titel, opdracht „*Nobi-*

lissimis & Amplissimis Viris, || *Academiae Lugduno Batauae* || CVRATORIBVS || .... || ET || *Amplissimis Prudentissimisqve viris,* || *Reipublicae Leydensis* || CONSVLIBVS, || .... || *Amplissimo Prudentissimoque Viro* || .... || Eiusdem Reip. SYNDICO & DD. || Curatoribus A. SECRETIS." van WILLEBRORDVS SNELLIVS (9 bladz.) NOMINA AVTORVM (5 bladz.).

A—t, bladz. 1—112.

Het werk werd na des schrijvers dood door W. SNELLIUS uitgevoerd.

4)* WILEBRORDI (sic) SNELLII R. F. || DE || RE NVMMARIA || Liber singularis. || Vignette: de passer met het devies: „LABORE ET CONSTANTIA. || EX OFFICINA PLANTINIANA || RAPHELENGII, || M.D.CXIII. in 8°.

Het boek is dus te Leiden gedrukt.

8 bladz., zonder pagineering, bevat de opdracht „*Clarissimo Consultissimoque* || *viro,* || HVGONI GROTIO, || Hollandiae & Zelandiae || FISCI ADVOCATO."

a—c, bladz. 1—72.

5)* ILLVSTRISS. VIRI || JOSEPHI SCALIGERI, || IVLII CAES. A. BVRDEN. F. || EPISTOLAE || omnes quae reperiri potuerunt, nùnc || primum collectae ac editae. || *Caeteris praefixa est ea quae est De Gente* SCALIGERA; || *in qua de autoris vita; & sub finem* DANIELIS || HEINSII *De morte eius altera.* || Vignette; een boom met tuinman en devies: „NON SOLUS". || LVGDVNI BATAVORVM. || Ex Officinâ BONAVENTVRAE & ABRAHAMI || ELZEVIR. Academ. Typograph. || cIɔ Iɔc XXVII. || *Cum Privilegio.* in 8°.

24 bladz. bevatten in verso van den titel, het „Summa Privilegij". gedateerd, met g e s c h r e v e n letters, „Cal. April 1627"; dan de opdracht aan de Curatoren der Leidsche Hoogeschool, door de Gebroeders ELZEVIER, (4 bladz.): het „AMICO LECTORI (3 bladz.); „Elogia eruditorum || DE || JOSEPHO SCALIGERI" (5 bladz.) „APOTHEOSIS || JOSEPHI SCALIGERI || ex Manibus ejus à DANIELE HEINSIO || conscriptis" (4 bladz.) „INDEX || EORVM AD QVOS EPISTOLAE || hae sunt scriptae" (4 bladz.) „Errata" (2 bladz.) en een opdracht aan SCALIGER (1 bladz.).

A—Kkk. bladz. 1—887, het werk zelf.

6)* JOSEPHI || SCALIGERI || JUL. CAES. F. || CYCLOMETRICA || ELEMENTA DVO || AD || ILLVSTRES NOB. AMPLISS. Q. HOLLANDIAE || WESTFRISIAE ET ZEELANDIAE || ORDINES. || Vignette: twee beelden naast een wapenschild met een open passer, daarboven: LABORE || ET || CONSTAN- || TIA. || LVGDVNI BATAVORVM, || EX OFFICINA PLANTINIANA, || Apud Franciscum Raphelengium. || cIɔ Iɔxciv. in fol.

XII bladz. bevatten: titel, opdracht aan de „HOLLANDIAE. || WEST-FRISIAE || ET. || ZEELANDIAE || ORDINIBVS" (6 bladz.) geteekend „Lugduni Ba-||tauorum. Kal. Junij. CIƆIƆ XCIV; een „CANDIDO LECTORI || SALVTEM" (3 bladz.), waarin hij verschillende schrijffouten aangeeft, die hij aan zijn ziekelijken toestand toeschrijft „& quamuis à || longo & molesto morbo me nondum recepissem: tamen non minus || ab animo, quam a corpore aeger coepi illa confusa utcunque digerere, || & in mundum transcribere ... quae (morbi vestigia) tu, candide lector, tam beneuole mihi condonabis, quam || facile deprehendes ea, non mentis, sed calami properantis errata || esse."

Hierop volgt het merkwaardige stuk (1 bladz.) voor den Nederlandschen boekhandel.

HENRICI, || D.G. || CHRISTIANISSIMI || FRANCIAE ET NAVARRAE || REGIS, || SANCTIONE CAVTVM EST: || NE QVIS, QUOSCVNQUE LIBROS NVNQVAM ANTE EDITOS || FRANCISCVS RAPHELENGIVS, CHRISTOPHORI PLANTINI || GENER, PRIMVS TYPIS VVLGAVERIT, EOSDEM, CITRA IPSIVS || (RAPHELENGII) VOLVNTATEM, INTRA PROXIMVM A PRIMA || CVJVSQVE LIBRI EDITIONE DECENNIVM, TOTOS VEL EX PARTE, || IN VLLIS REGNI FRANCIAE DITIONIBVS IMITARI, EXCVDERE, || ALIBIVE EXCVSOS IN IISDEM VENALES EXPONERE AVDEAT. ||

PRIVILEGII CONDITIONES, INDICTAEQVE INFRACTORIBVS || MVLCTAE, LATIVS CONTINENTVR IN LITERIS REGIIS DATIS || SIGILLATISQVE IN CONSILIO REGIS, PARISIIS, XXI. APRILIS, || ANNO CIƆ. IƆ. XCIV. ET REG. IPSIVS QVINTO, AC SIGNATIS, || DE BAIGNEAVLX. ||

Exemplar Priuilegij Regij in fine || *Mesolabij adpositum est.*

A—P bladz. 1—122 bevat

Bladz. 1—16, PROLEGOMENA || IN || CYCLOMETRICA || Elementa. || *Ad candidum Lectorem.*

Bladz. 17—67, CYCLOMETRICVM ELEMENTVM || PRIVS, QVOD ET CYCLOPERIMETRICON || dicitur, siue De ambitu circuli. (Propositiones XVII.)

Bladz. 68—122 (moet zijn: 124), CYCLOMETRICVM ELEMENTVM || POSTERIVS, QVOD ET CYCLODYNAMICON || Siue de potentia circuli dicitur. (Propositiones XIX.)

Daarop volgt de titel

JOSEPHI || SCALIGERI || JVL. CAES. F. || MESOLABIVM. || AD || Nobiles Academiae Lugdunensi Batauorum || CVRATORES, || Et Magnificos eiusdem ciuitatis || CONSVLES. || Vignette: hetzelfde ornament als boven. || LVGDVNI BATAVORVM || EX OFFICINA PLANTINIANA, || Apud Franciscum Raphalengium. || CIƆ. IƆ. XCIV.

a—d bladz. 1—34 bevat de opdracht (7 bladz), geteekend: „Lugdini Batauorum. Kalend. Junij || CIƆ.IƆ.XCIIII.. Dan

Bladz. 9—13 PROLEGOMENA || IN || MESOLABIVM. || *Ad candidum Lectorem.*"

Bladz. 14—34 ΜΕΣΟΛΑΒΙΟΝ. (Propositiones VIII.)

Bladz. 35 (zonder pagineering) vindt men het „Priuilege du Roy de France."

Het boek is vol met grieksche uitdrukkingen en opschriften. De meetkundige figuren, en alles wat daarop betrekking heeft, is met rooden inkt gedrukt.

7) JOSEPHI || SCALIGERI || JVL. CAES. F. || APPENDIX || AD CYCLOMETRICA SVA : || In qua asseritur Quadratio circuli, contra oblatra--tiones quorundam, & castigantur || quaedam errata in || DEMONSTRATIONIBUS CYCLOMETRICIS. || Vignette: een passer in een krans, met het motto: LABORE ET CONSTANTIA, || LVGDVNI BATAVORVM. || EX OFFICINA PLANTINIANA, || Apud Franciscum Raphelengium. || cIↄ.Iↄ.XCIV. in folio.

Bladz. 1—20, met de signatuur I en II bevatten:

Bladz. 3—6 CANDIDO LECTORI, geteekend „Lugduni Batauorum. x. Kal. Decembris."

Bladz. 7—20. APPENDIX. Propositiones VII. Een vers en de „Errata."

Het boekje is kleiner van formaat dan de vorige, en veel minder netjes gedrukt, ook zonder rooden inkt.

8)* JOSEPHI || SCALIGERI || JUL. CAES. F. || MESOLABVM. Zie Aanteekening (6).

9) IN || ARCHIMEDIS || CIRCVLI DIMENSIONEM || Expositio & Analysis. || APOLOGIA PRO ARCHIMEDE, || ad Clariss. virum Josephum Scaligerum. || EXERCITATIONES CYCLICAE || contra Josephem Scaligerum, Orontium Finaeum, & Raymarum || Vrsum, in decem Dialogos distinctae. || AVTHORE ADRIANO ROMANO EQVITE || *Aurato, Mathesewn Excellentissimo Professore in* || *Academia VVurceburgensi.* || Vignette: eene paauw. || WVRCEBVRGI. || Anno CIↃIↃXCVII. in folio.

4 bladz. (zonder pagineering) dan A—EE, bladz. 1—112.

Aan het hoofd der bladzijden staat door het geheele werk heen: „APOLOGIA PRO ARCHIMEDE."

10) LA || FORTIFICATION || DEMONSTREE ET || REDVICTE EN ART || PAR || FEV || J. ERRARD DE BAR LE DVC || *Ingenieur du Tres chrestien Roy de france et de* || *Navarre'* || *Reveue corrigee' & augmentee par A. Errard* || *son nepveu aussi Ingenieur ordinaire du Roy* || *suiuant les memoires de l'Autheur Contre les* || *grandes Erreurs de l'Impression contrefaicte* || *en Allemaigne, Dediée a sa Maiesté.* || *A Paris.* 1620. || *Auec Priuilege du Roy.*

Dit zijn de woorden van den gegraveerden titel, geplaatst in een portico, waarvan de pilaren twee kanonnen zijn, die het wapen en

den naam van „M. DE. BETVNE" dragen; daar tusschen staan nog twee andere wapens. Op een der kolommen staat „*J. Briot. fecit*". Het werk is in folio.

a, e, 8 bladz. zonder pagineering, bevatten:
titel, de opdracht „AV ROY" door A. ERRARD, den neef (1 bladz.) en in verso „ADVERTISSEMENT AV LECTEVR || SVR LE SVBJECT DE LA REIMPRESSION DE CE || LIVRE, ET TOVCHANT CE QVI A ESTÉ DE || nouueau adjousté en iceluy." Daarop de opdracht „AV ROY" van den schrijver J. ERRARD (2 bladz.) en de „PREFACE || A LA NOBLESSE FRANÇOISE" (2 bladz.). Dan

A—B, bladz. 1—30. (31, 32 en 34 zijn wit). Bladz. 33 bevat den titel

LE || SECOND LIVRE || DE LA FORTIFICATION || DEMONSTREE ET REDVICTE EN ART || PAR FEV J. ERRARD, DE BAS-LE-DVC, INGENIEVR || ORDINAIRE DV ROY. || AVQVEL EST TRAICTÉ TANT DE LA CONSTRVCTION | *que Demonstration des Figures Regulieres; Auec vne Table Methodique, qui* || *enseigne & faict voir le project de tout ce Liure.* || Reueu, Corrigé & Augmenté par A. ERRARD, son Nepueu, aussi Ingenieur Ordinaire || du Roy; suiuant les mémoires laissez par l'Autheur. || Vignette ornament, avec les lettres P. D. || L." || A. PARIS. || M. DC. XIX.

Bladz. 35, opdracht „A MONSEIGNEVR MAXIMILIAN || DE BETHVNE, CHEVALIER, MARQVIS DE || ROSNY, GRAND MAISTRE DE L'ARTILLERIE, || ET SVRINTENDANT DES || Fortifications de France, &c." van J. ERRARD.

K—Aa, bladz. 36—93.

Bladz. 94, 96 zijn wit. Bladz. 95, de titel voor „LE TROISIESME || LIVRE" etc.

Bb—Oo, bladz. 97—147.

Bladz. 148, 150, wit, bladz. 149 de titel voor „LE || QUATRIESME || LIVRE etc." Hier komt als vignette voor: eene zee met dolphijn schepen, met het randschrift: „LONGE DIFVNDITVR || AEQVOR. || P. D. L."

Pp—Xx, blz. 151—175.

Bladz. 176, 180 zijn wit. Bladz. 177—179 (zonder pagineering) het „PRIVILEGE DV ROY."

11)*CHRISTOPHORI || CLAVII BAMBER- || GENSIS E SOCIETA- || TE JESV || OPERVM MATHEMA- || TICORVM || TOMVS QUINTVS || *Continens* || ROMANI CALENDARII à GREGORIO XIII. P. M. RESTI- || TVTI Explicationem S. D. N. CLEMENTIS VIII. P. M. || iussu editam. || NOVI CALENDARII ROMANI APOLOGIAM aduersus Mi- || chaelem Maestlinum Gaeppingensem in Tvbingensi Academia || Mathematicum duobus libris explicatam. || APPENDICEM AD NOVI CALENDARII ROMANI Apologiam, || in qua Josephus Scaliger, Georgius Germanus, & Franciscus || Vieta, qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt, || seorsim singuli

confutantur. Accessit refutatio Cyclometriae || eiusdem Scaligeri. || Vignette: de I. H. S. met het randschrift LAVDA. BILE. NOMEN. DOMINI. || MOGVNTIAE, || Sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat || JOANNES VOLMARI. || *Cum Gratia & Priuilegio Sacrae Caesar. Maiest.* || ANNO M. DC. XII. in folio.

XII bladz. (zonder pagineering), bevatten titel, opdracht (4 bladz.) van „JOANNES REINHARDVS ZIEGLERVS E SOCIETATE JESV. S. P.", een fransche titel van het eerste werk met de opdracht van Clavius aan Paus CLEMENTI VIII" (3 bladz.) een besluit van dien Paus (2 bladz.) en het „Lectori S." (2 bladz.).

A—Fff, bladz. 1—596 en 25 bladz. (zonder paginatuur), die bevatten vijf INDICES, 3 bladz. wit: het eerste werk.

A—K, (bladz. 1—122), het tweede werk met een afzonderlijken titel „NOVI || CALENDARII || ROMANI || APOLOGIA." 2 bladz. wit. Dan „APPENDIX AD NOVI CA- || LENDARII ROMA- || NI APOLOGIAM || *Continens* || JOSEPHI SCALIGERI Elenchum & castigationem Calendarij Gre- || goriani à CHRISTOPHORO CLAVIO castigatam, || &c.

A—E, (bladz. 1—59), het derde werk met een afzonderlijken titel, waarvan het laatste gedeelte (bladz. 51—59) „RESPONSIO || AD CONVICIA, || ET CALVMNIAS IO- || SEPHI SCALIGERI IN || CALENDARIVM, GREGORIANVM." 1 bladz. wit.

a—b, (bladz. 1—20) de „REFVTATIO || CYCLOMETRICAE || JOSEPHI SCA- || LIGERI", met het opschrift der bladzijden: IN CYCLOMETRICIS || ERRORES SCALIGERI."

aa—bb. (bladz. 1—23) de „CONFVTATIO || CALENDARII GEORGII GERMAN- || NI WARTENBER- || GENSIS BORVSSI, || *Auctore* || CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBER- || GENSI SOCIETATIS JESV." (bladz. 1—10); „ADMONITIO THEODOSII || RUBEI PRIVERNA- || TIS S. THEOLO- || GIAE, ET V. I. D. || Pro || CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBER- || GENSI SOCIETATIS JESV || ADVERSVS FRANCISCI VIETAE || EXPOSTVLATIONEM (bladz. 11—16); „RESPONSIO || LAVRENTII || CASTELLANI PA- || TRITII ROMANI || AD EXPOSTVLATIONEM || FRANCISCI VIETAE || ADVERSVS CHRISTOPHORVM CLAVIVM." (blz. 17—23).

Voor het eerste deel staat een algemeene gegraveerde titel.

CHRISTOPHORI || CLAVII BAMBERGENSIS. || E. *Societate* JESV || OPERA MATHE- || MATICA || V. *Tomis distributa* || *Ab auctore nunc denuo correcta, et plurimis locis aucta.* || *Ad Reverendiss. et Illustriss. Principem ac Dominum* || D. JOANNEM GODEFRIDVM EPISCO*pum* || *Bambergensem &c.* || MOGVNTIAE, || *Sumptibus Anthonij Hierat* | *Excudebat Reinhardus Eltz.* || *Cum gratia et privilegio Sac. Caes. Maiest.* || *Anno* M.DCXII.

Het schild, waarop deze titel staat, wordt gesteund door twee beelden, de „GEOMETRIA en de ASTRONOMIA met de teekens I H S en MAR. Daarboven staat „S. HEINRICUS, Maria met het kind

Jesus, S. KVNIGVND. Daaronder het portret van den schrijver op ovaal met randschrift „*Christophorus* || *Clavius Bamb.* || *Societatis* || *Jesu*". en daaronder „*Dedit mihi Deus ut sciam anni cursus et* || *stellarum dispositiones. Sap.* 7." rechts en links, vier wonderverhalen uit het oude testament.

12) HIPPOLYTI EPISCOPI || CANON PASCHALIS: || CVM || IOSEPHI SCALIGERI || Commentario. || EXCERPTA *ex Computo Graeco* ISACII || ARGYRI *de correctione Paschatis.* || JOSEPHI SCALIGERI Elenchus & || Castigatio Anni Gregoriani. || AD || *Nobiliss. & Ampliss. virum* || JOHANNEM AB OLDENBARNEVELT, || J. C. Clmum *Hollandiae & Westfrisiae primarium* || *Consiliarum & Aduocatum.* || Vignette: een passer met de legende: LABORE ET CONSTANTIA. || LVGDVNI BATAVORVM, || EX OFFICINA PLANTINIANA. || Apud Franciscum Raphelengium. || CIƆ.IƆ XCV in 4°.

12 bladz. bevatten de opdracht aan Oldenbarnevelt, gedateerd: „Lugduni Batauorum, Nonis Septembris. CIƆ. IƆ. XCV".

A--K, bladz. 1—78.

13)* CHRISTOPHORI || CLAVII BAMBERGENSIS || EX SOCIETATE JESV || IN SPHAERAM JOANNIS || DE SACRO BOSCO || COMMENTARIVS, || Nunc tertio ab ipso Auctore recognitvs, & plerisque in locis || locupletatus. Maiori item cura correctus. || PERMISSV SVPERIORVM. || Vignette: een sphaera armillaria || VENETIIS, Apud Bernardum Basam sub signo Solis. 1596. in 4°.

In verso van den titel eene inhoudsopgave „AD LECTOREM." Dan een opdracht „IO. JACOBO || TONIALO VIRO || ERVDITISSIMO. || IO. BABTISTA CIOTVS. S. P. D." gedateerd „Venetijs. Kalend. Septembris. M.D.XCVI." waaruit blijkt dat dit een overdruk is te Venetie, „nouis figuris, & diligen- || ti correctione meis typis imprimendos." (3 bladz. en 1 bladz. wit). Dan INDEX RERVM, ET VERBORVM (24 bladz.)

A—Gg. blz. 1—483.

Bladz. 484 (niet gepagineërd), bevat „Regestvm" voor den binder, eene zon, als vignette. Dan VENETIIS. M. D. XCVI.

Het tweede hoofdstuk begint bladz. 221, het derde blz. 314, het vierde blz. 431; evenwel staat aan het hoofd der bladzijden ook bij de latere hoofdstukken bijv. nog bladz. 476 „*I Cap*"

14)* CHRISTOPHORI || CLAVII BAMB. || EX SOCIETATE JESV, || IN SPHAERAM JOANNIS || DE SACRO BOSCO, || COMMENTARIVS. || Nunc postremò ab ipso Auctore recognitus, et plerisque in || locis locupletatus. || *Accessit Geometrica atque vberrima de Crepusculis* || *Tractatio.* || Vignette: eene fontein met het randschrift: „EGO SITIENTI DABO DE FONTE

AQUAE VIVAE GRATIS APOC. XXI." || S. GERVASII, || *Apud* SAMVELEM CRISPINVM. || M.DCVIII. || CVM PRIVILEGIO. in 4°.

8 bladz. (zonder pagineering): de titel en opdracht „SERENISSIMO PRINCIPI, || ET DOMINO, D. GVILHELMO, || COMITI PALATINO RHENI, || ac vtriusque Bauariae Duci &c. || CHRISTOPHORVS CLAVIVS || E SOCIETATE JESU" gedateerd „ROMAE, Anno M.D.LXXXI. xiiij. Kal. || Octobris." Dan de „AD LECTOREM (2 bladz.)

A—Ffff, bladz. 1—597, 585 (lees 598) 2 bladz. wit.

a, e, i, o, u (38 bladz. zonder paginatuur) „Index rervm || et verborvm".

Het tweede hoofdstuk begint bladz. 241, het derde bladz. het vierde bladz. 498 ; bladz. 552 wit de „DIGRESSIO GEOMETRICA" over de schemering begint bladz. 553.

Het boek is zeer netjes gedrukt: iedere bladzijde is door een dubbel raam omsloten, de afstand daar tusschen dient voor noten, inhoudsopgave enz.

15)* CHRISTOPHORI || CLAVII BAMBER- || GENSIS E SOCIETATE || JESV. || GEOMETRIA || PRACTICA. || Vignette: I H S met het randschrift „NOMEN. DOMINI. LAUDA BILE. || *Cum gratia & Priuilegio Sac. Caes. Maiestat.* || Superiorum Permissu. || MOGVNTIAE, || Ex Typographeo IOANNIS ALBINI. || ANNO M.DC.VI. in 4°.

a—c, 24 bladz. zonder paginatuur bevatten titel, de opdracht van Clavius aan „PERILLVSTRI AV GENEROSO D. || GEORGIO FVGGERO || SENIORI || BARONI IN KIRCHBERG, || ET VVEISSENHORN (3 bladz.) getateerd „ROMAE PRIDIE IDVS SEPTEMB. || cIↄ.cI.ciiii. Het imprimatur van Claudius Aquauiua Societatis JESV. Praep. Gen. 23 Maij 1604. van Theodosius Rubeus Priuernas. 16 Julij 1604 en Fr. Paulus de Francis de Neapol. (1 bladz.) Index (17 bladz.) 1 bladz. wit.

A—Fff, bladz. 1—392 acht boeken en INDEX (26 bladz.) zonder pagineering.

Behalve nog andere tafels komen hier bladz. 377—386 voor.

„SEQVITVR TABVLA QUADRATO- || rum & Cuborum, quorum radices maio- || res non sunt, quam 1000."

16)* ALGEBRA || CHRISTOPHORI || CLAVII || BAMBERGENSIS || E SOCIETATE || JESV. || Vignette: I H S || ROMAE, || Apud Bartholomaeum Zannethum. || Anno M.DC.VIII. || SVPERIORVM PERMISSU. in 4°.

a—d, 38 bladz., titel en in verso drie imprimatur. Dan de opdracht van CLAVIUS.

„ILLI.MO ET EXCELL.MO D. || DON JOANNI || DE GVEVARA || DVCI BOVINI || REGNI NEAPOLITANI || MAGNO SENISCALLO." (4 bladz.) gedateerd: ROMAE IDIBVS MARTII M.DC.VIII." Dan INDEX (29 bladz.) „ERRATORVM CORRECTIO (3 bladz.), 2 bladz. wit.

A—Bbb. bladz. 1—383. XXXII Capita.

Bladz. 384 (niet gepagineerd) het REGISTRVM voor den binder; eene vignette: drie speeren, en den naam des drukkers, enz.

17) Da Sapienti occasionem, & addetur ei sapientia. || Ex Prouerbijs Salomonis. || TRATTATO || DELLA QVADRATVRA || DEL CERCHIO || DOVE SI ESAMINA VN NVOVO || modi di Qvadrarlo per numeri. || Et insieme si mostra come, Dato vn Rettilineo, si formi vn Curuilineo || eguale ad esse Dato. || *Et di piu alcune Trasformationi di Curuilinei misti fra loro.* || Di Pietroantonio Cataldi. || ALL' ILLVSTRISSIMO || SENATO DI BOLOGNA. || Vignette: de oorlogsgodin, met de opschriften „ET GAVDET BEL-LONA LIBELLIS" en „HVMILE NON PER PARVA." || IN BOLOGNA || Per Bartholomeo Cochi, M.DC.XII. || Con licenza de' superiori. in fol.

A,a, bladz. zonder paginatuur bevat titel en opdracht (1 bladz.).

B—P, bladz. 1—55.

Dan 5 bladzijden met houtsneden, die bij het werk behooren.

18) DIFFESA D'ARCHIMEDE, || TRATTATO DEL MISVRARE, || ò trouare la grandezza del Cerchio, || *Doue si diffende Archimede Siracusanò dalle oppositioni del Signor Joseffe Scaligero:* || *Et si mostra la proportione della Circonferenza al diametro datali nella sua* || *opera intilolato Cyclometrica Elementa duo, non le potere conuenire.* || Di piu s'esaminano, alcune cose scritte alla della opera de esso Signore nel volere dare. || Regola à inscriuere le figure rettilinee aequiangole di quanti lati || si voglino nel Cerchio. || DI PIETRO ANTONIO CATALDI LETTORI DELLE SCIENCE || Mathematicae nello studio di Bologna. || ALL' ILLVSTRISSIMO || SENATO DI BOLOGNA. || IN BOLOGNA || Per Sebastiano Bononi. 1620 || *Cum Licenza de' Sup.* in fol.

4 bladz. zonder paginatuur, bevatten titel en opdracht.

Dan bladz. 1—74; daarop bladz. 1—32 met het opschrift: „COME SI TROVI LA GRANDEZZA, O SVPERFICIE DEL CERCHIO," dit is gedateerd „*Die* 10 *Junij* 1599. *paulò anti hor.* 15 *horologij Bononiae.*

Bladz. 33—36 (zonder pagineering) bevatten:

COME SI TROVI LA SVPERFICIE. || & *grandezza corporea della Sfera, ò Corpo tondo.*

19)* IN DEI NOMINE. || OPVSCVLVM || DE LINEIS RECTIS || AEQVIDISTANTIBVS, || ET NON AEQVIDISTANTIBVS, || Petri Antonij Cataldi. || Vignette: Hercules met dendraak. || BONONIAE, || Apud Haeredes Joannis Rossij. M.DC.III. || *Superiorum permissu.* in 4⁰.

4 bladz. bevat, behalve den titel, de opdracht aan „EXCELLENTISSIMIS, || HVMANISSIMISQ. DD. || MATHEMATICIS, || Dominis summa ob-

seruantia Colendissimis. || Petrus Antonius Cataldus. F. P." gedateerd: „*Bononiae* || *die Veneris* 24. *Januarij* M.DC. IIl. *peragrante Luna gradum vi-* || *gesimumquartum Geminorum in Trigono sinistro Martis.*" (1 bladz.).

Dan een „AD LECTORES."

A—E, bladz. 1—35.

Aan het einde staat „LAVS DEO SEMPER."

[20]) FRANCISCI VIETAE || OPERA || MATHEMATICA, || in unum Volumen congesta, || ac recognita, || *Operâ atque studio* || FRANCISCI à SCHOOTEN Leydensis, || Matheseos Professoris. || Vignette: een boom met klimplant en man, waarbij motto „NON SOLUS." || LVGDVNI BATAVORVM, || Ex Officinâ Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum. || CIↃ IↃC XLVI. in folio.

XII bladz. bevatten den titel, een brief van FRANCISCUS à SCHOOTEN aan JACOBO GOLIO, Mathematum, Linguarumque Orientalium in illustri || Academiâ Lugduno-Batavâ Professori." gedateerd „Lugd. Batav. V. Kalend. Sextilis. || Anni M.DC.XLVI." (2 bladz.) dan ELZEVIRII || AD || LECTOREM" (2 bladz.), FRANCISCI VIETAE || VITA (3 bladz.) een brief „INCLYTAE PRINCIPI || MELVSINIDI CATHARINAE || PARTHENAENSI. || *Piissimae Procerum* ROHANIORVM *matri*, || FRANCISCVS VIETA FONTENAENSIS." (2 bladz.) „Catalogus Operum XVI. (1 bladz.

A—Yyy, pag. 1—554, bevat o. a.

pag. 258—285, PSEUDO-MESOLABUM || & alia quaedam || ADIVNCTA CAPITVLA.

pag. 436—446, MVNIMEN || ADVERSVS NOVA || CYCLOMETRICA, || Seu, || ANTIΠEΛEKYΣ.

Verder

Deze hoofdstukken komen voor A—XXx bladz. 1—544. Daarachter

Xxx, Yyy, bladz. 545—554. FRANCISCI à SCHOOTEN || NOTAE.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

XV. Adriaan van Roomen

1. Reeds eenige malen in deze Bouwstoffen, en wel in N°. VIII en XIV hebben wij den naam ontmoet van ADRIAAN VAN ROOMEN; deze had in zijnen arbeid „Apologia pro Archimede" verscheidene bijzonderheden nedergelegd, die ons bij ons onderzoek uitnemend zijn ter stade gekomen, omdat deze van elders ons niet ter dienste stonden, en toch noodig waren voor het juiste begrip van het behandelde deel der geschiedenis. Deze ADRIAAN VAN ROOMEN was niet alleen een groot en geacht geleerde van zijnen tijd, maar hij was bovendien volkomen bevoegd, om juist over dit onderwerp mede te spreken, de verhouding tusschen den omtrek en de middellijn des cirkels. Laat ons zien, wat wij omtrent hem hebben gevonden.

2. ADRIAAN VAN ROOMEN, of, zooals hij gewoonlijk bekend is, ADRIANUS ROMANUS, werd den 29sten September 1561 te Leuven geboren. Hij studeerde in de geneeskunde, en in de wis- en natuurkundige wetenschappen eerst aan de Akademie in zijne geboorteplaats Leuven, toen aan die te Cöln, en eindelijk in Italië, wier hoogescholen toen groote vermaardheid bezaten. Hij huwde met ANNA STEGIA VAN AMERSFOORT, en kwam in 1586 te Berlin; na het overlijden van zijnen leermeester, den

beroemden GEMMA FRISIUS, die hoogleeraar in wiskunde was aan de hoogeschool van Leuven, werd ROMANUS aldaar in diens plaats beroepen. In 1594 werd hij door den koning van Hongarije, RUDOLPH II, in den adelstand verheven als „Comes Palatinus"; daarenboven deed deze hem benoemen tot hoogleeraar aan de toen beroemde hoogeschool te Würzburg. Hier verloor hij zijne vrouw, en deed toen afstand van zijne betrekking; het was zijn wensch in het kerkelijke leven te treden. Doch eerst ging hij zijn leed verzetten door op reis te gaan; hij bezocht toen Leuven en in 1606 ook Würzburg, zooals blijkt uit een vrijgeleide van de Staten van ons land van 21 Maart 1606 [1]). Hij doorkruiste Europa, en kwam ook in Polen, waarheen hem de koning door zijnen kanselier JOHAN ZAMOWSKI had doen roepen. Deze ZAMOWSKI stelde toen bijzonder belang in eene stad in het woeste Rood-Rusland, en zond dus ROMANUS in 1610 daarheen, om de wiskunde te onderwijzen Doch slechts vijf jaren hield hij het aldaar uit, en verkreeg in 1615 zijn ontslag. Hij wilde tot herstel zijner gezondheid naar zijn vaderland terugkeeren, doch reeds op weg daarheen overleed hij; den 3den Mei 1615 stierf hij te Mainz in de armen van zijnen zoon.

3. Tijdens zijn verblijf te Leuven, als hoogleeraar in de wis- en natuurkundige wetenschappen aan de hoogeschool aldaar, gaf hij zijn werk uit „Ideae Mathematicae Pars Prima", 1593 [2]), waarin hij de verhouding van den omtrek des cirkels tot zijn middellijn, tot in 17 decimalen berekende. Waarschijnlijk was het deze gemeenschappelijke richting van beider werkkring, die een vriendschapsband tusschen hem en LUDOLPH VAN CEULEN deed ontstaan, waarvan reeds vroeger sprake was in N°. VIII dezer Bouwstoffen; en die de oorzaak werd, waarom wij anders onbekende bijzonderheden omtrent VAN CEULEN konden mededeelen. Hierop moeten wij nu terugkomen, en daartoe vooreerst het toen reeds aangehaalde werk „Apologia pro Archimede" 1597 [3]) nader beschouwen.

4. Dit werk had tot doel de bestrijding van JOSEPH SCALIGER, ORONTIUS FINAEUS en RAYMARUS URSUS DITHMARSUS, (dus eigenlijk van SIMON VAN DER EYCKE) op het stuk van cirkelquadratuur. Met dit doel geeft ROMANUS in het eerste gedeelte eerst (bladz. 1—18) de „ARCHIMEDIS || CIRCVLI DIMENSIO" en

daarop (bladz. 19—55) de eigenlijke „APOLOGIA PRO ARCHIMEDE" || „AD CLARISSIMVM VIRVM JOSEPHVM || SCALIGERVM, JVL. CAES. FILIVM" || . Deze is verdeeld in negen hoofdstukken met al de stellingen, die voor het bewijs en de afleiding noodig zijn, zoowel als voor de latere bestrijding der drie bovengenoemde geleerden. Naar de gewoonte van die dagen, geeft hij somtijds de grieksche en de latijnsche tekst der stellingen met de uitgewerkte „Paraphrasis" en „Analysis demonstrationis".

Daarop volgen de „EXERCITATIONES CYCLICAE || CONTRA JOSEPHVM SCALIGERVM, || ORONTIVM FINAEVM, ET RAYMARVM VRSVM || IN DECEM DIALOGOS DISTINCTAE: || Authore Adriano Romano. E. A." (bladz. 55—112), die zijne bestrijding bevatten in den vorm van tien „Dialogi" tusschen het drietal Eutheorus, Caenophilus en Polyponus. Eerst komt eene soort van voorrede de „LECTORI PHILOMATHI S." (blz. 55—57) (die reeds vroeger herhaaldelijk in de N°. VIII en XIV dezer Bouwstoffen werd aangehaald), waarin hij over de quadratuur van SCALIGER en hare bestrijding door LUDOLPH VAN CEULEN en J. ERRARD handelt; en daarop laat hij volgen (bladz. 56)

„Mihi ergo, qui in similium problematum examine non parum triui temporis, id muneris incumbere iudicaui, vt scri- || pta haec Scaligeriana explicarem, explicata refellerem & exploderem."

En bladz. 97

„Hactenus de Scaligero. Huic operi meo adiunxi eiusdem materiae opuscula, in quibus problemata & theoremata e- || iusdem Farinae ab Orontio Finaeo, & Nicolao Raymaro Vrso proposita, discutiuntur, quae vti prius composita, etiam examini || Scaligerianae quadraturae praemittenda iudicauimus."

Aan het einde volgt

EPIGRAMME SVR LES EXERCITATIONS CIRCVLAIRES
DE MONSIEVR ADRIAN ROMAIN CHEVALIER
& Seigneur de Houberge

Aucuns se laissent deceuoir
Pensant d'vne raison peu seure,
Auoir descouuert & fait voir
Du cercle ou du rond la Quarreure
Adrian donc par ces escrits,
Escrits dignes d'vn Archimede,

Esclaircissant mieux nos esprits,
Nous monstre ici leur erreur laide.

J. P. P. S.

In de "PARS PRIMA" || Qua continentur || DIALOGI QVATVOR CONTRA || ORONTIVM FINAEVM || INTERLOCVTORIBVS || *Eutheoro, Caenophilo & Polypono*", in de vier eerste Dialogi (blz. 58—83), behandelt hij dan de quadratuur van ORONTIUS FINAEUS, waarmede wij hier niet te maken hebben. De "PARS SECVNDA" || SIVE || DIALOGVS VNICVS' bevat de vijfde Dialogus (blz. 84—89) over de bestrijding van NICOLAUS RAYMARUS URSUS DITHMARSUS, de quadratuur van SIMON VAN DER EYCKE. Eindelijk wijdt hij de "PARS TERTIA continens dialogos quatuor", die de vier volgende Dialogi VI tot IX bevat (blz. 90—108) aan de quadratuur van SCALIGER; en sluit met den tienden Dialogus (blz. 108—112) zijne bestrijding van dezen laatsten.

Voor den aanvang van de Pars Prima zien wij de reden de voormelde verdeeling. Na den beschreven titel toch volgt.

"Argumentum huius partis. || NOBIS *in Exercitationibus Cyclicis propositum fuit ea quae Clarissimus vir Josephus Scaliger Julij Caesaris filius anno e-* || *lapso edidit Elementa Cyclometrica, examinare, atque ad veritatis trutinam revocare: verùm quia similem scribendi mate-* || *riam ante Scaligerum assumpsit Orontius Finaeus, cuius opus ante decennium diligenter (vt opinor) excussimus, ideo vtrumque o-* || *pus coniungere visum fuit. Praemitto autem nostram exercitationem cum Orontio, tum quòd ipse Orontius (vt dixi) ante Scali-* || *gerum hanc materiam tractauerit, tum quod multa in hac exercitatione sunt allata contra Orontium quae nobis cum Scaligero agen-* || *tibus seruient. Versatus autem dialogus primus circa propositionem circumferentiae circuli ad diametrum. Secundus circa quadra-* || *turam ipsam. Tertius Cubi duplicationem examinat. Quartus demum quid veritatis Doctrina polygonorum circulo inscripto-* || *rum contineat, inquirit.*"

De vijfde Dialogus geeft negen "PROPOSITIONES", waarvan de laatste dus luidt.

"QVADRATVRAM Simoni de Quercu Belgae attributam non esse eius, sed Nicolai Cusani, at- || que ante plurimos annos à Regiomontano, deinde etiam à Joanne Buteone explosam."

Daarop volgt de zamenspraak.

"EVT. Celebris ille vir Nicolaus Cusanus, qui inter caeteras suas quadraturas *) & hanc quoque proposuit. POL. Ego Cu- || sani quadraturas ante multos annos à Regiomõtano explosas intelligo, vnde miror aliquos hoc tempore fuisse, qui || ausi sint confutatas & reiectas opiniones iterum in lucem reuocare. EVT. Nec ego sanè mirari possum satis... || ... || ...EVT... || ...Sed haec de pseudotetragonismo vel Raymari, vel Simonis de Quercu, vel potiùs Cusani, per vtrumque praece- || dentium approbato, sufficiant, nihil enim inuenimus in illo, quod animum nostrum possit afficere. CAEN. Cum igitur spe meâ || frustratus sim tam in Nicolao Raymaro quàm in Orontio, quid de Scaligero sentis? EVT. Isne tibi est ad manus? CAEN. Est. || En illum vnà cum appendice. EVT. Typus sanè est Raphalengio viro de re Typographica optimè merito dignissimus. Hol- || landiae ordinibus dedicatum opus inuenio. CAEN. Sunt in Hollandia nobiles & insignes Mathematici, licet non omnes || inde oriundi, vt Simon Steuinus, Ludolphus van Collen, Nicolaus Petersen †), & alii non pauci: vnde credendum est || Scaligerum qui tot doctorum Mathematicorum penes se potest habere iudicia, non temere hunc tracta- || tum in lucem misisse."

Eene goede voorbereiding voor de niet malsche wijze, waarop de arbeid van SCALIGER nu zal worden wederlegd.

Daarop volgt in de Pars Tertia: "DIALOGVS SEXTVS. || IN QVO || VOLVTA DINOSTRATI NON RECTE || A IOSEPHO SCALIGERO || DESCRIPTA OSTENDITVR." blz. 90—93. Propositiones IV; en verder "DIALOGVS SEPTIMVS || QVI VERSATVR CIRCA || PROPORTIONEM SEGMENTI MAIORIS SEMIDIAMETRI || ABSCISSI PER EXTREMITATEM VOLVTAE DINOSTRATEAE || AD DIAMETRUM CIRCVLI, QVAM FALSÒ || Se invenisse putat Scaliger." blz. 93—95. Propositiones V; en "DIALOGVS OCTAVVS || QVI AGIT DE || PROPORTIONE PERIMETRI AD DIAMETRVM QVAM || SE INVENISSE FALSO JACTAT SCALIGER." bladz. 96—101. Propositiones VIII. Deze begint aldus.

"CAEN. SALUE sodalis charissime. POL. Et tu visissim salueto.

---

*) Zooals wij ook zagen in N°. VIII dezer Bouwstoffen.

†) NICOLAAS PETRI, over wien reeds vroeger in N°. XII der Bouwstoffen gesproken werd.

CAEN. Euthorusne domi est? POL. || Est quidem, sed paullulum in musaeum suum recessit, volens interim vt ego propositionem tertiam Scaligeri || per terminos Archimedis examinarem, ille interim Polygona Raymari nostri quin etiam epistolas quasdam || magni illius & admirandi LVDOLFI VAN COLLEN ad Raymarum scriptas euoluet, in quibus existimat || se aliqua proposito nostro conuenientia inuenturum".

Waaruit blijkt, dat ROMANUS zeer veel op had met LUDOLF VAN CEULEN. De achtste Propositio luidt aldus.

„PROPORTIONEM perimetri ad diametrum à Scaligero assignatam non esse Scaligeri, sed || antiquorum vel Arabum vel Indorum."

En in het gesprek daarover komt nog het volgende voor.

„POL. || Nullámne ergo facit Arabum vel Indorum mentionem? EVT. Imò in prolegomenis cyclometricis Arabes laudat, cum inquit: || *Secundum Nicomedem an ex veteribus aliquis idem peruentus sit, nihil dum certi legimus. Non dubito tamen quin ad Arabes primitus il-* || *le peruenerit, quae fuit eius Gentis in Cyclometricis solertia.* POL. Forsan Scaliger hanc Arabum adiecit commendationem ad eorum || animos demulcendos, ne forsan ij se comperta, eum furti nomine malè tractent. EVT. Ego hoc asserere non ausim. CAEN. || Hoc mihi non parum ad Scaligeri excusationem facere videtur, quod Buteo scribat, se nullam huius propositi inuenisse demon- || strationem. Ideò Scaliger propositionem nullam, pro inuenta habuit, nisi fuerit demonstratione confirmata. Quare cum huius || propositionis demonstratio fuerit à Scaligero solo inuenta, ideo etiam Scaliger verus huius propositionis habendus est inuen- || tor. EVT. Rectè Caenophile, siquidem Scaliger demonstrationem attulisset."

Daarop volgt „DIALOGVS NONVS || IN QVO DE || PROPORTIONE CIRCVLI AD QUADRATVM || DIAMETRI QVAM SE INVENISSE JACTAT || SCALIGER," blz. 101—108. Propositiones VI.

De vijfde stelling luidt „CIRCVLVS maior est quam $36\frac{1}{6}$ trianguli ROP," de zesde „CIRCVLVM esse maiorem 36 triangulis ROP, alio modo probatur," en deze wordt op twee wijzen bewezen, en daarmede de zesde stelling van SCALIGER wederlegd.

„EVTH . . . Sed hac de re intelligo Romanum in || Apologia quadam pro Archimede contra Scaligerum agere velle. POL.

Rem profecto aggrediatur piam, laudabilem, & sum- || mè vtilem, verùm inuidiae plenam. EVT. Beneficium est veritatem docere, atque à falsis liberare doctrinis. Sed iam ad studia || nostra reuertamur. CAEN. Ergóne cyclometrica eius relinquemus. EVT. Ea sanè eiusdem sunt farinae cum hac appendi- || ce. Suadeo ergo expectandum esse, donec Scaliger reliqua diligentius intueatur, auguror namque illum eadem correctius ali- || quando editurum. Quod si non fecerit, tunc meam operam libenter in totius operis examine cōmunicabo. Interim valete soda- || les clarissimi."

Maar toch komt hij hierop terug in den „DIALOGVS DECIMVS || IN QVO || DIATRIBAE QVAM PRO STABILIENDA SVA || QVADRATVRA AD ROMANVM MISIT SCALIGER || RESPONDETVR." (blz. 108—112) Propositiones V; een dialogus, waarin Polyponus niet meer voorkomt, en waarin eene latere brief van SCALIGER, waarover reeds in N°. XIV der Bouwstoffen werd gesproken, ontzenuwd wordt. Hij eindigt blz. 112 aldus.

„Vnde manifestè apparet ratiocinationis Scaligerianae progressum esse nimis debilem: Archimedem quoque iniustè à Scaligero || taxari. Cùm autem anteà ostenderimus rationes eius quibus suam quadraturam corroborare nixus est, nullas esse: ideò nihil am- || plius reliquum video, quod in hac Diatriba examinandum sit. Tunc Caenophile quidquam habes dubij? CAEN. Nihil planè. || Verum sicuti anteà Quadraturam hanc Scaligerianam exploseras, ita iam me longè magis reddisti securum. EVT. Praestat || ergo ad studia nostra tum Physica, tum Mathematica, redeamus: vt ex iis fructum quempiam recipiamus, quo temporis iacturam, || quam in hisce pseudotetragonismis examinandis passi sumus, resarciamus. CAEN. Placet. Vale Eutheore. EVT. Vale & tu || Caenophile charissime."

5. Behalve de reeds aangehaalde werken, schreef ADRIANUS ROMANUS er nog onderscheidene, waarvan ik alleen de volgende heb kunnen te zien krijgen. Vooreerst een boekje van 16 bladz. in 4°. „Ventorum secundum recentiores distinctorum usus, 1596 [4]), waarin voornamelijk over twee zeevaartkundige werktuigen wordt gehandeld, het Anemoscopium" en het „Quadratum Nauticum."

Vervolgens „Chordarvm arcvbvs circvli primariis subtensarvm resolutio", 100 bladzijden in plano, 1602 [5]). Hierin levert hij

de geheele berekening van de wortelgrootheden, die te pas komen bij de berekening der sinussen en cosinussen van elk veelvoud van drie graden; namelijk den vierkantswortel uit 3, 5, 15, $1\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$, $10 \pm \sqrt{20}$, $30 \pm \sqrt{180}$. Deze worden in 218 decimalen berekend. Ten einde die groote berekeningen met het minste plaatsverlies te kunnen drukken, vindt men bijv. de geheele bewerking, die een trapezium beslaat, in drie andere van gelijke hoogte verdeeld; het eerste komt rechts op de bladzijde, het tweede, het onderste boven, links daarnaast, het derde wederom van boven naar beneden op de linkerkant van de bladzijde; snijdt men dus die bladzijde in deze drie stukken, dan kan men ze aan elkander doen sluiten, om de geheele bewerking achter elkander te verkrijgen

In 1605 gaf hij zijne „Mathesis Polemica, 270 bladz. in 8°." [6]), waarin men evenwel niet een strijdschrift over eenig wiskundig onderwerp moet zoeken, maar eerder eene wiskundige behandeling van oorlogswetenschap. Daarbij is gevoegd eene „Tabula Prosinuum", dat is eene tafel der tangenten voor iedere minuut in zes mantissen. Iedere twee bladzijden bevatten vijf graden; de bladzijde links houdt de minuten 0—30, de bladzijde rechts de overige minuten 30—60.

Eindelijk zijn „Speculum astronomicum, 1606, 152 bladz. in 4°." [7]), die onderscheidene sterrekundige tafels bevat.

Ten slotte zij hier vermeld een zeldzaam boekje „de formatione humani corporis, 1528, 120 bladz., klein 4°." [8]), dat soms aan onzen ADRIANUS ROMANUS werd toegeschreven; maar ten onrechte, want de schrijver is EGIDIUS ROMANUS; en bovendien was het boekje reeds veertig jaren oud, toen onzen ROMANUS ter wereld kwam.

Bovendien heeft hij nog geschreven.

Uranographia sive coeli descriptio. Lovani, 1590 in 4°.

Theatrum Urbium. Francoforti, 1595 in 4°.

Theoria Calendariorum. Wurceburg, 1595 in 4°.

Problema Apolloniacum. Wurceburg, 1596 in 4°.

Phytologia. Wurceburg, 1598.

Idea Matheseos Universae. Wurceb. 1602.

Canon Triangulorum Sphaericorum. Moguntiae, 1609. 4°.

AANTEEKENINGEN.

[1]) Generaliteits-Notulen, 21 Maart 1606.

„Is geaccordeert paspoort, gratis, op recommandatie van den heere advocaet van Hollant, aen den heere ADRIAEN ROMANUS, mathematicus ende Medicijn van de Keyserl. Majesteyt, omme van Loven te mogen reisen naer Wirtsburg, in Sijne Majesteits dienst, met sijn dieners, familie ende bagagie."

[2]) Ideae Mathematicae Pars Prima, sive Methodus polygonorum qua laterum, perimetrorum et arearum cuiuscunque polygoni inuestigandorum ratio exactissima et certissima vna cum circuli quadratura continentur. Authore ADRIANO LOUANIENSI, Medico et Mathematico. Antverpiae apud Io. Kurbergium, anno CIↃIↃXCIII. 128 bladzijden in 4°.

De censuur, in verso van den titel, is gedateerd „Bruxellis, anno 1590 die 7 Mensis Nouembris, Subsignat. de Roy."

Van dit werk verscheen later een tweede druk te Leuven.

[3]) IN || ARCHIMEDIS || CIRCVLI DIMENSIONEM || Expositio & Analysis. || APOLOGIA PRO ARCHIMEDE, || ad Clariss. virum Josephum Scaligerum. || EXERCITATIONES CYCLICAE || contra Josephum Scaligerum, Orontium Finaeum, & Raymarum || Vrsum, in decem Dialogos distinctae. || AVTHORE ADRIANO ROMANO EQVITE || *Aurato, Mathesewn Excellentissimo Professore in* || *Academia VVurceburgensi.* || Vignette: een paauw. || WVRCEBVRGI. || Anno CIↃIↃXCVII. folio.

4 bladz. (zonder paginatuur), bevatten de titel en in verso, een „CARMEN HEROICVM a M. Wendelino scholastico Francone, eiusdem in Mathematicis discipulo," met het jaarvers

VnIVs en resonat tonItrV,sVbItoqVe refVgIt
HostIs: Iô, IVbILa DIa MathesIs, Iô.

(1 bladz.); de opdracht aan „INVICTISSIMO ROMANORVM || IMPERATORI RVDOLPHO || II CAESARI AVGVSTO. || ADRIANVS ROMANVS." (1 bladz.); en „PRAEFATIO" (1 bladz.).

A—EE (bladz. 1—112) bevat:

Blz. 1—18. Libellus Archimedis Circuli dimensio. III Propositiones, grieksche en latijnsche tekst, telkens met de Paraphrasis en de Analysis demonstrationis.

Blz. 19—23. Apologia pro Archimede. Caput I—VI.

Blz. 23—32. Apologia. Cap. VII. Idaea quaedam vniversalis Matheseως; Definitiones, Axiomata, Theoremata.

Blz. 32—35. Apologia. Cap. VIII. Theoremata.

Blz. 35—55. Apologia. Cap. IX. Methodi Arithmeticae Practicae. Partes V.

Blz. 55—57. Exercitationes Cyclicae. Lectori Philomathi S.

Blz. 58—83. Exercitationes. Pars I. Dialogi I—IV (tegen ORONTIUS FINAEUS).

Blz. 84—89. Exercitationes. Pars II. Dialogus V. (tegen NICOLAUS RAYMARUS URSUS DITHMARSUS).

Blz. 90—108. Exercitationes. Pars III. Dialogi VI—IX (tegen SCALIGER).

Blz. 108—112. Dialogus X.

Boven aan de bladzijden staat overal APOLOGIA PRO ARCHIMEDE.

[4]) VENTORVM || SECVNDVM RE- || CENTIORES DISTIN- || CTORUM USUS. || Qvo || Anemoscopium & Qvadratum Nauticum explican- || tur, miraeque eorumdem utilitates || proponuntur. || *Authore* || ADRIANO ROMANO. E. A. || WIRCEBVRGI || Ex officinà typographica Georgii Fleischmanni. || ANNO M.D.XCVI. in 4°.

A—C. 16 bladz. zonder pagineering, bevat titel en opdracht (3 blz.) „MAGNIFICO || VIRO AC DOMINO || DOMINO NICOLAO CORYCINIO || à CORYTHNO, POTENTISSIMI AC || „Inuictissimi Regis Poloniae &c. Secretario || Domino suo colendissimo," geteekend „Pridie Cal. Maji CIↃIↃXCVI. VVirceburgi." Een „Ad Lectorem" over de 32 namen der winden (1 blz.).

Blz. 5—10. LEMMA PRIVS. ANEMOSCOPIUM.

Blz. 10—13. LEMMA SECVNDVM. QVADRATVM nauticum.

Blz. 13—16. PROBLEMATA IV.

[5]) CHORDARVM ARCVBVS || CIRCVLI PRIMARIIS, QVIBVS || VIDELICET IS IN TRIGINTA DIRIMITVR || PARTES, SVBTENSARVM RESOLVTIO || VTI EXACTISSIMA ITA QVOQVE || LABORIOSISSIMA || AVTHORE || A. ROMANO, ROMANO EQVITE, || COMITE PALATINO ET MEDICO || CAESAREO. || VVIRCEBVRGI. || Excudebat Georgius Fleischmann. Anno 1602. in plano.

De titel is in eene lijst gedrukt.

Blz. 3. Eene opdracht „SERENISSIMO AVSTRIAE ARCHIDVCI MAXIMILIANO, DVCI || BVRGVNDIAE enz., en is geteekend: *Herbipoli VI. Kalend. Aprilis* M.DC.II.

Dan volgen de uitkomsten met de daartoe behoorende berekeningen voor eenige worteltrekkingen voor zijden van regelmatige veelhoeken; aldus ingericht dat zij bij het openslaan van het boek gedeeltelijk van boven naar beneden, gedeeltelijk van beneden naar boven zijn gedrukt, over de beide bladzijden tegelijk; zoodat zij afgeknipt en in goede orde onder elkander gelegd, een monsterworteltrekking zouden vertoonen, soms, voor hulpwaarden, van 436 decimalen. Men vindt in 218 decimalen:

Pag. 4—11, ℞ 3; p. 12—27, ℞ 5; p. 28—35, ℞ 15; p. 36—53, ℞ *bin* $1\frac{1}{2}$ + ℞ $\frac{5}{4}$; p. 54—65, ℞ *bin* 10 + ℞ 20; p. 66—77, ℞ *bin* 10—℞ 20; p. 78—89, ℞ *bin* 30 + ℞ 180; p. 90—99, ℞ *bin* 30—℞ 180; Hierbij is ℞ *bin* 10 + ℞ 20 wat wij thans schrijven $\sqrt{(10 + \sqrt{20})}$.

[6]) MATHESIS || POLEMICA. || AUTHORE || A. ROMANO, EQUITE || AURATO, COMITE PALA- || TINO ET MEDICO CAESAREO. || *Ad Illustrmum Dominum,* D. ALEXAN- || DRVM *Ducem de Ostrog in Zaslaw,* || *Palatiniaē Volhiniae.* || FRANCOFURTI, || Sumptibus Laeuini Hulsij Gandensis. || 1605. in 8°.

A—S bevatten:

12 bladzijden (zonder pagineering) de opdracht.

Blz. 13—110. PARS PRIMA. Capita XX.

Blz. 111—192. PARS ALTERA. Lemmata III.

Blz. 193—224 en 65—72. TABVLA || PROSINUUM || RESPECTU || Radij partium || 1.000.000 [dat is tangenten] voor elken minuut in 6 mantissen. Iedere 5 graden beslaan 2 bladzijden; de minuten 0—30 staan links, de volgende 30—ↄ0 staan rechts.

Blz. 233—270. PARS TERTIA.

[7]) SPECVLVM || ASTRONOMICVM, || SIVE || ORGANVM FORMA MAPPAE || EXPRESSVM: || In qvo licet immobili || Omnes qvi in Primo caelo, Primóqve || mobili spectari solent motus, per Canones ea || de re conscriptos, planissimè sine ullius || regvlae aut volvelli beneficio || repraesentantur. || AVTHORE || A. ROMANO *Eqvite aurato, Comite Palatino,* || *Medico Caesareo: atq; ad D. Joannis Novi Monasterij* || *Herbipoli Canonico.* || LOVANII, || Ex officina Joannis Masij, sub Viridi Cruce, Anno 1606. || *Sumptibus Authoris. Prostat Francofurti apud* || *Levinum Hulsium.* in 4°.

A—T.

In verso van den titel de verdeeling in:

p. 7—64. Primus liber, principia.

p. 65—151. Secundus liber, canones. Vooraf gaat:

p. 3—6 de opdracht „SERENISSIMO || POTENTISSIMOQVE || PRINCIPI ALBERTO || ARCHIDVCI AVSTRIAE, || DVCI BVRGVNDIAE, PRINCIPI || BELGARVM" geteekend „*Lovanij* 16 *Ju-* || *nij. Anno* 1606."

Blz. 151 onderaan staat „FINIS CORONAT OPVS."

Blz. 152 (niet gepagineerd) luidt dus.

Privilegij summa. || PHILIPPVS *Dei gratia Hispaniarum Rex, &c. Dux* || *Brabantiae &c. Concessit* D. Adriano Romano || Louaniensi, *authoritatem qua imprimere & distra-* || *here curet opus quoddam suum Mathematicum, cuius* || *titulus* IDEA MATHEMATICA *integrum si-* || *mul vel per partes; ut latius patet in originali privi-* || *legio dat. Bruxell. anno* 1590. *Die* 7. *Mensis No-* || *vembris.* || *Subsignatur.* || *De Roij.*

8) **De formatione || humani || corporis Egidij || Romani. || Fundamentarij doctoris. || Dñi Egidij Romani ar || chiepi Bituricen. S. || R. E. Cav. or. er. s. || Augusti. tracta- || tus pq̃z. egre- || gius de formatione hu- || mani corporis in vtero || matris.** In klein 4°.

De titel in eene lijst met zinnebeelden. In verso van den titel de opdracht.

„NOBILI & *egregio uiro, domini Gaspari. q. mathematico-* || *rum principis, domini Joañis de Jasone, patritio Ferrariē.* || *Minimus sacrae Theolo-doctor, frater Augu-Mō-* || *tifulconius, eremita Augustinianus.* S. P. D." was geteekend „*Venetiis Nonis Nouembris M.CCCCC.XXII.*"

A—P. (120 bladz. zonder paginatuur).

Ieder bladzijde is in twee kolommen verdeeld. Er zijn 25 Capita, waarvan ieder begint met een hoofdletter, geïllustreerd met een portret.

Op het einde:

„**Impressum Venetijs p Jacobum pentium de Leuco || Anno m.ccccc.xxiii. adi. xv. Decemb.**"

Dit boek wordt hier aangehaald ten bewijze, dat het ten onrechte aan onzen ADRIAAN ROMANUS wordt toegeschreven.

Van dit werkje bestaat ook nog eene uitgave te Parijs. 1615 in 4°.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

XVI. Jacob Marcelis, Daniel Waeywel en Gillis Bovy.

1. Van minder gewichtige gevolgen dan de vroeger behandelde cirkelquadraturen, zijn die van de drie bovengenoemden, die ongeveer eene eeuw later het licht zagen; zij zullen dan ook kortelijk kunnen afgehandeld worden.

JACOB MARCELIS werd in 1636 te Amsterdam geboren; hij had aldaar eene zeepziederij en zeephandel. In 1698 kwam hij voor den dag met zijne „Quadrature van den cirkel" in 4°. [1]) en liet die in het volgende jaar door eene „Ampliatie en Demonstratie", 56 blz. in 4°. [2]) volgen. In het „Aan de Konstliefhebbende || LESER", beweert hij, even als SCALIGER, dat „mijn gevonden Omtreck grooter is, tegens sijn Dia- || meter, dan Arghimedes (sic) . . . . , waer uyt || de waarheyt blyken sal, dat door de Veel-hoeks rekening de || Cirkel, tegens sijn Dia meter, op die maniere niet is te vinden." Op bladz. 4 komt dan *„Een tafel van 't A, B, C, nevens verscheijde cijfer- || getallen*", waarin voorkomen.

G. 6.99718. 36375. 40819. 14003. 52392. 71702. Diameter van H.

H. 22: 00000. 00000. 00000. 00000. 00000. 00000. Omtrek van G.

Zoodat daaruit voor de quadratuur volgt (blz. 53):

„$3\frac{100844908737754167989428218 4894}{699718363754081944003523927 1702}$", waarvan de waarde is 3. 1441078.

Op bladz. 56 (zonder pagineering) komen 29 „*Drukfouten aldus te verbeteren.*" Daarachter volgen 5 „*Printen.*"

2. MARCELIS werd wederlegd door KLAAS NAJER, schoolmeester tot Kwadijk, „Eenvoudig betoog, 1702, 40 bladz. in 4°." [3]). Deze had zich reeds sints vier jaren met MARCELIS in betrekking gesteld, om diens quadratuur te wederleggen. Het boekje is in briefvorm en verdeeld in zeven stukken: „AANLEYDING" (blz. 3); „STRIJDIGHEDEN" (blz. 7); „ON-KUNDIGHEDEN" (blz. 10); „NA-REEKENING || EN BEWIJS" (blz. 22) 6 werkstukken; „ANTWOORD OP || *UEdhts.* || VERZOEK" (blz. 31); „VRAAG-STUKJES" (blz. 35), 7 stuks; „NA-BERIGT" (blz. 39). Hij verhaalt daarin, hoe hij reeds 24sten Augustus 1698 MARCELIS tot eene weddingschap van honderd Dukatons had willen overhalen, maar dat deze daarvoor bedankt had, even als later „op Pinkster A°. 1700" met de woorden: „*Meenje dan dat het wedden Kristlyk is? En denkje niet dat myn* Kon- || scientie (*mede-weten*) *daar door soud beswaard worden?*"; dat hij daarop „op den 21sten *Augustus* 1700, in de *Am-* || *sterdamse Kourant*" een „*voorverhaal*, tseffens de aanbiding van myn *Konst* en *Kost-sgool*" had geplaatst; waarop MARCELIS den 26sten Augustus antwoordde met eene advertentie in dezelfde courant. Den 28sten Augustus had hij daarop zijn voorstel tot wedden herhaald „in tegenwoordigheyd van Burgermr. || *Evert Knip;* Regenten *Pieter Kaal* en *Teunis Knip;* Sgepenmr. *A-* || *driaan Heylo;* en Sgipr. *Jakob Karper.*" In verso van het NA-BERIGT komen tien fouten met het hoofd:

> „*'t Versuym door 't Sgryven of den Setter,*
> *bragt voort dees' Her-gestelden Letter.*"

Ook deze NAJER schijnt onzen ANTONISZ niet gekend te hebben; althans blz. 10 spreekt hij van de „wytberoemde Wiskonstenaars, als van *Arghimedes;* || de Vader van *A. Metius; Mr. Ludolf van Keulen*", en blz 14 over „*de stelling van* || METIUS;" zoodat hij meende, dat die vader ook METIUS heette.

3. Dat deze, en waarschijnlijk nog andere tegenschriften on-

zen MARCELIS niet overtuigden, blijkt daaruit, dat hij voortging met het schrijven over zijne quadratuur, zonder echter zich te verledigen zijne bestrijders te wederleggen. In 1704 gaf hij de „Sleutel en Openinge van de Quadrature in 4°." [4]), in 1714 „de eerste en eenigste uitvinding van de Circul Quadratura, 30 bladz. in 4°." [5]); waarin op bladz. 19 wederom zijne bovenvermelde verhouding voorkomt; en waarschijnlijk in hetzelfde jaar nog zijnen Elucidatie, 10 bladz. in 4°. [6]).

In dit laatste zegt hij blz. 8,

„Daarom is 't ook by JACOB MARCELIS uytgevonden, ten dien- || ste van de geheele waerelt, zoo wel te water als te land, synde het fondament van || de longitudo."

Zoodat het schijnt, dat ook bij MARCELIS de gedachte aan de oplossing van het befaamde vraagstuk der „Oost- en Westvinding" niet vreemd is geweest.

4. Deze manier om zulke wetenschappelijke (?) beschouwingen in de dagbladen te behandelen, in die dagen niet zeldzaam, wekten ook anderen op tot dergelijk onderzoek. Dit was onder anderen het geval met DANIEL WAEYWEL. Deze was den 2den Februarij 1654 te Middelburg geboren, waar zijn oom DANIEL WAEYWEL — zijn vader toch was vroeg overleden — een voornaam koopman en commissaris der wisselbank was. Hij was bestemd voor de studie en bezocht alzoo de Latijnsche school aldaar; doch hij ging over tot handel, waartoe hij naar Amsterdam vertrok. Toen hij zelf handel dreef en gehuwd was, had hij met verliezen te kampen, verliet Amsterdam en vestigde zich in hare nabijheid; hij oefende zich in de zuivere en toegepaste wiskunde. In de Amsterdamsche Courant van 4 November 1711 gelezen hebbende, dat twee geestelijke personen meenden het lang gezochte vierkant des cirkels gevonden te hebben, werd bij hem de lust wakker, zulks ook te beproeven, zooals blijkt uit de voorrede van zijn „Demonstratie wegens de Quadratura Circuli 1712. 28 bladz. in 4°." [7]). „Eenige weken na den 21sten November 1711 wierden mijne gedagten, op dat subject, ongemeen werkzaam" totdat „sig eyndelyck op den 15den Juny 1712 twee getallen 1683, en 5288 door de werckinge openbaarde:" dat is door de methode (sit venia verbo) van de Lunulae van *Hippocrates Chio*: hare waarde is 3. 1420083.

Van dit geschrift gaf hij tevens een uittreksel in het fransch „La demonstration. 7 bladz. 4°." [8]).

Deze beide geschriften zagen den 4den Augustus 1714 het licht, zooals blijkt uit een later werkje van Noot (11), hoewel hij de quadratuur zelve reeds „in Octob. 1712 aan de Heeren Pro- || fessoren op de Universiteyt tot Leyden gedemonstreerd had." WAEYWEL had zijne ontdekking aan J. TRIP, burgemeester van Amsterdam, medegedeeld, die daarop zorgde, dat zij tot de kennis van de Staten-Generaal kwam, die daarop eene premie hadden gesteld. Het stuk werd naar eene commissie, later naar de hoogeschool te Leiden gezonden; doch eenig rapport is hem nimmer geworden.

Al spoedig deden zich vier bestrijders op. MATTHEUS SOETEN, ISAAK DE GRAAF, DIRK KRUIJK en P. HELLINGWERF; volgens WAEYWEL is deze voorlaatste naam slechts een pseudonym voor den tweeden, ISAAK DE GRAAF.

5. MATTHEUS SOETEN gaf zijn „Aanmerkinge op Daniel Waywels Demonstratie. 1714. 14 bladz. in 4°." [9]), gedateerd Amsterdam den 1 || September 1714." Hij gebruikt daarbij de differentiaalrekening, en haalt aan, „dat gadeloos werk *d'Analysis in-* || *finitorum* van die onvergelykelyke Meetkonstenaar BERNHARDUS || NIEUWENTYT." Dit boekje werd den 31 Augusti 1714 in de Haagse Courant geadverteerd (zie het boekje van Noot (11)).

ISAAK DE GRAAF *Philo-Math*, daarentegen tracht in zijn „Waywels Proportie. 1714. 14 bladz. in 4°." [10]) de fout van diens quadratuur in getallen te berekenen. De datum van dit stuk is het begin van Februarij 1714, zooals mede uit het boekje van Noot (11) volgt.

DIRK KRUIJK gaf „Wiskonstige wederlegginge van de Quadratura Circuli. 1712. 24 bladz. in 4°." [11]), opgedragen aan „Mons. P. V. H."; deze „opdragt" is gedateerd „Rotterdam den 8 || September 1714." Hij bewijst, dat de cirkel van WAEYWEL eigenlijk eene ellips is; zoodat wanneer de eene middellijn is 1683, de andere wordt $1683\frac{22268713}{100000000}$.

Van de bestrijding door P. HELLINGWERF is mij niets bekend geworden.

6. WAEYWEL antwoordde hierop nog in hetzelfde jaar met zijn „Tweede Demonstratie wegens de Quadratura Circuli. 1714. 32 bladz. in 4°." [12]). In N°. 4, 5 wederlegt hij ISAAK DE GRAAF. Daarop vermeldt hij N°. 6—10 vier brieven, Tholen 21 Mey 1714, Amsterdam 4 Augusti 1714, Hofstede buyten Leyden 17 Augusti 1714, en 's Gravenhage 27 Augusti 1714 (in het fransch). N°. 11—62 behandelt hij de bestrijding van MATTHEUS SOETEN, waaruit blijkt, dat hij 7 September 1714 in de Haagse Courant een tegen-advertissement had doen plaatsen.

Na het werk zelf komt een „Voor-berigt" tegen het boekje van DIRK KRUIJK, bevattende N°. 63—71; hierin spreekt hij van *krukkige reden* van KRUIJK, een *kruijk*, die *vol borrel* is, enz.; in het algemeen getuigt vooral dit laatste gedeelte van groote gevoeligheid.

7. Toevallig ontmoette ik nog een boekje van veertig jaar later, dat met dezen WAEYWEL in verband staat. Het is „Wiskundige demonstratie van GILLIS BOVY, stads-timmerman te Zutphen 1754. 11 bladz." in 8° [13]); waarin hij de verhouding van Archimedes bewijst, in de meening toch van iets nieuws te hebben geleverd. In de „Voorrede" verhaalt hij, hoe de quadratuur van WAEYWEL „g'examineerd goedgevonden en ge- || attesteerd is op den 5 en 23 July || 1715 door HENR. COETS, *Le- || ctor Mathes.* te Leyden en N. STAM- || PIOEN, waar voor gemet. WAEY- WEL van de Staten van Holland || en Westfriesland ter beloninge van || zyn aangewende vlyd en moeite || eens voor al is toegelegd de somma || van 500 gld."

Dit had plaats bij resolutie der Staten van 30 Mei 1716.

In het jaar 1717 verscheen er nog over die quadratuur een boekje, geschreven door zijne dochter AGNES [14]).

DANIEL WAEYWEL overleed den 14den Februarij 1736.

AANTEEKENINGEN.

[1]) Jacob Marcelis, De Quadrature van den Circkel ofte de Vierkantsmaking des ronds, door hem uitgevonden. t'Amsterdam, 1698. in 4°.

[2]) AMPLIATIE || EN || DEMONSTRATIE || Wegens de || QUADRATURE || VAN DE || CIRKEL: || DOOR || JACOB MARCELIS. || t'AMSTERDAM, || By WILLEM DE COUP, Boekverkooper || op 't Rockin, aan de Val-brug. Anno 1699. in 4°. met „5 Printen."

A—G. Na den titel een „Aan de Konst-liefhebbende || LESER" (2 bladz.). Daarop „*Een Tafel van t' A, B, C, nevens verscheijde Cyfer-* || *getallen, als volght*", eenige der hem gevonden waarden. Daarop

Blz. 5—15 het werk.

Blz. 56 (zonder paginatuur) Drukfouten.

[3]) EENVOUDIG || VERTOOG, || *Briev-wijs geschreven aan* || JACOB MARCELIS, || Tot AMSTERDAM. || Over syn gemeende uytvinding van de || QUADRATURA CIRKULI, || Door hem uytgegeven. || *Hier by-gevoegd een* || ANTWOORD, || *Op syn Edhs: versoek, in de* Amsterdamse *Kourant,* || *van den* 26 *Augustus* 1700. || Door K: N: Schoolmr. tot Kwadijk. || Vignette: eene meetkundige figuur, zie bladz. 20. || Tot AMSTERDAM, || By HENRIK DONKER, Boekverkooper in de Nieuwen || Brugsteeg. 1702. in 4°.

A—E, blz. 1—40. Blz. 38 is geteekend KLAAS NAJER, zoodat deze de schrijver K. N. is.

Blz. 39 bevat NA-BERIGT. Blz 40 (zonder paginatuur) geeft:

„*'t Versuym door 't Sgryven of den Setter,*
bragt voort dees' Her-gestelden Letter."

[4]) Jacob Marcelis, De sleutel en openinge van de Quadrature. Amsterdam 1704. 4°.

[5]) De eerste en eenigste || UYTVINDING || Van de || CIRCUL || QUADRATURA, || Uytgevonden door || JACOB MARCELIS, || *Burger, Koopman en*

Zeepsieder tot Amsterdam, den 13 *Fe-* || *bruary* 1714. *als wanneer dezelve oudt was* 77 *Jaren* || *en negen Maenden.* || *Gedrukt voor den Demonstrant* JACOB MARCELIS. || Tot AMSTERDAM, || By de Erven van HERMAN AALTSZ., op de Nieuwezyds Achter- || burgwal, naast de Brouwery van de Hooyberg. 1714. in 4°. met 1 plaat.

IV bladz. Titel en „VOORREDEN || Aan den Konstlievende || LEESER" (2 blz.) waaronder vier „*Erreuren of Drukfouten.*"

A—D. Blz. 1—30.

Blz. 1—23. DEMONSTRATIE || VAN DE || QUADRATURE || VAN DEN || CIRCUL.

Blz. 24—30. REGISTER || Van de || QUADRATURE || Van den || CIRCUL.

6) ELUCIDATIE, || Wegens het voorgaende Tractaetje, || Aengaende de || QUADRATURA VAN DEN CIRCUL, || En uytvinding van deselve, namentlyk dat alle Quadraa- || ten reekenbaer werden bevonden, oversulks dat || deselve dan niet Irrationaal nog Surdes syn. in 4°.

Dit werk is waarschijnlijk ook van 1714.

A—B. Blz. 1—10.

7)* DEMONSTRATIE || Wegens de || QUADRATURA CIRCULI || Ontdeckt, en uytgevonden || Door || DANIEL WAEYWEL, || *Tot Amsterdam, op den* 15 *Juny* 1712. || Vignette. || t'AMSTERDAM, || By CORNELIS VAN HOOGENHUYZEN, op de Egelantiers- || gragt, by de tweede Brug, aan de Noord-zy. in 4°. met 1 plaat.

A—D. Blz. 1—28 bevatten in verso van den titel de „*naergenoemde drukfouten,*" den „VOORREDEN || Aen alle || HEEREN en LIEFHEBBERS || In dese Konst" (3 bladz.) geteekend door schrijver eigenhandig.

Blz. 6—28. Demonstratie.

8)* LA DEMONSTRATION || SUR LA || QUADRATURE || DU CERCLE, || Trouvé par || DANIEL WAEYWEL : || *à Amsterdam le* 15 *Juin* 1712. in 4°. met 1 plaat.

A. Blz. 1—7 een bladz. wit.

9)* AANMERKINGE || OP || DANIEL WAYWELS || DEMONSTRATIE || Over zyn gewaande Vinding van de || QUADRATURA CIRCULI, || Waar in niet alleen getoont werd, dat deese Demonstratie || tot allerley valsche getallen, soo wel als tot de sijne konnen toegepast || werden; maar ook, dat volgens zyne eyge betoogs-wyse, zijn || eygen getallen noodsakelijk valsch zijn. En eyndelijk, dat || de reden van de Middellijn tot zijn Omtrek, door ratio- || nale getallen onmogelijk kan uytgedrukt werden. || DOOR || MATTHEUS SOETEN, || *Matheseos Lector.* || Vignette. || Tot AMSTERDAM, || By JOHANNES LOOTS, Boek- en Zeekaartverkooper in

de Nieuwe- || brugsteeg, in de Jonge Lootman. 1714. in 4°. met 1 plaat.

A—B. Blz. 1—14, is geteekend „Amsterdam den 1 || September 1714."

10)* WAYWELS || PROPORTIE, || Die de Middellyn van een Rond || heeft tot zyn omtrek, || *Onderzogt en zeer gebrekkelyk bevonden.* || DOOR || IZAAK DE GRAAF: *Philo-Math.* || Vignette. || t'AMSTERDAM, || By JOHANNES LOOTS, Boekverkooper in de Nieuwe-Brugsteeg, || in de Jonge Lootman. 1714. in 4°. met 1 plaat.

A—B. Blz. 1—14.

11)* Wiskonstige Wederlegginge || VAN DE || QUADRATURA CIRCULI, || Ontdekt en uytgevonden door || DANIEL WAEYWEL, || *Bewysende de valsheyd van zyn gevondene Proportie.* || BENEVENS || Een ontleding en ontdekking van desselfs Demonstratie, || waar in overvloediglyk aangetoont werd, dat dezelve, || tot bewys van zyn zoo genaamde Quadratura, || in het minste niet kan dienen. || DOOR || DIRK KRUIJK. || Vignette. || Tot AMSTERDAM, || By JOHANNES LOOTS, Boek- en Zeekaartverkooper in de Nieuwe- || brugsteeg, in de Jonge Lootsman. 1714. in 4°. met 1 plaat.

A—C. Blz. 1—24 bevatten in verso van den titel de „OPDRAGT || Aan myn zeer waarde en Broederlyke Vrind, || Monsr. P. V. H.", geteekend „Rotterdam den 8 || September 1774;" „VOORREDEN || *Aan alle Heeren en Liefhebbers van de Mathesis*" (2 blz.).

Blz. 5—14. WEDERLEGGINGE || VAN DE || QUADRATURA CIRCULI || Ontdekt en uytgevonden door || DANIEL WAEYWEL, || BENEVENS || Een ontleding en ontdekking van desselfs || Demonstratie.

Blz. 15—24. WEDERLEGGINGE || Van de || QUADRATURA || Waar in aangetoond zal werden, dat een veelzydige || Figuur van 160 gelyke zyden, om een Cirkel be- || schreven, welkers Diameter is 1683. een korter || omtrek en minder inhoud zal hebben als de Cir- || kels omtrek en inhoud van Waeywel, heb- || bende dezelve 1683 tot Diameter.

12)* DANIEL WAEYWEL'S || TWEEDE DEMONSTRATIE || Wegens de || QUADRATURA CIRCULI, || Dienende || Tot wederlegginge, en volslage overtuiginge van die || tegens syn eerste Demonstratie geschreven hebben || niet alleen; maar ook van alle, die nog voorne- || mens mogten zyn tegens het zelve te schryven. || En wel ten Principale, om alle Liefhebbers aan te toonen, || dat de Aanmerkingen van || MATHEUS SOETEN || Niet alleen ongefondeert, en spottens waardig is; maar ook, dat hy || syn belofte, in de Courant algemeen gemaakt, niet is nageko- || men, nog oyt volbrengen kan. || *Hier agter nog een korte*

antwoord op de wederlegginge van eenen || Dirk Kruijk. || Vignette. || t'Amsterdam, || By Cornelis van Hoogenhuisen, Boekdrukker, || op de Egelantiersgraft. 1714. || *En werd verkogt door J. Oosterwyk, Boekverkooper op den Dam.* in 4°. met 1 plaat.

A—D. Blz. 1—32 bevat:

Blz. 3—26. Tweede Demonstratie, geteekend „*Amsterdam den* 12 || *Septemb.* 1714."

Blz. 27—32. Voor Berigt.

13) Wiskundige || Demonstratie, || *Dat het* Rond *staat tegen zyn omgeschreven* || Vierkant, || Als || 11. staat tegen 14. || *Of de so langgezogte* || Quadratura || Circuli. || Ontdekt en uitgevonden in den || Jare 1749. || Door || Gillis Bovy, || *Stads Timmerman te Zutphen.* || Vignette. || Te Zutphen, || By Wolterus Bovy, || En Hendricus van Bulderen, || Boekverkopers. 1754. || in 8°. met 3 platen.

A—B. 24 bladz. bevat in verso van den titel: „Den Autheur erkend || geen Exemplaren voor || eght, dan die door zyn || eigen hand getekent en || cachet onderstempelt || zijn," met zijn cachet en naam. Dan „Voorreden || aan de || Konstbeminnende || Lezer" (8 bladz.) „Kort || voorberigt || over de || Quadratura || Circuli." (3 blz.).

Blz. 1—11 over de Figuren.

14) Traité ou considérations mathematiques et impartiales sur la démonstration de la quadrature du cercle de D. W. et sur les considérations des mauvaises critiques de ses antagonistes. La Haye 1717.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

XVII. Twee brieven van Ludolf van Ceulen.

1. Onlangs is de Bibliotheek der Leidsche Akademie in bezit gekomen van een zeldzaam werkje „Toet-steen van d'Algebra Spetiosa, door DIRCK D'HOLLANDER, Amsterdam 1669. 4°." [1]), waarin twee brieven van LUDOLF VAN CEULEN voorkomen, handelende over een vraagstuk uit het gebied der onbepaalde vergelijkingen, dat hij in zijn werk van den Circkel, konstige Vraghen, onder N°. 57 had opgegeven.

Bovendien maken wij hier kennis met ADRIANUS TWILT, denkelijk onderwijzer in de wiskunde te Amsterdam in de eerste helft der zeventiende eeuw; en met NICOLAAS HUYBERTSZOON VAN PERCIJN, die landmeter te Naarden was in het begin dier eeuw. Deze laatste schijnt een vertrouwd vriend van LUDOLF VAN CEULEN geweest te zijn. Eindelijk met den schrijver DIRK DE HOLLANDER, Rekenmeester te Amsterdam, van wiens hand nog andere werken bekend zijn.

2. De vraag zelve is deze.

„Vindt 3 Getallen, soodanigh als men van de *cubo* haarder ‖ Zomme, af trekt elk getal insonderheyt, datter reste ‖ dry *rationale cubik* getallen?"

De oplossing begint dus, in den eigenaardigen trant van dien tijd.

„*Supposons* $1\,fa$, voor de somme van de 3 begeerde getallen.

$1\,fa$, *haar somma op alle* 3,

S. $\left\{\begin{array}{l}1\,f^3a^3\text{, is den Cubo op hare somme,}\\ 1\,f^3a^3-b^3a^3,\end{array}\right.$ S. $\left\{\begin{array}{l}1\,f^3a^3\\ 1\,f^3a^3-c^3a^3,\end{array}\right.$ S. $\left\{\begin{array}{l}1\,f^3a^3\\ 1\;\;a^3-d^3a^3,\end{array}\right.$

't eerste tal. — *tweede tal.* — *derde tal.*

$+b^3a^3$ *een ratio cub. getal.* *rest* $+c^3a^3$ *een ratio cub. tal.* $+d^3a^3$ *een rat. cub.*

$b\,a$, *wortel.* — $c\,a$, *wortel.* — $d\,a$, *wortel.*

Daar resteert nu niets anders, dan dat de somme van dese drie getallen gelijk moet zijn || de eerst *gesupposeerde* somme....

$$\left.\begin{array}{ll}1\,f^3a^3-b^3a^3 & \text{'t eerste}\\ 1\,f^3a^3-c^3a^3 & \text{'t tweede}\\ 1\,f^3a^3-d^3a^3 & \text{'t derde}\end{array}\right\}\text{ vergaart.}$$

$3\,f^3a^3-b^3a^3-c^3a^3-d^3a^3$ ∞ $1\,fa$, *haar eerst* gesupposeerde *Zomme*,

Ergo $3\,f^3-(b^3+c^3+d^3)a^3$ ∞ $1\,fa$ par Reductie

deellaar $1\,a)$ $3\,f^3-(b^3+c^3+d^3)$ in aa ∞ $1\,f$, *ofte begeerende* $1\,a$, *daar*

komt $1\,a$ ∞ $\sqrt{\dfrac{1\,f}{3f^3-(b^3+c^3+d^3)}}$ . . . . . .

Om de 3 voorsz. *Cubik* getallen te vinden, *Supposons* voor || den wortel van 't eerste *Cubik* tal d, en van 't tweede $12-x$ [hier en verder herhaaldelijk staat 12 foutief voor n], van 't derde $1\,x$.

$$\left.\begin{array}{lr}d \text{ zijn } Cubik \ldots\ldots\ldots\ldots & +d^3\\ 12-x \text{ zijn } Cubik\;\; 12^3-3\,nnx+3.12\,xx-1\,x^3 & \\ 1x \text{ zijn } Cubik. \ldots\ldots\ldots\ldots & +1\,x^3\end{array}\right\}\text{ verga.}$$

$\left.\begin{array}{l}+d^3\\ +12^3\end{array}\right\}-3\,nnx+nxx$, dese zomme trekt van $3\,f^3$,

rest $3f^3\left.\begin{array}{l}-d^3\\ -12^3\end{array}\right\}+3\,nnx-nxx$, dit is ∞ eenigh *rationaal quadraat* tal, diens || wortel wy stellen te zijn, $px+k$.

Ergo $3\,f^3$ *) $\left.\begin{array}{l}-d^3\\ -12^3\end{array}\right\}+3\,nnx-3\,nxx$ ∞ $ppxx+2pkx+kk$

$1\,x)$ $3\,nnx-2\,kpx$ ∞ $3\,nxx+p^2xx$, deelt elk door $1\,x$

$3\,nn-2\,kpx$ †) ∞ $3\,nx+p^2x$

$$\frac{3\,nn-2\,kp}{3\,n+pp}\text{ ∞ } 1\,x.$$

Nota. Wy *supposeren* nu dat kk is gelijk $3\,f^3-d^3-n^3$....”

---

*) Moet zijn n^3.

†) Moet zijn $-2\,kp$.

En hierop volgt verder de discussie der waarden.

3. Dat ADRIANUS TWILT zich op deze oplossing liet voorstaan, blijkt uit de „Aen den Konstgierigen Leser."

»*In wat voor estime, den Hoog-geleerde Mathematicus* Adrianus || Twilt, *mijn Leermeester zalr: d'ontbindinge van dese Quaestie ge- || houden geeft, is my 't alderbest bekent, want hoe veel Penningen || men hem om d'instructie der selver, of copye daar van te hebben, ook || gepresenteert heeft, ten heeft al niet konnen helpen, want hy die aan || niemandt, soo langh hy leefde, wilde openbaren.*"

Uit de daarop volgende woorden blijkt, dat de trouwens zeer verschillende oplossing van VAN CEULEN in het bezit van TWILT is geweest.

»*Maar na sijn overlijden, soo is my die, beneffens de solutie van ||* Ludolf van Keulen, *met groote vreught ter hand gekomen, die by || my ook, na den aard der Liefde, in geen kleender estime, als by de || voornoemde* Twilt, *gehouden is geweest, 't welk de Liefhebbers || ook uyt soo heerlijk Werk licht sullen kunnen bespeuren.*"

4. Hierop volgt een twaalftal, ten deele verschillende „Analysen" of „Solutien": en daarop bladz. 36—49 het overeenkomstige vraagstuk voor vier cuben. Ten slotte blz. 50 komen de twee brieven van LUDOLF VAN CEULEN aan NICOLAAS HUYBERTSZ. VAN PERCIJN; brieven van een ouderen geleerde, die zijnen jongeren vriend steunt en opwekt bij zijn wetenschappelijk streven. De eerste luidt aldus.

» *Wyse, Voorsichtige, Konst-rijcke, besondere goede Vriendt, UL. schrijven heb ik || gisteren ontfangen, soude terstont geantwoort hebben, ten ware dat de vermaninge || van de koorts 't mijn verhindert hadt, daar ik eensdeels mede gequelt was, het is nu re- || delijck, daarom ik dese voorgenomen heb te schrijven, het is my van herten lief dat UL. || hem soo oeffent in de heerlijkste Konsten van Meten en Stellen, vaart soo voort UL. gelij- || ken sal in weynigh jaren niet veel te vinden zijn, ik zal UL. soo veel my mogelijk behul- || pelijk wesen, ik sal geen Quaestien bekomen van anderen, dat my veel gebeurt, of ik sal || copye aan UL. over senden, soo verre UL. daar in dan swarigheyt vindt, beloove U te hel- || pen, dit sal UL. dienen tot geen geringe saak, soo veel aangaat de* 57 *en* 69

Vrage in || *mijn boek van de Cirkel, zijn sulks, dat die de* 57 *kan solveeren, die kan de andere mede* || *maken. Deze* 57 *Quaestie is konstigh, en wordt van veele onmogelijk geacht op te lossen,* || *daar ik UL. veel van seggen sal, als wy eenmaal t'samen komen, het is de* 19 *Quaestie* || *van 't vijfde Boek van Diophante van Alexandrie, maar niet gesolveert, alsoo doet mede* || *den gene die 't selve Boek uyt de Grieksche Spraek in 't Latijn heeft overgeset, ik hebbe die* || *een ander geleert die my daar van rijkelijk betaalt heeft, maar heeft sijn beloften niet ge-* || *houden, dat is, hy beloofde my die niemant te sullen leeren, soo lange myn groot werck* || *niet gedrukt was, daar in ik de Lief-hebbers de voornoemde Quaestie gesolveert voor-dra-* || *gen soude, maar heeft in tegendeel een wijl tijdts daar na de voornoemde Quaestie aan een* || *ander geleert, die hem daar na tegen alle waarheyt beroemde, de Solutie door sich selven* || *gevonden te hebben, wat arbeydt ik daar aan gedaan heb is Godt bekent, nochtans werd* || *ik gedwongen door de liefde en vriendtschap, die ik tot UL. drage, UL. te belooven de* || *geheele operatie sonder eenigh recompens te schikken, soudt nu gaarn gedaan hebben, indien* || *myn hooft beter gestelt waar geweest, het heeft veel moeyte en veel schrijvens in, daarom hope* || *ik soo 't Godt belieft in de Paessche Heylige Dagen my daar aan te maken, en aan UL. te* || *senden, ik soude nu garen voor UL. wat dichten, maar mijn hooft wilt nu niet lijden,* || *wenschende UL. met UL. Huys-vrouw en Familie, dat u saligh is. Met haast uyt* Ley- || den, *den* 21 Maart, *Anno* 1610. || UL. Dienaar en Vriendt || LUDOLF VAN KEULEN.

Hier op volght nu de tweede BRIEF van dito van *Keulen,* || met de Solutie van voor-genoemde Quaestie.

Eersame, Voorsienige, Konst-rycke, besondere Vriendt, UL. schrijven is my ter- || *stont behandight, daar uyt verstaan heb UL. aller gesontheyt, dat my lief is, ik met* || *mijn Familie zijn mede noch in goede doen, ik schik UL. hier het werk, waar door ik hier* || *dese konstige Vrage gevonden heb, en soo ver UL. daar swarigheyt in vindt, ik sal u als* || *myn Vriendt behulpelyk zijn schrijft mijn maar UL. begeerte: my is kortelingh uyt* || *Duytslandt wat gesonden, dat lustigh maar slecht is, soo UL. yets daar van begeert,* || *schrijft my, ik sal 't u over senden: ik soude UL. wel meer schrijven, maar heb voor te-* || *genwoordigh geen tijdt, hier mede wensch ik UL. met al*

u geselschap het aldersalighste. || *Uyt* Leyden, *den* 1 May. *Anno* 1610. || UL. Dienaar en Vriendt || LUDOLF VAN KEULEN.

Volght dan de 57 *Quaestie met haar Solutie.* — — —

Antwoordt || $\frac{494424 \quad 472696 \quad 448000}{2352637}$ „

De oplossing, die hier volgt, is eene geheel andere, dan de boven geschetste; VAN CEULEN eindigt haar met de woorden: „syn alsoo de getallen recht gevonden, daar van Godt alleen de eere toekomt."

5. Uit de eerste brief blijkt vooreerst, dat ook LUDOLF VAN CEULEN, zich, naar de gewoonte dier dagen, voor zijne oplossingen liet betalen.

Van meer gewicht is de vermelding van zijn *groote werk,"* waarin hij *„de voornoemde Quaestie gesolveert voor-dragen soude.* Dit moest wel dezelfde arbeid zijn, waarvan van CEULEN gewaagt in zijn voorbericht van zijn boek „Van den Circkel," [zie Bouwstoffen N°. VIII, § 8.].

„grooter werck/ daer inne onder andere ghehandelt sal || werden van den alder-constighsten Regel Cos/ met veel konstighe Exempels/ my van || veel Meesters deser konst te maken ghesonden/ met de beantwoordinghe/ en het gene || daer op ghemaeckt ende ghevonden is/ Met noch het noodt-wendighste der voornoem- || den Regel Cos/ welck ick tot Aernhem op 't Hoff van Gelderlandt Anno 1589 gevon- || den hebbe/ door de hulpe van Godt/"

Tot nog toe meende ik, dat dit werk van VAN CEULEN was zijne „Arithmetische en Geometrische Fondamenten," die het eerst [zie Aanteekening 17 bij N°. VIII der Bouwstoffen] door zijne weduwe ADRIANA SYMONS in het licht is gegeven. Immers worden in dat werk ook verschillende personen genoemd, die hem vraagstukken ter oplossing hadden toegezonden, zoo als

de Const-rijcke wel-gheleerde ende Sin-rijcke *Mathematicus, Meester Symon Steuijn* {bladz. 187, 211 (in 1582), blz. 136, in 1583)},

zijn Discipel *Pieter Cornelisz.* (blz. 163, 243),

de constighe Landmeter *Adriaen Ockers* van Amsteredam (blz. 196, 243) zijn leermeester,

de hervaren ende rechten liefhebber dezer Const, *Meester Johan Pouvvels* blz. 203, 212),

de constigen Jonckman *Cornelis Pietersz* van Alcmaer (blz. 212),

de Hooch-geleerde Heer *Johannes Wilhelmi Velsius,* Doctor binnen Lewarden, (blz. 229),

zijn discipel *Willeboort Rudolfsz Snellius Soon* (blz. 212, 230, 242),

zijn discipel *Nathaniel Claessoon* (blz. 242),

de geleerde ende zeer hervaren in dese Consten, Meester *Nicolaes Pietersz* van Deventer (blz. 244 in 1584),

de rechte Liefhebber *Samuel Krop van Doevers* (blz. 244 in 1599),

terwijl hij op blz. 225, nog een vraagstuk behandelt, "opentlijck aengeclampt den achtsten Junio tot Leyden Anno 1598."

Maar in deze Fondamenten vond ik ons vraagstuk niet, en konde het ook daarin niet vinden, omdat het in geen der zes "Deelen" paste. Nu weet men, dat deze "Fondamenten" afbreken bij een voorstel 17 (blz. 271), waarbij wel eene figuur, maar geen antwoord of oplossing te vinden is. Het konde dus zijn, dat die "Fondamenten" slechts een brokstuk was, niet verder door VAN CEULEN bewerkt, en dientengevolge ook niet verder door zijne weduwe in het licht gegeven. Doch bij het omslaan van het blad viel mijn oog op de volgende zinsnede (blz. 269)

"Ick vviste hier noch vvel veelderhande corden te setten met ander stuc- || ken, maer tsal beter te passe comen in mijn Cosbouck, daer ick de vindinge || des Hooch-geleerden *Adrianus Romanus* sal stellen."

Daaruit mag men dus besluiten, — afgescheiden van de vraag of "de Arithmetische en Geometrische Fondamenten" een brokstuk zijn of niet, — dat er nog een "groot Werck over Cos" door LUDOLF VAN CEULEN geschreven is; dat dit boek in Mei 1610 niet gedrukt was; dat zijne weduwe het niet heeft uitgegeven; en dat het dus meer dan waarschijnlijk bij het overlijden van VAN CEULEN niet genoegzaam voor de pers gereed was gemaakt.

6. Er blijft nog over om met een paar woorden den verzamelaar DIRCK DE HOLLANDER te gedenken, die in het beschreven boekje voor ons heeft bewaard, wat eenig nieuw licht verspreidde over den arbeid en den geest van LUDOLF VAN CEULEN.

Hij heeft zich nog verdienstelijk gemaakt door eene verbeterde uitgaaf te bezorgen van "de Cijfer-konst van DAVID COCK

van Enckhuysen." Ik bezit daarvan de vierde Druck van 1661 [2]) te Amsterdam, waarin DIRCK DE HOLLANDER zich noemt: Itali-aens Boeck-houder/ Reecken-meester ende Liefhebber der Wis-konst." Deze druk is uitgegeven door HENDRIK TJERCKSZ DE VRIES, Boekverkooper/ op de Zee-dijck/ over de Storm-steegh/ in de Chronijck van Frieslant,"; terwijl ik een ander exemplaar bezit, evenzeer „Den vierden Druck", volkomen dezelfde als de bovengenoemde, maar in 1680 [3]) te Amsterdam uitgegeven door MICHIEL DE GROOT, Boeck-verkooper op de Nieuwen-dijck/ tusschen de twee Haarlemmer-Sluysen."

Men zoude meenen, dat hier van eenige soort van nadruk sprake was; maar het werk van Dr. LEDEBOER [4]) lost de onzekerheid volkomen op; daaruit blijkt toch dat de zaak van H. T. DE VRIES slechts van 1652—1674 bestond, die van M. DE GROOT 1660—1682; de laatste had dus denkelijk het copijrecht van den eersten overgenomen. En dit wordt verder bevestigd door eene „Sevende Druck van de Cijferkonst [5]) in 1734 te Amsterdam uitgekomen bij „de Erve van de Wed.: G. de GROOT, Boekverkoopster op de Nieuwen Dijck, tusschen de twee Haar-lemmer-Sluysen." Volgens Dr. LEDEBOER toch komen te Amsterdam achtereenvolgens voor, in hetzelfde huis

Gysbert de Groot 1682—1696,

Weduwe G. de Groot 1696—1717.

Erven Wed. G. de Groot 1717—1653.

Uit de voorrede van het boekje van Noot (2) van HENDRICK DE VRIES, blijkt, dat eerst deze vierde druck door DE HOLLANDER is verbeterd en vermeerderd met een „*Aenhanck van* (80) *diversche Questien* (blz. 339—376).

Dat dit rekenboek van DAVID COCK VAN ENCKHUYSEN veel en lang is gebruikt, blijkt wel uit een ander boekje, „De vernieuwde Cyfferkonst door David Cock van Enchuysen, vermeerderd door J. B. Wappers," [6]), dat te Gent is uitgekomen in het jaar 1799. Hier is echter de orde van de behandelde onderwerpen geheel veranderd.

AANTEEKENINGEN.

---

1) TOET-STEEN || VAN || d'Algebra Spetiosa, || ALWAER DOOR || *den Konstrijken en seer Hoog-geleerde Mathematicus* || ADRIANUS TWILT, zal[r]. || BY NA || Op een oneyndelijke manier proef-vast getoetst wordt || de 57ste Quaestie van *Ludolf van Keulen*, in syn Boeck || des Circkels, ofte de 19de Quaestie, uyt 't vijfde Boeck van den || wijtvermaerden Griek *Diophante van Alexandrie.* || ALSMEDE || *Noch twee Brieven, geschreven door den Hoog-geleerden Professor* || L. van Keulen, *aan sijnen goeden Vriendt* Nicolaes van Percyn, *in sijn tijdt* || *gewesene Landtmeter tot* Naerden, *waer in de voornoemde* 57ste *Quaestie,* || *door hem* van Keulen *ook getoetst en geproeft wordt.* | Alles ten behoeve van de Konstgierige Liefhebbers, by een gestelt en gecorrigeert || *Door* DIRCK d'HOLLANDER, || *Italiaans Boek-houder, Reeken-Meester, en Liefhebber der Mathematische Konsten.* || Vignette. || t'AMSTERDAM, || Gedruckt voor den Autheur, en men vindtse te koop by *G. Goedes-* || *bergh*, op 't Water, by de Nieuwe Brugh, En by *Willem van Beaumont,* || in de Kalver-straet, in de Witte Boeck-Pers. 1669. in 4°.

A—C, 4 bladz. zonder pagineering, bevatten titel en het „Aen den Konstgierigen Leser." (2 bladz.). Daarop bladz. 5—52.

2)* DE || CYFER-KONST, || Noyt voor desen || Den Leerlingen grondiger, noch oock || duydelijcker, voor-gestelt. || *Beschreven door* || DAVID COCK van ENCHUYSEN. || Den vierden Druck. || Van alle mis-druck ghesuyvert/ verbetert/ ende || merckelijck vermeerdert/ door || DIRCK de HOL- || LANDER, Italiaens Boeck-houder/ || Reecken-meester ende Liefhebber || der Wis-Konst. || Vignette. || t'AMSTERDAM, || Voor HENDRICK TJERCKZ de VRIES, Boek- || verkooper/ op de Zee-dijck/ over de Storm-Steegh/ || in de Chronijck van Vries-lant./Anno 1661. in 8°.

8 bladz. bevatten na den titel „DEN DRUCKER || *Aen den bescheyden* || LESER, || Benevens alle Konst-lievende School-meesters || ende beminders deser edele Cijfer-konst." (5 bladz.) en „Principael Inhoudt deses || BOECKS" (1 bladz.).

Daarna A—Aa, bladz. 1—316.

Aan het einde staat

t'Amsterdam, || *Gedruckt by Kornelis de Bruyn, in de Gravestraat,* || *achter de Nieuwe Kerck.* 1661."

[3])* Hetzelfde werk met denzelfden titel. Alleen volgt op de vignette

„t'Amsterdam, || By Michiel de Groot, Boeck-verkooper || op de Nieuwendijck/ tusschen de twee Haar || lemmer-Sluysen/ Anno 1680." in 8°.

en ontbreekt de opgave van den drukker achteraan.

[4])* Alfabetische lijst || der || boekdrukkers, boekverkoopers en uitgevers || in || noord-nederland || sedert de uitvinding van de boekdrukkunst tot den aanvang || der negentiende eeuw || door || A. M. Ledeboer || (Ledebur) || Med. Doct., Lid van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, Eerelid der || vereeniging tot bevordering van de belangen des boekhandels enz. || Vignette: het merk van den uitgever, in kleuren. || te Utrecht bij || J. L. Beyers. || 1876. in 4°.

XVI bladz. niet gepagineerd, bevatten een franschen titel en achter den beschreven titel de lijst der inteekenaars (4 bladz.), een voorrede (6 blz.) gedateerd. „*Te Deventer*, in Augustus 1876."

1—25. bladz. 1—198.

4 Platen.

[5])* Wederom hetzelfde werk als in de Aanteekeningen (2) en (3) met denzelfden titel, waarvan echter nu het slot luidt

„t'Amsterdam, || By de Erve van de Wed. G. de Groot, Boek- || verkoopster op de Nieuwen Dijck/ tusschen de || twee Haarlemmer-Sluysen 1734." in 8°.

[6])* De vernieuwde Cyffer-konst, || *Noyt voor dezen zoo gedrukt nochte* || *den Leerling grondiger en duyde-* || *lyker voorgesteld:* || door david cock || van enchuysen. || *Vermeerderd met verscheyde Vraeg-stukken en Wissels* || *uytgewerkt door den Keting-Regel, en Preuven op* || *ider Vraegstuk, zoo door de Gelykmaetigheyd als* || *door den Keting-Regel, ofte door twee verscheyde* || *Werken den zelven facit uytbrengende, met de uyt-* || *legginge, hoe de zelve moeten bewerkt worden,* || door || J. B. Wappers || van antwerpen. || *Nauwkeurig overzien, en merkelyk verbeterd.* || Vignette. || tot gend, || By Bernard Poelman, op de Hoogpoorte in || het gekroond Zweird. || M.D.CC.XCIX. in 8°.

4 bladz. na den titel de „Tafel || van den inhoud dezes Boeks." (2 bladz.)

A—Aa, bladz. 1—372.

NALEZINGEN

OP DE

BOUWSTOFFEN N°. I—XVII VOOR DE GESCHIEDENIS

DER WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

B. beteekent "Bouwstoffen N°", *A.* beteekent "Aanteekening", *N.* beteekent "Nalezingen".

B. I. § 8. Aan het einde bij te voegen:

Vergelijk Bouwstoffen N°. III. § 6—11. Daaruit volgt, dat hij reeds in 1652 als uitgever in den Haag optrad

B. I. § 9. Aan het einde bij te voegen:

DE DECKER schreef nog

*Nieuwe Rabat-tafels. Midtsgaders van interest op interest. Gouda. 1630. in 4°. $^{\alpha}$).

B. 1. A. 13. Dit werk komt ook gedrukt voor in

VAN KAMPEN Geschiedenis der letteren en wetenschappen. Deel III. Delft 1826. bladz. 113*—142* en bladz. 289—312.

B. III. § 4. Bij de lijst der uitgaven van de kleine tafels, behoort nog te Amsterdam in 1695, bij H. Boom en D. Boom. in 8°.

B. III. § 6. Van het hier beschreven boekje bezit de Bibliotheek der Leidsche Hoogeschool eene tweede uitgave. Daarin komen bij de voorrede de volgende varianten.

bladz. 13. reg.			
	3 v. b.	Autor	Author.
	14	nationes	Nationes,
	15	Miratur	Miratus.

B. III. § 10. Aan het einde bij te voegen de door Vlack gedrukte werken.

1657. G. J. VOSSII De Philosophorum sectis Liber.

1658. G. J. VOSSII De Philosophia et Philosophorum Sectis Libri II.

1658. G. J. VOSSII De Logices et Rhetoricae Natura et Constitutione Libri III.

1658. G. J. VOSSII De Rhetorica.
1658. C. HUGENII Horologium Oscillatorium.
1658. J. B. MORINI Astrologia Gallica.

B. III. A. 26. Bij een exemplaar in de Bibliotheek der Leidsche Hoogeschool eene „Editio Secunda, Hagae Comitum 1654," komt achter den titel slechts eene PRAEFATIO || AD || LECTOREM enz. 12 bladz., en daarop volgt dadelijk „Miltoni Defensio Secunda."

B. IV. Op hare plaats is het volgende in te lasschen.

1634. Amsterdam 8⁰. 6.
1653. Amsterdam 8⁰. 6. *P. Cruger* Doctrina.
1656. Amsterdam 8⁰. *E. Wingate* Logarithms.
1665. Amsterdam 8⁰. 7. *A. Vlack* Tafelen.
Nog de herdruk 1695*.
1712. 4⁰.
1714. Amsterdam 8⁰. 7. *P. Hellingwerff* Bosschieterye*.
1742. Amsterdam 8⁰. *Kruse* Hamburger Tab.
1798. Amsterdam *Hochheimer* Arbitrage Rek.
1803. Middelburg 8⁰. 4. *J de Kanter Phz.* Ecliptische Tafels*.
1826. Amsterdam 8⁰. 7. *J. Swart* Verzameling.
Nog de herdrukken 1835, 1837*, 1845.
1831. Leiden 8⁰. 6. *J. Pilaar* Handleiding*.
1832. Amsterdam 8⁰. 5. Jaarb. Kon. Inst. v. Ing.*

B. V. § 1. CLAAS JANSZ. VOOGHT GEOMETRA werd geboren den 27 April 1696 te Broek in Waterland.

B. V. § 3. blz. 46. Bij een herdruk der tafels van 1707 vindt men op den titel.

„En achter aan de *Logarithmus Tafelen* || van *Sinus, Tangens* en *Secans* &c., Welke alle Curieus in kopere Platen zijn || gesneden, en de streeck-Tafelen tot op 80 grade uytgereekent."

B. V. § 3. blz. 46. Bij het lijstje der boekdrukkers VAN KEULEN, moet, volgens opgave der nog bestaande firma het volgende worden veranderd.

1680 —1710. JOHANNES VAN KEULEN: wordt opgevolgd door zijn zoon
1710 — . GERARD VAN KEULEN.
(1727)—1742. LODEWINA KONST, Weduwe van GERARD VAN KEULEN, met haar eenigen zoon JOHANNES VAN KEULEN, die

1742 —1750. alleen voorkomt; hij wordt opgevolgd door zijne weduwe

(1750)—1756. WED. J. VAN KEULEN; later

1757 —1778 door zijne zoons GERARD HULST VAN KEULEN en CORNELIS BUYS VAN KEULEN, onder de firma JOANNES VAN KEULEN EN ZOONEN.

1779 —1801. GERARD HULST VAN KEULEN.

1801 —1810. WED. GERARD HULST VAN KEULEN. Die firma is gebleven en gedreven door

1810 —1827. VAN DE VELDE.

1827 —1835. STAATS BOONEN en JACOB SWART.

1835 — JACOB SWART.

1865 —1877. door JACOB SWART JR.

Deze opgaven kunnen tevens tot aanvulling dienen van die, welke voorkomen in Dr. Ledeboer, Alfabetische Lijst der Boekdrukkers enz. Utr. 1876; waar men nog eene geslachtslijst der VAN K. vindt.

B. V. A. 15. Omtrent de verschillende drukken van 't Vergulde Licht der Zeevaert nog bij te voegen

de zevende van 1725*.

Nog vindt men de nadrukken

Amsterdam 1694 bij Jacobus Robijn;

Middelburg 1705* bij Aron van Poulle; nog wel met een privilegie van de Staten van Zeeland.

B. VI. § 2—10. Naar aanleiding van dit Nummer der Bouwstoffen, werd mij door de Mathematische Gesellschaft te Hamburg, — die nog krachtig leeft en werkt, en eene voortzetting is van de Kunst-Rechnungs-Societät aldaar, met gelijk doel, maar onder eenigzins veranderden naam, — verzocht hare geschiedenis te schrijven. Aan die vereerende opdracht werd door mij gevolg gegeven, en daardoor ben ik in staat, nog eenige nieuwe bijzonderheden mede te deelen.

Ad § 2.

N⁰. 8 overleed 1735, en N⁰. 11 in 1748.

De „Stern und Kern der Algebra" van H. MEISZNER beleefde eene tweede uitgave van 1740 *(β).

De titel van het „Informatorium" van VAL. HEINSZ is „Informatorium Arithmeticum, Problematis ex Regula Alligationis adornatum."

Van diens „Tyrocinium" is eene 15de, van dien „Schatzkammer" eene 4de uitgave bekend.

Zijn „Siebenfaches Alphabet" heeft tot titel

„Siebenfaches Alphabet groszer und dreifacher kleiner einzügiger teutscher Anfangs-Buchstaben."

De „Solvirter Lambechischer Appendix" van M. Scharff is het eerst in 1703 verschenen.

Johann Halchen schreef

„Speculum Mathematicum betreffend die grosse Sonnenfinsterniss 1699, 23 September, in specie wie auch in genere berechnet. 1698."

P. Tidemann gaf nog

„Schreib-Kunst- und Fractur-Vorschriften."

De titels van een paar werken van C. Danx luiden als volgt.

„Kurze doch gründliche Instruction" enz.

„Ein nach jetzt üblichem Mercatorischen" enz.

Ad § 5.

N°. 19 stierf vóór 1774; N°. 23 in 1724; N°. 24 in 1734.

De titel van het werk van J. Riege is

„Lapis Lydius Mercatorius, oder Probirstein der Kaufmännischen Rechnung. 1697."

Ad § 6.

N°. 26, 27 en 28 waren de eerste „Ehrenmitglieder", dus geen gewone leden. N°. 27 overleed in 1723.

N°. 30 overleed in 1705; N°. 31 in 1729; N°. 32 in 1727; N°. 33 voor 1774; N°. 34 in 1731; N°. 35 in 1740; N°. 37 in 1738; N°. 39 voor 1774; N°. 40 in 1725; N°. 41 in 1745; N°. 42 in 1747; N°. 43 in 1751; N°. 44 voor 1774; N°. 46 in 1750; N°. 47 in 1732; N°. 48 in 1743; N°. 49 in 1734.

Het werk van J. L. Grafe verscheen in 1713.

J. G. Meckenhäuser schreef

„Opusculum Musico-Mathematicum der musikalischen Temperatur, über die Zwölf rational gleiche Tonos minores. 1729."

De titel van het boek van G. H. Paricius is

„Cambio-Mercatoria oder neuerfundene Reductiones deren vornehmsten europäischen Münzen. 1717."

Dezelfde gaf nog

„Diverse Initial- oder Anfangs-Buchstaben, davon er ein Verzeichniss von N°. 1—33 herausgegeben."

„Alzeit fertiger Ellen Rechner."

Het werk van J. H. Westerkamp zag in 1720 het licht.

N. Rohlaffs schreef nog

„Curieuse Uhr-Tabellen. 1741."

„Kunstlicher Zahlenspiel. 1742."

Ad § 7.

N°. 50 was het vierde „Ehrenmitglied"; hij overleed in 1760.

N°. 51 overleed in 1731; N°. 52 in 1754.

Na dezen N°. 52 moet ingelascht worden

N°. 52^{a}) Claus Magens, Kaufmann, Philo-Mathem., in London [Der Meditirende]; overleden 1764.

Door deze opgave vervalt de vreemde omstandigheid, waarop in § 8 werd gewezen; maar tevens ook het eerste nieuwe lid, dat in § 9 wordt genoemd.

N°. 53 overleed in 1735; N°. 55 in 1752; N°. 56 werd 6 December 1725 Magister Calligraphiae et Arithmetices aan het Johanneum te Hamburg en overleed in 1747, den 11den Maart; N°. 58 overleed in 1742; N°. 59 in 1760; N°. 60 in 1751; en N°. 61 in 1745.

J. C. Oehler schreef o. a.

„Das erste Halb-Dutzend einzügig schattirter Initial-Buchstaben. 1723" en nog

„Arithmetica Mercatoria nova 1724."

„Cambio Commune."

Jos. Schöttel gaf

„Arithmetische Nebenstunden. 1754."

Van G. Hiddinga werd opgegeven

„Anleytung zur Geometrie und Trigonometrie". Hamburg. 1746; met een tweeden druk van 1761.

Voorts schreef dezelfde

„Wechsel Tabellen. 1737."

„Die Erscheinung des Mercurii in der Sonne den 4 November 1745."

H. Wahn schreef

„Himmelspiegel, der Planeten Lauf und Stand. 1722."

„Funffacher Holst. Calender mit dem Himmelspiegel ingl. versch. Hamburgische und andere v. 1723 bis einige nachfolgende Jahren."

„Calendarium perpetuum mit der Beschreibung des Inhalts und Gebrauches."

„Eine neu eingerichtete Stern-Karte."

„Kürze Erdbeschreibung mit Karte."

„Deutsche Grammatik und Orthographie."

Van C. S. Ramus bezitten wij

„Compendium Arithmeticum Theoretico-Practicum. 1738."

Ad § 8.

Volgens het vorige moeten hier de woorden

„van der Meditirende (wiens waren naam || ik niet heb kunnen opsporen)."

vervangen worden door

„Claus Magens."

Ad § 9.

Bij de leden, die in 1742 nog leefden, moet nu gevoegd worden N⁰. 52*a*.

Van de toen nieuw toegetredenen kan ik het volgende vermelden.

Daar N⁰. (52*a*) het vorige aantal tot 62 doet klimmen, begin ik met (63).

63) Peter Lorentzen, Schreib- und Rechenmeister, der mathematischen Wissenschaften Geflissener, in Tondern [der Liebende]; overleden in 1773.

64) Johann Daniel Böhlcken, Handels-Buchhalter, hochfürstlicher Wolffenbüttel–Factorey-Schreiber, zu Torga im Stift Walckenried, der mathematischen Wissenschaften Geflissener, in Blankenburg [der Bewahrende]; gestorven in 1771.

65) Johann Elias Greszner, bestallter Schreib-, Rechen- und Obermeister der Kirchenschule zu St. Jacobi in Hamburg [der Gränzende]; hij was opvolger van J. C. Oehlers (N⁰. 53) en overleed 1768.

66) Melchior Kohlmann, bestallter Schreib- und Rechenmeister in Bremen, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Könnende]; overleden in 1731.

67) Johann Bernhard Held, Organist in Salz Upffeln, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Heischende].

68) Luder Wehrmann, bestallter Schreib- und Rechenmeister der Schule zu St. Stephani in Bremen, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Wachtende]; overleed 1739.

69) Hermann Reimer, bestallter Schreib- und Rechenmeister am Königl. und Churfürstl. Dohm

in Bremen, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Rühmende]; gestorven in 1761.

70) Albert Ahrent, bestallter Schreib- und Rechenmeister im Amte Ritsbüttel, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Acceptirende]; overleed in 1750.

71) Johann Nicolaus Steding, bestallter Schreib- und Rechenmeister zu Stadthagen in der Reichs-Grafschaft Schaumburg [der Sammlende]; hij stierf in 1754.

72) Adolph Friedrich Marci, Schreib- und Rechenmeister und Buchhalter, wie auch Translateur, und der mathematischen Wissenschaften Geflissener, in Amersfoort und Amsterdam [der Meritirende]; overleden in 1754.

73) Johann Jürgen Ressing, bestallter Schreib- und Rechenmeister au der ersten Neustädtischen Armenschule bei der alten Michaeliskirche in Hamburg, des Buchhaltens und der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Ruhende].

74) Johann Daniel Intelmann, Notarius Portorii bei der See-Zoll, der mathematischen Wissenschaften Geflissener, in Reval [der Inclinirende]; gestorven in 1760.

75) Christiaan Croese, Schreib- und Rechenmeister, der mathematischen Wissenschaften und des Buchhaltens Beflissener, in Swyndorp(Oost-Vriesland) und Amsterdam [der Kunstliebende].

76) Johann Christian Poussette, Bürger-, Bau- und Proviantschreiber in Lüneburg, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Preisende]; overleed vóór 1774.

77) August Ernst Broyer, Schreiber und Rechenmeister, im Marne in Inder Ditmarschen am Tremmetwärther neuen Deich [der Bereitende]; overleden vóór 1774.

Wat hunne werken betreft, is de titel van het werk van J. N. Steding.

„Kunst-Kabinet aus der Arithmetica Curiosa, Arithmetica Figurata, Geometria, Trigonometria, Calendariographia, Horologia, Geographia, etc. Olden burg, 1736."

terwijl L. Wehrmann schreef

„Edle Rechenkunst nach der Practic. 1724."
en Albert Ahrent
„Die von selbst lehrende Rechenschule, oder ein in Tabellen verfaszte Waaren-Rechnung. 1738."
J. G. Ressing schreef nog
„Kleiner arithmetischer Zeitvertreiber". 1735.
„Neuvermehrter arithmetischer Zeitvertreiber".1736.
„Arithmetische Rechenstunden". 1738.
„Caballistischer Loseschlüssel". 1743.
„Erste Grundlegung für Rechenschüler". 1747.
en J. D. Intelmann schreef
„Arithmetischer Wegweiser". 1736.

Ad § 10.

Na 1742 tot 1776 traden de volgende leden toe.

78) Johann Caspar von Hoyer, Ihro Röm. Kaiserl. Kgl. Majestät Gubernialrath, Philo-Mathematicus, in Prag [der Habende].

79) Anton von Friedenberg, Ihro Röm. Kaiserl. Kgl. Majestät Buchhalter bei der Rectifications-Kanzlei, in Prag [der Fruchtbringende]; overleden 1772.

80) Hans Sievers, bestallter Schreib- und Rechenmeister der Garnisonschule in Rendsburg, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Siegende]; gestorven in 1760.

81) Heinrich Goss, Kaufmann zu Balje im Lande Kehdingen im Herzogthum Bremen, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Gebende].

82) Jürgen Schröder, Kirch- und Schulbedienter zu Wevelsflath im Herzogthum Holstein, der mathematischen Wissenschaften Geflissener [der Sinnende]; overleed in 1761.

83) Carsten Schrum, Verordneter Schreib- und Rechenmeister, der mathematischen Wissenschaften Geflissener, in Rendsburg [der Spürende].

84) Johann Reimer, Informator der Mathematik, Navigation, und der Italiänischen Buchhaltung, in Hamburg [der Recreirende].

85) Jacob Rolfing, Extraordinair Schreib- und Rechenmeister, der mathematischen Wissenschaften und des Buchhaltens Beflissener, auf den Hamburger Stadtdeich [der Rechnende].

86) Joseph Crummel, Lehrer der Mathematik, in Aachen [der Critisirende].

87) JOHANN HEINRICH HÖCKER, der mathematischen Wissenschaften Beflissener [der Habilitirende].

88) Pater SIMON BAUM, Professor im Kloster Marienforth bei der Stadt Bonn im Cöllnischen [der Brechende].

89) PETER NICOLAUS SVENSEN, verordneter Schreib- und Rechenmeister an der St. Petri deutschen Kirchenschule, der mathematischen Wissenschaften Beflissener, in Copenhagen [der Speculirende].

90) FEDDER CARSTENS, Banquier in Hamburg, und Philo-Mathematicus [der Contentirende].

91) JOHANN ERICH PLATE, bestallter Organist und Schulmeister, auch Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, zu Sottrum im Amte Ratenburg [der Prangende].

92) ARON HANSEN, Informator der Navigation, und der mathematischen Wissenschaften Beflissener, zu Oeverum auf der Insel Föhr [der Anhaltende]

93) BALTZER BENER, verordneter Schreib- und Rechenmeister, auch Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, zu Ritzebüttel [der Beurtheilende].

94) JACOB OOSTWOUD, Leermeester in de Wiskonst, tot Oostzaandam [der Occupirende].

95) HANS RÜBEKE, verordneter Schreib- und Rechenmeister, auch Organist, Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, in Mohrburg bei Hamburg [der Remarkirende].

96) ALBERT VRYER, Leeraar der Doopsgezinden te Wormerveer, aan de Zaan en Philo-Mathematicus [der Vigilirende].

97) JOHANN TÖPCKEN, Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, zu Fedderwarden in der Grafschaft Oldenburg [der Temperirende].

98) FRIEDRICH KLOPPENBURG, Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, zu Schmalen flaetherwurp in der Grafschaft Oldenburg Amt Ovelgöwe [der Considerirende].

99) JOHANN LANGE, Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, in Hamburg [der Lernbegierige].

Onder de hier genoemden waren verscheidene schrijvers.

Van J. C. HOYER bezit men

„Geschwinder Interessen-Rechner". 1745.

Van Jurg Schröder

„Tabellen zum Leinband Messen". 1748.

Van Johann Reimer

„Anleitung zur Rechenkunst". 1758.

„Der gemeinmützige Mathematische Liebhaber. 4 Theile à 26 Stücke. 1767, 1768, 1769."

„Sammlung gemeinmütziger mathematischer Aufgaben". 1773.

Van Joseph Crummel

„Compendium neuer Gregorianisch-Oekonomisch-Astrophysikalisch-Geographische Kauf- und Handels-, wie auch Planeten- und am Ende dieses Seculi auslaufender Circular-Calender von 1749—1800 inclusiv."

„Nutzen der Algebra in allen Wissenschaften. 1758."

en van Pater Simon Baum

„Arithmetische Baumschule oder Fortpflanzung der gesammten Rechenkunst. 1768."

B. VI. § 11. Het Lubecksche Vraagstuk werd door clausberg behandeld in zijn „Kurzgefasste Erklärung" [zie de volgende nieuwe Aanteekening N°. γ]. Marci antwoordde daarop vrij onzacht in zijne „Gründliche Anzeige" [zie de nieuwe Aanteekening N°. δ].

B.VI.A.1,2,3,4,7. Hierachter is het teeken *) vergeten.

A. 5. Dit werk is van het jaar 1724.

A. 11. 12. Der Meditirende is nu gebleken Claus Magens te zijn.

B. VII. § 10. Omtrent de geleerden, waaraan de platen voor zijn werk door Nicolaus Raymarus Ursus Dithmarsus waren opgedragen, kan ik, ten deele door de welwillende opgaven van den Hoogleeraar J. de Wal, het volgende mededeelen.

Laurentius Tuppius was Juris Professor te Straatsburg; geboren 1528, overleed hij 3 Mei 1614.

Conradus Dasypodius, geboren 1532, overleden 6 Febr. 1612, was Prof. Matheseos te Straatsburg.

Justus Byrgi, Horologiemaker te Cassel, werd 28 Febr. 1552 te Lichtenstein in Zwitserland geboren, en overleed 31 Januari 1632.

Simon a Quercu; zie over hem Bouwstoffen N°. VII.

David Wolkenstenius was ook Prof. Matheseos te Straatsburg; hij werd 19 November 1534 te Breslau geboren, en stierf 12 September 1592.

THOMAS FINCK, geboren 6 Januari 1561 te Flensburg, studeerde te Straatsburg, werd 1588 Prof. Matheseos te Copenhagen, en overleed 24 April 1656.

BARTOLOMEUS SCULTETUS was Burgemeester te Görlitz; hij werd geboren in 1540 en stierf in 1614.

GERARD MERCATOR, geboren 5 Maart 1512, stierf 2 December 1594 te Duisburgh; hij was een vervaardiger van vele kaarten.

BARTHOLOMEUS MERCATOR, zijn zoon, werd in 1540 te Leuven geboren, en overleed 1568; hij schreef over sterrekunde.

EDO HILDERICUS FRISIUS werd geboren in 1533 te Jevern, was 1564 tot 1567 Prof. Matheseos te Jena; later Prof. Theologiae te Heidelberg en te Altorf; hij is overleden 5 Mei 1599.

PHILIPPUS APIANUS was Matheseos Prof. eerst te Ingolstadt, later te Tübingen; 14 September 1531 geboren, overleed hij 15 November 1589.

MICHAEL MAESTLINUS, uit Goeppingen, was Professor te Heidelberg, en in 1583 te Tübingen; hij overleed 1631.

HENRICUS BRUCAEUS, geboren in 1531 te Aalst in Vlaanderen, was Prof. Matheseos et Medicinae te Rostock, en stierf 4 Januari 1593.

CHRISTOPHORUS CLAVIUS BAMBERGENSIS, Jesuit en Prof. Matheseos te Rome, werd te Bamberg geboren in 1537; hij is 6 Februari 1612 te Rome overleden.

VICTORINUS SCHONFELDT werd geboren te Bautzen in 1525, en overleed 13 Juni 1591. Hij was eerst Prof. Matheseos te Marburg; sedert 1566 Prof. Medicinae.

CASPARUS PEUCERUS, schoonzoon van MELANCHTON, werd 6 Januari 1525 te Bautzen geboren; hij werd Prof. Matheseos et Medicinae te Wittenberg, na 1585 Hofmedicus te Zerbst, en overleed in 1602.

JOHN DEE werd 13 Juli 1527 te London geboren, was Astronoom-mathematicus; gestorven 1607.

B. XI. § 1. Omtrent dezen DIRK REMBRANTSZ VAN NIEROP vernam ik nog, dat in de thans gesloopte hervormde kerk te Nieuwe Niedorp, (welke naam bij verkorting tot Niedorp overgaat) zijn grafzerk gevonden werd met het opschrift:

„Dirck Rembrants van Nierop obiit, omtrent 72 jaar.
Mr. in de Wiskonst.

Hier rust dat schrander Hooft
Die D'eclips recht verlichten
D'astronomie wist te stichten
Zijn glory nooit verdooft.
Hij toond' ons dat de zon
Stilstond, d'aartkloot draayde
En hoe de dwaalder swaayde
Uit waare wijsheytsbron,
Schoon Meenigh hiermee spot
Sijn Wijser der planeeten
Doet elck D'waarheyt weeten,
Nu rust sijn ziel in God.
den 4 November 1682."

Rondom dit opschrift stonden de afbeeldingen van de hemelteekens.

B. XI. § 6. Omtrent DIRK KLINKENBERG vond ik nog, dat hij met den niet onbekenden ingenieur MELCHIOR BOLSTRA in de Waterstaat werkte, onder toezicht van Professor LULOFS, dien wij reeds in N⁰. II dezer Bouwstoffen hebben ontmoet. Ook heeft hij met den evenzeer gunstig bekenden B. GOUDRIAAN geschreven eene „Memorie over het Leidsche Meer. 1769. folio."

Ten opzichte van hetgeen hij in sterrekunde deed, verdient nog te worden opgemerkt, dat hij in 1742, 1743 en 1748 komeeten waarnam.

B. XII. § 3. Ten aanzien van de verschillende uitgaven van het „Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae" te Franeker 1633, te Amsterdam 1634 en de „tweede Editie" te Franeker 1646, scheen het wel, dat die van 1634 een nadruk moest zijn, omdat zij tusschen de eerste en de tweede uitgave in staat. Maar het „Tot den Lezer" in deze uitgaaf van 1634 lost de tegenstrijdigheid op. Deze begint op de zesde bladzijde van het voorwerk, aldus.

„Goetgunstighe Leser/ het is willich || een Jaar verleden/ dat ick hebbe uytgegeven || dit Manuael (sic)".

Hierdoor wordt de datum 1633 van den eersten druk bevestigd; hij vervolgt dan

„Als ic nu dese myne arbeyt begon te eerkouwen/ || soo werde ick wijs dat"

er eenige tafelen en inventien ontbraken, en eenige fouten voorkwamen; al dit ontbrekende geeft hij dan verder in dit „Tot den Leser".

Deze druk van 1634 is dus van Metius zelven; en is eigenlijk de tweede. Die van 1646 werd eerst na zijn dood uitgegeven.

B. XII. A. 2. Twee regels van onderen (op bladz. 237) voege men achter

„Tot den Leser" (11 bladz.)

nog het volgende.

Hier vindt men echter de oplossing dezer schijnbare tegenstrijdigheid: Metius zelf bezorgde dezen druk.

B. XIII. § 3. Uit een brief van Frans van Schooten, den zoon, aan onzen Constantijn Huygens, gedateerd „Leyden, 3 November 1648" (voorkomende in de verzameling Diederichs, Archief te Amsterdam), blijkt, dat dit portret toen nog niet was afgedrukt, en Huygens dus met het leveren van zijn onderschrift geen haast behoefde te maken.

Hieruit volgt, dat het genoemde portret niet van Frans van Schooten, den vader, maar van zijn naamgenoot, den zoon, was."

B. XIV. § 12. Bij de aanhaling van enkele zinsneden van Clavius uit zijne „Refutatio Cyclometriae Josephi Scaligeri", moest de zinsnede van bladz. 20, die met de woorden „Atque illud postremo ex me habeto", worden voorafgegaan door het volgende.

„Tu vero mi Scaliger dedisce tandem ineptire, exue tuam istam insanam temeritatem; || Disce homines esse aliquos, quos fallere nequeas, qui te, tuaq; plane dignoscant, falsaq; à veris distinguere iam || pridem norint. Agnosce, quā multis in rebus, quam foedum in modum labaris, atque Mathematici nomen tuis || veluti viribus impar onus, vergente iam ad interitum aetate, sapientior factus depone: vereri caeteros, te non vs- || que adeo omnibus anteferre, vt veluti infra te positos derideas, atq; contemnas, assuesce aliquando."

AANTEEKENINGEN.

α)* NIEVWE || RABAT-TAFELS, || Waer door sonderlingh licht ende || perfect gevonden wort het gereet gelt van eenige som- || me die te betalen is over eenige Maenden, het Ra- || bat afghetrocken zijnde teghens 8, 9, 10, 11 || ofte 12 ten hondert in 't Jaer. || MITSGADERS VAN || INTEREST OP INTEREST, || Om alle Custingh-brieven tot gereet gelt te maken, || te vinden het gereet gelt van een somme die verschijnt ten || eynde van eenige Jaren; ende als een somme eenige || Jaren op winst gelegen heeft, te vinden hoe veel || die bedraeght met de winst te samen, den || Interest gerekent tegens 5, 6, 7, 8 ten || hondert in 't Jaer, ende tegens den || penningh 13, 14, 15 ende 16. || Wtgegeven en van nieuws oversien door EZECHIEL || de DECKER, Rekenmeester ende Landt- || meter, residerende tot Rotterdam, || *Noch is daer by gevoeght de* Thiende *van* Symon Stevin *van* || Brugghe, *leerende door ongehoorde lichtigheyt alle rekenin- || gen onder den Menschen noodigh vallende, afveerdighen || door heele getallen sonder gebrokens.* || TER GOVDE, || By *Pieter Rammaseyn,* Boeck-verkooper inde Korte || Groenendal, in 't vergult A, B, C. 1630. || *Met Privilegie voor thien Jaren.* in 4°.

A—B en Oo (24 bladz.) bevatten den titel en in verso „Drukfouten" (1 blz.); daarop „Onderwysingh" (12 blz.), waarbij „*Tafel voor de deelen van een Gulden*" en „*Tafel voor de deelen van een Pont Vlaems*". Dan „NIEVWE RABAT-TAFELS" voor 1 tot 20 Maenden (10 bladz.) met gebruik van tiendeelige breuken.

a—q (128 bladz.) bevatten Jaer-tafels van t'samengevoeghde jaerpayen, van enckele jaerpaeyen, Maendt-tafels van enckele maendpaeyen, op Verlies en op Winst.

Daarop

DE || THIENDE || LEERENDE DOOR || onghehoorde lichticheyt alle re- || keninghen onder den Menschen noodigh val- || lende, afveerdighen door heele ghetal- || len, sonder ghebrokenen. || Door SIMON STEVIN || van Brugghe. || TER GOVDE, || By Pieter Rammaseyn, Boeck- || vercooper, inde Corte Groenendal, int Duyts || Vergult A, B, C. || M.DC.XXVI.

A—D. Bladz. 1—27.

Dit laatste is hetzelfde werk, dat men ook vindt in het werk van DE DECKER, beschreven in Bouwstoffen N°. I, Aanteekening (4).

β)* Stern und Kern || der || ALGEBRAE || anzeigend || wie nicht allein die gemeinen, sondern auch || die binomischen und polynomischen Wurtzeln || aus denen niedrigen und höhern Aequationen, vermittelst || einer demonstrirten general- Regul auf eine gantz || neue und leichte Weise heraus zu || ziehen; || desgleichen || wie alle figürliche flache und cörperliche Zah- || len, und deren unendliche Aggregata nach einer || bewiesenen Universal-Regul können berechnet || und cossischen Bilancen darauf || formiret werden, || Nebst kurtzer doch gnugsamer Solution || der Beschluss-Aufgabe || des || Arithmetischen Kunst-Spiegels. || Dem Publico zu Dienst || das andere mahl aufgeleget, || und um ein ziemliches vermehrt || und verneuert || von || Heinrich Meisznern, || weyl. gewesenen Schreib-, Rechen- und Ober-Meister der || St. Jacobi Kirchen-Schule in Hamburg. || Hamburg, bey Michael Cudolph Völckers, in St. Nicolai-Kirche. in 8°.

XVI bladz. zonder pagineering. Tegenover den titel een gegraveerd portret van den schrijver, met randschrift: HEINRICH MEISNER *Philo. Math.* Schreib- und Rechen-Meister weyland in Hamburg, *denat.* 1716. AE. 72." Daarboven drie schilden met de woorden: „Der Sternen Kraft", „Der Kernen Saft" „Viel Nutzen schafft". Daaronder het vers

„Diess ist der liebe Mañ, der da schon lang die Jugend,
Mit Kunstē vorgeseücht, im Leben und mit Tugend,
Noch täglich gehet vor; ja wird nicht sterbl. werden,
Als dauren wird sein Buch, alhie auf dieser Erden."

Dies: setzte Hier: Sacke.

Opdracht (12 bladz.) gedateerd „Hamburg den 29 Marz 1740."

Daarop

bladz. I—XXXII „Der ersten Auflage || Vorbericht", waaruit blijkt, dat de eerste uitgave van het jaar 1692 was.

A—Kk bladz. 1—520 het werk zelf.

γ)* Kurtz gefassete || Erklärung || des || eigentlichen Inhalts || der || Multiplication, Division, Regula || Detri, Duplex, Multiplex oder Con- || jointe, und der gemeinen Proben, || Nebst einer kurtzen Anweisung zur || Ausfindung gemeiner Universal-Reguln || in Wechsel-Arbitragen, || Wobey zugleich || Verschiedene Anmerckungen || über die || neulich alhier heraus gekommene Charteque || eines unbenannten Authoris || unter dem Titul: || Erster Theil abgestatteter *Relation Mercurii* &c. || wie auch || Die *Solution* der in gemeldter *Relation* || enthaltenen Zwo Aufgaben, || deutlich und gründlich fürgestellet || von || C. von CLAUSBERG || HAMBURG gedruckt bey Conrad König, E. Hoch-Edlen || und Hoch-Weisen Raths Buchdrucker. Anno 1731. in 8°. met 1 plaat.

A. 16 bladz. (zonder pagineering) bevat „Vorrede", gedateerd „HAMBURG || den 8 Maji 1731."

B—F. Bladz. 1—80.

δ)* Gründliche || Anzeige/ || dasz des || Hn. von Clausberg || ohnlängst || durch den Druck publicirte Gedancken || über das streitige Lubeckische PROBLEMA || gantz irrig und falsch/ || mithin offenbahr zu Tage legen: || dasz er solche zu solviren nicht capa- || ble sey. || Auf vieler Freunde Begehren || ans Licht gestellet. || von || A. F. M. || ANNO 1731. in 8⁰.

A—E. Blz. 1—80.

LIJST VAN DE BOEKEN,

BESCHREVEN OF AANGEHAALD IN DE

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN IN DE NEDERLANDEN. N°. I—XVII.

B.	A.	§	
VIII.	13.		**J. P. Amersfoordt.* Een oud plan van doorgraving van Holland op zijn smalst. 's Gravenhage 1873. 8°.
IX.	4.		*Al. Anderson.* Vindiciae Archimedis. Par. 1616. 4°.
XII.	15.	6.	**Adriaan Anthonisz.* Solutie op die 51 en 52 Propositie. Alcmaar 1589. 4°.
I.	10.		**D. Bierens de Haan.* Iets over Logarithmentafels. (Amst. 1862. 8°.).
II.	1.		**D. Bierens de Haan.* Notice sur Meindert Semeyns. (Rome 1873. 4°.).
II.	2.		**B. Boncompagni.* Intorno alla vita ed ai lavori di Meindert Semeyns. (Roma 1873. 4°.).
VIII.	28.		**B. Boncompagni.* Intorno ad una iscrisione. (Roma 1874. 4°.).
XVI.	13.		*G. Bovy.* Wiskundige demonstratie. Zutphen 1754. 8°.
XI.	5.		**J. R. Brasser.* Regula Cos. Amsterd. 1663. 4°.
XI.	6.		**J. R. Brasser.* Regula Cos. Amsterd. 1672. 4°.
I.	7.		*H. Briggs.* Arithmetica Logarithmica. London 1524. folio.

B.	A.	§	
XIII.	7.	3.	**R. des Cartes.* Principia Philosophica. Amsterdam 1656. 4°.
XIV.	17.		*P. A. Cataldi.* Trattato della Quadratura. Bologna 1612. fol.
	18.		*P. A. Cataldi.* Diffesa d'Archimede. Bologna 1620. fol.
	19.		**P. A. Cataldi.* Opusculum de lineis rectis. Bononiae 1604. 4°.
VII. VIII.	4. 10.	4;	**L. van Ceulen.* Kort claar bewijs. Aemstelredam 1585. 4°.
VII. VIII.	4. 11.	5, 6;	**L. van Ceulen.* Proefsteen ende claerder wederleggingh. Aemstelredam 1586. 4°.
VIII.	8.	3.	**L. van Ceulen.* Solutie ende Werckinghe. Amstelredam 1584. 4°.
	12.	7.	**L. van Ceulen.* Vanden Circkel. Delf 1596. fol.
	16.		**L. van Ceulen.* VandenCirckel.Leyden1615.4°.
	17.	10.	**L. van Ceulen.* De Arithmetische en Geometrische Fondamenten. Leyden 1615. 4°.
	19.	12.	**L. van Ceulen.* Fundamenta Arithmetica et Geometrica. Ed. *W. Snellius.* L.B. 1615. 4°.
	20.	12.	**L. van Ceulen.* De circulo et adscriptis. Ed. *W. Snellius.* L.B. 1619. 4°.
N.	β.		**C. von Clausberg.* Kurz gefassete Erklärung. Hamburg 1731. 8°.
XIV.	11.		**Chr. Clavius.* Opera Mathematica. Moguntiae 1612. folio.
	13.		**Chr. Clavius.* In sphaeram Joannis de Sacro Bosco. Venetiis 1596. 4°.
	14.		**Chr. Clavius.* In sphaeram Joannis de Sacro Bosco. Gervasii 1608. 4.
	15.		**Chr. Clavius.* Geometria practica. Moguntiae 1606. 4°.
	16.		**Chr. Clavius.* Algebra. Romae 1608. 4°.
XVII.	2.		**D. Cock van Enckhuysen.* De Cijfer-konst. Amsterdam 1661. 8°.
	3.		**D. Cock van Enckhuysen.* De Cijfer-konst. Amsterdam 1680. 8°.

B.	A.	§	
XVII.	5.		*D. Cock van Enckhuysen. De Cijfer-konst. Amsterdam 1734. 8°.
	7.		*D. Cock van Enckhuysen. De vernieuwde Cijfferkonst. Gend 1799. 8°.
VI.	8.		*H. Cordes. Historisch-Algebraische Neben-Stunden. Wiszmar 1707. 8°.
	9.		*H. Cordes. Neuangelegter Historisch-Algebraischer Blumengarte. Lubeck 1708. 8°.
	10.		*H. Cordes. Historisch-Algebraischer Zeit-Vertreib. Lubeck 1714. 8°.
V.	4.		*Ez. de Decker. Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst. Gouda 1626. 4°.
	9.		Ez. de Decker. Nieuwe Telkonst. Gouda 1626. 8°.
	15.		*Ez. de Decker. Practijck van de groote Zeevaert. Gouda 1631. 8°.
	16.		Ez. de Decker. Practijck van de groote Zeevaert. Rotterdam 1659. 4°.
N.	α.		*Ez. de Decker. Nieuwe Rabat-Tafels. Gouda 1630. 4°.
XII.	12.		*J. J. Dodt van Flensburg. Letterkundige Aanteekeningen. (Medemblik 1845). 8°.
XIV.	10.		*J. Errard. La fortification demonstree. Paris 1620. folio.
VII.	3.	5—8.	*S. van der Eycke. Quadrature du cercle. Delf 1584. 4°.
	5.	9.	S. van der Eycke. Claerder Bewijs. Delf 1586. 4°.
III.	28.		*W. Gardiner. Tables of Logarithms. London 1742. 4°.
	29.		*W. Gardiner. Tables de Logarithmes. Avignon 1770. 4°.
III.	6.	2.	H. Gellibrand. Trigonometria Brittannica. Gouda 1633. folio.
V.	15.		*Cl. Hz. Gietermaker. 't Vergulde Licht der Zeevaart. Amsterdam 1697. 4°.
I. 11; III.	27.		*J. W. L. Glaisher. Notice respecting some new Facts. (London 1872). 8°.

B.	A.	§	
III.	31.		**J. W. L. Glaisher.* On early logarithmic Tables. (London 1873). 8°.
III.	16.		**A. de Graaf.* Nieuwe konstige Tafelen. Amsterdam 1665. 8°.
XVI.	10.		**Is. de Graaf.* Waywels Proportie. Amsterdam 1714. 4°.
IX.	7.		*Chr. Grienbergius.* Elementa trigonometrica. Romae 1630. 8°.
I.	8.		*E. Gunter.* Canon Triangulorum. London 1623. 4°.
VI.	7.		**P. Halcken.* Deliciae Mathematicae. Hamburg 1719. 8°.
III.	3.		*Halliwell.* Letters on scientific subjects.
I.	3.	3.	*D. Henrion.* Mémoires Mathématiques. Paris 1623, 1627. 8°.
XVII.	1.	2—4.	*Dirck de Hollander.* Toetsteen van d'Algebra Spetiosa. Amsterdam 1669. 4°.
IX.	5.	6.	**Chr. Hugenius* De circuli magnitudine inventa. L. B 1654. 4°.
XI.	18.		**D. Klinkenberg.* Korte verhandel over Sinus enz. (Haarlem 1760). 8°.
	19.		**D. Klinkenberg.* Kort Berigt wegens comeetsterre. (Haarlem 1755). 8°.
	20.		**D. Klinkenberg.* Over de deelen van het Bastion. (Haarlem 1755). 8°.
	21.		**D. Klinkenberg.* Over de evenredigheid tusschen de middellijn. (Haarlem 1757). 8°.
	22.		**D. Klinkenberg* Verhandeling over de pegelkunde. (Haarlem 1757). 8°.
	23.		**D. Klinkenberg* Vraagstuk de zeevaartkunde betreffend. (Haarlem 1757). 8°.
	24.		**D. Klinkenberg* Over een meetkundig werkstuk. (Haarlem 1757). 8°
	25.		**D. Klinkenberg.* Afbeeldinge der eclipsen. (Haarlem 1757). 8°.
	26.		*D. Klinkenberg.* Beschrijving hoe de afstand der zonne. Haarlem 1743. 8°.

B. A.	§	
XI. 27.		******D. Klinkenberg*. Verhand. beneffens de Afbeeldingen. (Haarlem 1760). 8°.
28.		**D. Klinkenberg*. Verhand. en Aanmerkingen. (Haarlem 1762). 8°.
29.		**D. Klinkenberg*. Nabericht. (Haarlem 1762). 8°.
30.		*D. Klinkenberg*. Observations on the late Comet. (London 1758). 4°.
31.		*D. Klinkenberg*. Observations de la Comète. (Paris 1766). 4°.
32.		*D. Klinkenberg*. Over eene kleine, doch ongewoone Sterre. (Rotterdam 1783). 8°.
33.		*D. Klinkenberg* Nader Elucidatie. (Rotterdam 1774). 8°.
34.		*D. Klinkenberg*. Aanmerkingen over de Nader Elucidatie. (Rotterdam 1774). 8°.
VIII. 2.		*K. J. F. C. Kneppelhout van Sterkenburg*. De Gedenkteekenen. Leiden 1864. folio.
XVI. 11.		**Dirck Kruyck*. Wiskonstige Wederlegginge van de Quadratura Circuli. Amsterdam 1714 4°.
III. 25.		**Phil. Lansbergen*. Tabulae motuum coelestium. Middelburg 1632. folio.
IX. 2.	5.	**Phil. Lansbergen*. Cyclometriae Novae. Libri II. Middelburg 1616. 4°.
3.		**Phil. Lansbergen*. Opera omnia. Middelburg 1663. folio.
III. 32. V. 5.		*J. M. Ledeboer*. De boekdrukkers in Noord-Nederland. Deventer 1872. 4°.
XVII. 4.		**J. M. Ledeboer*. Alfabethische lijst der Boekdrukkers, Boekverkoopers en Uitgevers in Noord-Nederland. Utrecht 1876. 4°.
II. 15.		**J. Lulofs*. Brief aan M. Semeyns. Leyd. 1764. 8°.
17.		**J. Lulofs* Korte Aanmerkingen. Amsterdam 1764. 8°.
XVI. 1.		*J. Marcelis*. De quadratura van den Circkel. Amsterdam 1698. 4°
2.		*J. Marcelis* Ampliatie en Demonstratie wegens de Quadrature. Amsterdam 1699. 4°.

B.	A.	§	
XVI.	4.		*J. Marcelis.* De sleutel en openinge van de Quadrature. Amsterdam 1704. 4°.
	5.		*J. Marcelis.* De eerste en eenigste Uytvinding van de Circul-Quadratura. Amsterdam 1714. 4°.
	6.		*J. Marcelis.* Elucidatie wegens de Quadratura van den Cirkul. Amsterdam 1714. 4°.
VI.	12.		**A. F. Marci.* Vermaaklijk Rekenkunstig Spel. Amsterdam 1744. 4°.
	13.		**A. F. Marci.* De Toovervierkanten. Amsterdam 1791. 4°.
	14.		**A. F. Marci.* Uitvoerige Tafelen van de ondeelbaare of Prim-Getallen. Amsterdam 1772. 8°.
	15.		*A. F. Marci.* De verworpene Annihilatio ultimi termini. (Amsterdam 1762). 8°.
	16.		*A. F. Marci.* Methodus de maximis et minimis. (Amsterdam 1763). 8°.
N.	γ.		**A. F. Marci.* Gründliche Anzeige. 1731. 8°.
VI.	1.		**H. Meiszner.* Arithmetica Tyronica. Hamburg 1701. 8°.
	2.		**H. Meiszner.* Martin Wilckens Flores Algebraici. Hamburg 1684. 8°.
	3.		**H. Meiszner.* Arithm. Geometr. und Algebraische Kunstkette. Hamburg 1691. 8°.
	4.		**H. Meiszner.* Algebra Tyronica. Ed. 2ª. Hamburg 1724. 8°.
	5.		**H. Meiszner.* Geometria Tyronica. Hamburg 1696. 8°.
	6.		*H. Meiszner.* Des teutschen Euclidis. 1er & 2er Buch. Hamburg. folio.
N.	β.		**H. Meiszner.* Stern und Kern der Algebrae. 2ª Ed. Hamburg 1740. 8°.
XI. XII.	2; 31.		**A. Metius.* Fundamentale onderwysinghe aengaende het Astrolabium. Franeker 1627. 4°.
	1.		**A. Metius.* Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae. Franeker 1646. 8°.
	2.		**A. Metius.* Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae. Amsterdam 1634. 8°.

B.	A.	§	
XII.	3.		*A. Metius.* Arithmetica et Geometria Nova. Franeker 1625. 4⁰.
	4.		**A. Metius.* Arithmeticae Libr. II et Geometriae Libr. VI. L. B. 1640. 4⁰.
	5.		**A. Metius.* Arithmeticae et Geometriae practica. Franeker 1611. 4⁰.
	23.		**A. Metius.* De genuino uso utriusque globi. Franeker 1624. 4⁰.
	24.		**A. Metius.* Institutiones Astronomicae et Geographicae. Franeker 1614. 4⁰.
	25.		*A. Metius.* Institutiones Astronomicae et Geographicae. Franeker 1621. 4⁰.
	26.		**A. Metius.* Nieuwe Geographische onderwijsinghe. Franeker 1614. 4⁰.
	27.		*A. Metius.* Praxis nova geometrica per usum circini. Franeker 1623. 4⁰.
	28.		**A. Metius.* Maetconstigh Liniael. Fran. 1626. 4⁰.
	29.		**A. Metius.* Fortificatie ofte Sterckten Bouwinghe. Franeker 1626. 4⁰.
	30.		*A. Metius.* Eeuwighe Handt-Calendier. Amsterdam 1627. 8⁰.
	32.		**A. Metius.* Primum Mobile. Amstelodami 1631. 4⁰.
	33.		**A. Metius.* Astronomische en Geographische onderwijsinghe. Amsterdam 1632. 4⁰.
	34.		**A. Metius.* Mensura geographica. Franeker (1632). 4⁰.
III.	4.		*G. Miller.* Logarithmicall Arithmeticke. London 1631. folio.
III.	26.		*J. Miltoni.* Defensio Secunda. Hagae 1654. 12⁰.
I.	13; N. I.		**G. Moll.* Bijdragen tot de geschiedenis der wiskundige wetenschappen. (Delft 1826). 8⁰.
XII.	11.		**G. Moll.* Geschiedkundig onderzoek naar de eerste uitvinders der verrekijkers. (Amsterdam 1831). 4⁰.
I.	12.		**J. F. Montucla.* Histoire des Mathématiques. Paris 1799. 4⁰.

B. A. §	
IX. 6. 8. XII. 6.	*(*J. F. Montucla*). Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Paris 1754. 8°.
IX. 6. XII. 7.	*J. F. Montucla.* Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. 2e Ed. Paris 1831. 8°.
V. 4. XII. 21.	**F. Muller.* Essai d'une bibliographie Neerlando-Russe. Amsterdam 1859. 4°.
XVI. 3. 2.	*K. Najer.* Eenvoudig vertoog. Briev-wijs geschreven aan Jacob Marcelis. Amsterdam 1702. 4°.
I. 5.	*J. Neper.* Logarithmorum Canonis Descriptio. Lugduni 1700. 8°.
5.	*J. Neper.* Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio. Lugduni 1700. 8°.
5.	*J. Neper.* Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio. Edinburgi 1614. 8°.
6.	*J. Neper.* Rabdologiae Libri II. Edinburgi 1617. 12°.
X. 1. 2, 3.	**Corn. van Nienrode.* Volkomen proportie des circkels. Utrecht 1628. 8°.
2.	**Corn. van Nienrode.* De Vijfthien Boecken Euclides. Utrecht. 8°.
VI. 17.	**J. Oostwoud.* Mathematische Liefhebberij. Purmerend. 8°.
18.	**J. Oostwoud.* Mathematisch Zinnen-Confect. Purmerend 1767. 8°.
19.	**J. Oostwoud.* Bundel van Wiskundige Uytspanningen. Purmerend (1776). 8°.
20.	**J. Oostwoud.* Maandelijkse Mathematische Liefhebberije. Purmerend 1754—1769. 8°.
VIII. 24.	**L. Praalder.* Verzaameling van Voorstellen. Amsterdam 1777. 8°.
25.	**L. Praalder.* Ludolf van Keulen's Mathematische Voorstellen. Amsterdam 1790. 8°.
26.	**L. Praalder.* Gronden der Wiskonst. Rotterdam 1753. 4°.
27.	**L. Praalder.* Verhaal van 't gepasseerde en Examen. Rotterdam 1752. 4°.

B.	A.	§	
VIII.	4.		*W. J. C. Rammelman Elzevier.* Mededeeling. (Utrecht 1846) 8°.
VII.	7.		*Nic. Raymarus Ursus Dithmarsus.* Fondamentum astronomicum. Argentorati 1588. 4°.
VIII.	23.		**Johannes de Regio Monte.* De Triangulis omnimodis. Libr. V. Norimbergae 1533. 4°.
XI.	16.		*K. K. Reitz.* Nieuwe Handleiding om den Logarithmus te vinden. (Vlissingen 1786). 8°.
	17.		*K. K. Reitz* Aanhangsel tot de Nieuwe Handleiding. (Vlissingen 1790). 8°.
XI.	10.		**W. O. Reitz.* Nieuw gevonden berekening der kunstbreuken. (Haarlem 1754). 8°.
	11.		**W. O. Reitz.* De berekening van kunsttallen. (Haarlem 1755). 8°.
	12.		**W. O. Reitz.* Nieuwe bespiegeling der teerlingsche vergelijkingen. (Haarlem 1757). 8°.
	13.		**W. O. Reitz.* Nieuwe oplossing der vergelijkingen der 4e macht. (Haarlem 1767). 8°.
	14.		**W. O. Reitz.* Nieuwe bespiegeling der klootsche figuren. (Haarlem 1768). 8°.
	15.		*W. O. Reitz.* Grondig onderwijs der breuktallen. (Vlissingen 1769). 8°.
XI.	1.		**D. Rembrantsz van Nierop.* Logarithmus Tafelen. Harlingen 1671. 8°.
	4.		**D. Rembrantsz van Nierop.* Mathematische Calculatie. Amsterdam 1659. 8°.
VIII. XIV. XV.	22. 9; 3, 4.	14;	*A. Romanus.* In Archimedis Circuli Dimensionem. Wurceburgi 1597. folio.
	2.		*A. Romanus.* Ideae Mathematicae. Antverpiae 1593. 4°.
	4.		*A. Romanus.* Ventorum secundum recentiores usus. Wurceburgi 1596. folio.
	5.	5.	*A. Romanus.* Chordarum arcubus circuli primariis. Wurceburgi 1620. in plano.
	6.		*A. Romanus.* Mathesis polemica. Francofurti 1605. 8°.

B.	A.	§	
XV.	7.		*A. Romanus.* Speculum Astronomicum. Lovanii 1606. 4°.
XV.	8.		*E. Romanus.* De formatione humani corporis. 1522. 8°.
XIV.	1.		**J. Scaliger J. C. fil.* M. Manilii Astronomicωn. Lutetiae 1579. 8°.
	2.		**J. Scaliger J. C. fil.* Opus de Emendatione Temporum. Coloniae 1629. folio.
	3.		**J. Scaliger J. C. fil.* De re nummaria. L. B. 1616. 8°.
	5.		**J. Scaliger J. C. fil.* Epistolae. L. B. 1627. 8°.
	6.	3—6.	**J. Scaliger J. C. fil.* Cyclometrica Elementa duo. L. B. 1594. folio.
	7.	6.	*J. Scaliger J. C. fil.* Appendix ad Cyclometrica sua. L. B. 1594. folio.
	8.		**J. Scaliger J. C. fil.* Mesolabum. L. B. 1594. folio.
	12.		*J. Scaliger J. C. fil.* Hippolyti Episcopi Canon Paschalis. L. B. 1595. 4°.
XIII.	1.		**Fr. van Schooten* (*Sen.*). Tabulae sinuum, tangentium, secantium. Amsterdam 1627. 8°.
	2.		**Fr.van Schooten* (*Sen.*). Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Rotterdam 1632. 12°.
	3.		**Fr.van Schooten* (*Sen.*). Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Brussel 1683. 12°.
	4.		**Fr. van Schooten* (*Sen.*). Tables de Sinus, Tangentes et Secantes. Bruxelles 1683. 12°.
	5.		**Fr. van Schooten* (*Sen.*). Tables des Sinus, des Tangentes et Secantes. Rouen 1672. 12°.
	6.		**Fr.van Schooten* (*Sen.*).De 15 Boecken der Elementen van Euclidis. Amsterdam 1662. 12°.
		2.	*Fr. van Schooten* (*Sen.*). Roozenkrans. Dordrecht 1623. 4°.
XIII.	8.		**Fr. van Schooten* (*Jun.*). Geometria a Renato des Cartes. L. B. 1649. 4°.
	9.	3.	**Fr. van Schooten* (*Jun.*). Geometria a Renato des Cartes. L. B. 1659. 4°.

B.	A.	§	
XIII.	10.		*Fr. van Schooten (Jun.).* Principia Matheseos Universalis. L. B. 1651. 4°.
	11.		**Fr. van Schooten (Jun.).* Exercitationum Mathematicorum. Libr. V. L. B. 1656, 1657. 4°.
	12.		**Fr. van Schooten (Jun.).* Mathematische Oeffeningen. V Boucken. Amsterdam 1659. 4°.
	13.		**Fr. van Schooten (Jun.).* Mathematische Oeffeningen. V Boucken. Amsterdam 1660. 4°.
	14.		**Fr. van Schooten (Jun.).* De organica conicarum sectionum descriptione. L. B. 1646. 4°.
XI.	8.		**J. C. Schulze.* Sammlung unentbehrlicher Tafeln. Berlin 1778. 8°.
II.	6.		**M. Semeyns.* Naauwkeurige Waarneming. Haarlem 1748. 8°.
	7.		**M. Semeyns.* Berigt wegens Land- en Zeewinden. (Haarlem 1755). 8°.
	8.		**M. Semeyns.* Waarneeming over de waare Dampheffingen. (Haarlem 1755). 8°.
	9.		**M. Semeyns.* Verh. over de natuurlijke oorzaak der Passaat-winden. (Haarlem 1757). 8°.
	10.		**M. Semeyns.* Kortbondige redeneering over de gesteltheid van den aardkloot van binnen. 's Gravenhage 1760. 8°.
	11.		*M. Semeyns.* Kürze aus der Würkung des Magnets hergeleitete Abhandlung. Nurnberg 1764. 4°.
	12.		**M. Semeyns.* Kortbondige Demonstratie of Nader Betoog. 's Gravenhage 1762. 8°.
	14.		**M. Semeyns.* Merkwaardige verzameling van echte stukken en brieven. 's Gravenhage 1764. 8°.
	16.		**M. Semeyns.* Brief aan Johan Lulofs Hoogleeraar. Enkhuysen 1764. 8°.
	18.		*M. Semeyns.* Voorberigt of Voorreden. Enckhuysen 1765. 8°.
	19.		**M. Semeyns.* Het nieuw ontdekte Magneetische Systema. Enkhuizen 1767. 8°.

B.	A.	§	
II.	20.		**M. Semeyns.* De voornaamste Verschilpunten. Enkhuysen 1773. 8°.
V.	9.		**D. J. Slikker.* Klaar Bewijs over het Onmogelijk der Oost- en Westvinding. Amsterdam 1703. 4°.
I.	1.		*W. Snellius.* Canon Triangulorum. L. B. 1626. 8°.
	2.		*W. Snellius.* Doctrina triangulorum. L. B. 1626. 8°.
VIII.	21.		**W. Snellius.* Cyclometricus. L. B. 1621. 4°.
IX.	1.	2, 3.	
XIV.	4.		**W. Snellius.* De re nummaria. L. B. 1613. 8°.
II.	4.		**M. Soeten.* Algemeene Manier tot het maaken van Zonnewijzers. Amsterdam 1710. 8°.
	6.		**M. Soeten.* Medulla Algebrae. Amsterdam 1702. 8°.
XVI.	9.		**M. Soeten.* Aanmerkingen op Daniel Waeywels Demonstratie. Amsterdam 1714. 4°.
I.	17.		**J. J. Stampioen.* Solutie op alle de Questien van Ezechiel de Decker. Rotterdam 1634. 4°.
XIII.	2.		**J. J. Stampioen.* Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Rotterdam 1632. 8°.
	2.		**J. J. Stampioen.* Kort Bij-voeghsel der sphaerischer Triangulen. Rotterdam 1632. 8°
	15.		*J. J. Stampioen.* Problema Astronomicum et Geometricum. in plano.
VIII.	2.		**S. Stevin.* Instructie van de Ingenieurs-school te Leijden.
I.	4;		**S. Stevin.* De Thiende. Gouda 1626. 4°.
N.	*α*.		
XII.	9.		**J. H. van Swinden.* Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterdam 1790. 8°.
	10.		**J. H. van Swinden.* Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterdam 1816. 8°.
III.	30;		**G. Vega.* Thesaurus Logarithmorum completus. Lipsiae 1794. folio.
XI.	9.		
XIV.	20.		*Fr. Vieta.* Opera Mathematica. L. B. 1646. folio.
III.	1.		*Adr. Vlack.* Arithmetica Logarithmica. Gouda 1628. folio.

B.	A.	§	
III.	2.		*_Adr. Vlack._ Arithmetique Logarithmetique. Gouda 1628. folio.
	5.		_Adr. Vlack._ Magnus Canon Logarithmorum. Pekin 1731. folio.
	7.	3.	_Adr. Vlack._ Trigonometria Artificialis Goudae 1633. folio.
	8.		*_Adr. Vlack._ Tafels van Sinus, Tangentes, Secantes. 'sGravenhage 1661. 8°.
	9.		*_Adr. Vlack._ Tabulae Sinuum, Tangentium, Secantium. Hagae 1665. 8°.
	10.		*_Adr. Vlack._ Table de Sinus, Tangentes, Secantes. La Haye 1666. 8°.
	11.		*_Adr. Vlack._ Tables des Sinus, Tangentes, Secantes. Amstelredam 1665. 8°.
	12.		*_Adr. Vlack._ Tabellen der Sinuum, Tangentium und Secantium. Amsterdam 1673. 8°.
	13.		*_Adr. Vlack._ Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Amstelaedami 1681. 8°.
	14.		*_Adr. Vlack._ Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Amstelaedami 1742. 8°.
	15.		*_Adr. Vlack._ Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Amstelaedami 1784. 8°.
	17.		*_Adr. Vlack._ Tabellen der Sinuum, Tangentium und Secantium. Franckfurth 1738. 8°.
	18.		*_Adr. Vlack._ Tabellen der Sinuum, Tangentium und Secantium. Franckfurt 1748. 8°.
	19.		*_Adr. Vlack._ Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Francofurti 1757. 8°.
	20.		*_Adr. Vlack._ Tabellen der Sinuum, Tangentium, Secantium. Frankfurt 1763. 8°.
	21.		*_Adr. Vlack._ Tabellen der Sinus, Tangenten und Secanten. Frankfort 1790. 8°.
	22.		*_Adr. Vlack._ Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium. Lipsiae 1808. 8°.
	23.		*_Adr. Vlack._ Tabulae trigonometricae ac Logarithmicae. Lipsiae 1821. 8°.
	24.		_Adr. Vlack._ Ephemerides motuum coelestium. Goudae 1632. 4°.

B.	A.	§	
III.	6—11;		*Adr. Vlack.* Typographus pro si ipso.
N. B. III.			
N. B. III.			*Adr. Vlack.* Tafels van Sinus, Tangentes, Secantes. Amsterdam 1695. 8°.
V.	1.	2.	**C. J. Vooght.* De Taafelen Sinuum, Tangentium en Secantium. Amsterdam 1685. 8°.
	2.	3.	**C. J. Vooght.* De Taeffelen der Sinuum, Tangentium en Secantium. Amsterdam 1698. 4°.
	3;		**C. J. Vooght.* De Taeffelen der Sinuum, Tangentium en Secantium. Amsterdam 1707. 4°.
N. B. V.			
V.	6.	4.	**C. J. Vooght.* Quadrans Astronomicus et Geometricus. Amsterdam 1681. 4°.
	7.		**C. J. Vooght.* Quadrans Astronomicus et Geometricus. Amsterdam 1714. 4°.
	8.		**C. J. Vooght.* De nieuwe groote Lichtende Zee-Fakkel. Amsterdam 1682. folio.
	10.		**C. J. Vooght.* De nieuwe groote lichtende Zee-Fakkel. Amsterdam 1788. folio.
	11.		**C. J. Vooght.* Euclidis Beginselen der Meetkonst. Amsterdam 1695. 4°.
	12.		**C. J. Vooght.* Nieuw Amsterdammer Graad-Boek. Amsterdam 1696. 8°.
	12.		**C. J. Vooght.* Almanack van de Nieuwe stijl. Amsterdam 1676. 8°.
	13.		**C. J. Vooght.* Nieuw verbeterd Graad-Boek. Amsterdam 1776. 8°.
	13.		**C. J. Vooght.* Een kort Begrip van alle Langs- en Dwars-Courssen. Amsterdam 1776. 8°.
	13.		*(*C. J. Vooght.*) Stelkonstige Reeckening van Regenboog. 's Gravenhage 1687. 4°.
		9.	**C. J. Vooght.* Lijst van werken tot 1797; volgens Johannes van Keulen.
VIII.	9.		* *G. A. Vorsterman van Oyen.* Notice van Ludolphe van Colen. (Rome 1868). 4°.
XVI.	7.		**D. Waeywel.* Demonstratie wegens de Quadrature circuli. Amsterdam 1712. 4°.
	8.		**D. Waeywel.* La demonstration sur la Quadrature du cercle. Amsterdam. 4°.

B.	A.	§	
XVI.	12.	6.	**D. Waeywel.* Tweede Demonstratie wegens de Quadratura circuli. Amsterdam 1714. 4°.
	14.		(*D. Waeywel*). Traité ou considérations mathematiques et impartiales. La Haye 1717.
XII.	17.		*Lucas Jansz. Waghenaer.* Spieghel der Zeevaerdt. Leyden 1584. folio.
	18.		*Lucas Jansz. Waghenaer.* Het tweede Deel van den Spieghel der Zeevaert. Leyden 1585. folio.
	19.		*Lucas Jansz. Waghenaer.* Pars Prima Speculum Nauticum. Leyden 1583. folio.
	20.		*Lucas Jansz. Waghenaer.* Pars Prima Speculum Nauticum. L. B. 1586. folio.
	22.		*Lucas Jansz. Waghenaer.* Desz Spiegels der Seefart von Navigation. Ambsterdam 1589. folio.
XI.	3.		**P. Wils.* Wiskonstige Wercken. Amsterdam 1654. 4°.
XI.	7.		**J. Wolfram.* Proeve van eene tafel ter ontledinge der getallen. (Haarlem 1755). 8°.
		3.	**J. Wolfram.* Die tafel der natürlichen Logarithmen. (Berlin 1778). 8°.
III.	33.		Calender of State Papers. 1837.
VIII.	14.		Corte onderrichtinge van de Jaer-Custinghe. Leyden 1599. 8°.
	1.		Les Délices de Leide. Leide 1712. 8°.
VI.	11.		Der Hamburgischen Kunst-Rechnungs Lieb- und übenden Societaet Kunst-Frücht. Hamburg 1723. 4°.
II.	13.		Nederlandsche Letter-Courant. Leiden 1760. 8°.
III.	26;		Regii Sanguinis Clamor. Hagae 1652. 12°.
N. B. III.			
N. B. III.			Regii Sanguinis Clamor. 2ª Ed. Hagae. 1654.

VERBETERINGEN.

B. I.	blz. 4,	regel 3	v.b.	*Doh- || hé ...iohr*	lees: *Don- || nè....iour*
		〃 4		*reghe*	〃 *regne*
		〃 5		*plhs*	〃 *plus*
	〃 7,	〃 1	v.o.	de eerste	〃 de eerste uitgaven
	〃 9,	〃 1	v.b.	*Lhyden*	〃 *Luyden*
	〃 18,	〃 23	v.b.	Steven	〃 Stevin.
	〃 20,	〃 23	v.b.	*Bibliopoae*	〃 *Bibliopolae.*
	〃 23,	〃 7	v.b.	CLAISHER	〃 GLAISHER
B. II.	〃 38,	〃 2	v.o.	D ||	〃 || D
	〃 41,	〃 8	v.o.	oordeelkundi-	〃 oordeelkundi- ||
	〃 42,	〃 12	v.b.	leera	〃 leeraar
B. III.	〃 2,	〃 1	v.o.	het	〃 zijn
	〃 6,	〃 5	v.o.	*quaecumqus*	〃 *quaecumque*
	〃 7,	〃 1	v.b.	BIGGH	〃 BRIGGII
		〃 5	v.b.	*perdusebam*	〃 *perducebam*
		〃 10	v.b.	*acque*	〃 *aeque*
		〃 11	v.b.	*exepturos*	〃 *excepturos*
		〃 11	v.o.	*Vivorum*	〃 *Virorum*
	〃 8,	〃 19	v.o.	*Nan*	〃 *Van*
		〃 12	v.o.	Tanges	〃 Tangēs
		〃 11	v.o.	〃 Grad	〃 *n* Grad.
	〃 9,	〃 6,4	v.o.	AB S	〃 AB 1
	〃 10,	〃 3	v.o.	Prostapherensivm	〃 Prostaphaerensium
	〃 11,	〃 13	v.b.	ut.	〃 ut
	〃 13,	〃 2	v.b.	*coclum*	〃 *coelum*
		〃 8	v.b.	Regia	〃 Regiae
		〃 9	v.o.	inexpetatum	〃 inexspectatum
	〃 14,	〃 16	v.o.	*eognoscere*	〃 *cognoscere*
		〃 14	v.o.	*atqne*	〃 *atque*
	〃 15,	〃 6	v.b.	requianted	〃 acquainted
		〃 12	v.b.	BRIGGH	〃 BRIGGII
		〃 17	v.o.	*Trigonometria*	〃 *Trigonometriā*
		〃 11	v.o.	trubis	〃 tribus
	〃 16,	〃 6	v.b.	istaq.	〃 istaq;
		〃 16	v.o.	nons	〃 nous
	〃 17,	〃 11	v.b.	*palman*	〃 *palmam*
		〃 8	v.o.	die	〃 de
	〃 19,	〃 18	v.o.	saused	〃 caused
	〃 20,	〃 4	v.b.	mandacia	〃 mendacia

	blz.	regel	staat	lees
B. III.	blz. 20,	regel 8, 13 v.b.	*Annotationis*	lees: *Annotationes*
		〃 19 v.o.	conviscarentur	〃 confiscarentur
		〃 1 v.o.	anglia	〃 Anglia
	〃 30,	〃 6 v.o.	ARBAR	〃 ARBOR
	〃 32,	〃 14 v.b.	EMFNDATA	〃 EMENDATA
		〃 17 v.o.	vermittelet	〃 vermittelst
	〃 36,	〃 2 v.b.	naar	〃 near
	〃 37,	〃 8 v.b.	Papeers	〃 Papers
B. IV.	〃 39,	〃 19 v.o.	1707	〃 1703
		〃 17 v.o.	1680	〃 1660
	〃 50,	〃 19 v.o.	Book	〃 Boek
	〃 53,	〃 6 v.o.	TAEEL	〃 TAFEL
	〃 57,	〃 1 v.b.	en d	〃 en de
	〃 58,	〃 4 v.b.	*ijne*	〃 *sijne*
B. VI.	〃 79,	〃 9	*lees* $= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6+\dots\right\}$	
		〃 6 v.o.	$=\frac{6}{169}$	*lees:* $=\frac{9}{169}$
		〃 3 v.o.	$=\frac{1}{3}$	〃 $=1\frac{1}{9}=$
		〃 2 v.o.	$=\frac{1}{28921}$	〃 $=\frac{1}{25921}$
	〃 80,	〃 13 v.o.	*Nans*	〃 *Nam*
	〃 83,	〃 17 v.b.	Destehend	〃 Bestehend
	〃 87,	〃 8 v.b.	Unspruug	〃 Ursprung
	〃 94,	〃 5 v.o.	18*)	〃 12*)
B. VI. A.1,2,3,4,			bijvoegen *)	
B. VII.	blz. 109,	〃 15 v.o.	*Cicruit*	〃 *Circuit*
	〃 120,	〃 1 v.b.	woerachtig	〃 waerachtig
B. VIII.	〃 132,	〃 2 v.o.	sittend =	〃 sittende
		〃 1 v.o.	d'are	〃 d'ar =
	〃 151,	〃 13 v.b.	diligentinimus	〃 diligentissimus
	〃 152,	〃 1 v.b.	ang	〃 lang
B.VIII. A.2,	blz. 157,	reg. 12 v.o.	blz.	〃 blz. 69
A.12,	〃 160,	〃 18 v.o.	irckels	〃 Circkels
17,	〃 166,	〃 8 v.b.	SUPEPINTEN-	〃 SUPERINTEN-
B. IX.	blz. 177,	regel 2 v.o.	arcus	〃 arcu-
	〃 181,	〃 13 v.o.	in	〃 en
		〃 10 v.o.	een	〃 en
	〃 183,	〃 13 v.o.	appromixation	〃 approximation
A. 1,	blz. 186,	reg. 11 v.b.	opdracht van	〃 opdracht aan
B. XI. A. 2,	〃 208,	〃 7 v.o.	astrolobium	〃 astrolabium
4,	〃 210,	〃 12 v.o.	Goedesbergen	〃 Goedesbergen
B. XII,	〃 231,	〃 4 v.b.	liefhedbers	〃 liefhebbers
A.18,	〃 244,	〃 1 v.o.	*Caneellariae*	〃 *Cancellariae*
A.29.	〃 249		bij te voegen in〃4o."	
A.30,	〃 219,	〃 9 v.o.	in	〃 in 8o.
B. XIII. A.11,	〃 276,	〃 5 v.o.	FRANCINI	〃 FRANCISCI
	〃 277,	〃 1 v.b.	HUGE II	〃 HUGENII
A. 14,	〃 278,	〃 16 v.o.	cxcvi	〃 cxlvi
B. XIV.	〃 287,	〃 16 v.o.	cum, sum	〃 sum, cum
	〃 290,	〃 2 v.o.	worden	〃 werden

B. XIV. blz. 291,	regel 12 v.o.	*appendiicbus*	*lees:*	*appendicibus*
A. 9. " 307,	" 16 v.o.	Josephem	"	Josephum
A.10. " 307		bijvoegen *)		
B.XV.A.4, " 324		MDXXVI	"	MDXCVI

NB. Een groot deel dezer drukfouten vindt men alleen in de afzonderlijke afdrukken, niet in de *Verslagen en Mededeelingen* zelve.

INHOUD

VAN

DEEL XII. — STUK 1.

---

bladz.

GEDRUKT BIJ DE BOEVER - KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Twaalfde Deel. — Tweede Stuk.

AMSTERDAM
C. G. VAN DER POST.
1878.

OVER
KIJKERS MET VERANDERLIJKE VERGROOTING.

DOOR

J. BOSSCHA.

Onder den naam van pancratischen kijker heeft de heer DONDERS een toestel beschreven, bestaande uit drie lenzen, waarvan de middelste ten opzichte der beide uiterste kan heen en weder bewogen worden. Door deze verplaatsing wordt de schijnbare grootte, waaronder de toestel een verwijderd voorwerp vertoont, binnen zekere grenzen gewijzigd. Doch dit middel heeft het nadeel, dat het oog des waarnemers zich bij verschillende standen van de middellens voor een anderen afstand moet accommodeeren en al spoedig niet meer in staat is, de verplaatsing van het beeld te volgen. Indien bijv. de toestel bij zekeren stand der middellens een werkelijke kijker is, die evenwijdig invallende stralen evenwijdig doet uittreden, zal hij ophouden in dien zin een kijker te zijn, zoodra de beweegbare lens verplaatst wordt.

Ten einde de stoornis, die hierdoor in het scherp zien ontstaat, niet al te hinderlijk te maken, is men genoodzaakt de verplaatsing der middellens binnen nauwe grenzen te beperken; maar de veranderingen der vergrooting, die met deze verplaatsing evenredig zijn, kunnen dan mede niet ver rijken.

Het onderzoek naar de wijze waarop drie lenzen zich ten opzichte van elkander moeten bewegen, opdat de brandpuntsafstand van het stelsel, in een der standen oneindig groot

zijnde, dit in alle andere blijve, geeft een eenvoudig middel aan de hand om dit bezwaar op te heffen.

Zijn namelijk drie lenzen, welker brandpuntsafstanden naar rangorde door φ_1, φ_2 en φ_3 worden aangeduid, gecentreerd opgesteld en is de afstand der beide eerste d_1, die der beide laatste d_2, dan is de hoofdbrandpuntsafstand f van het stelsel bepaald door de betrekking:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_2}-d_1\left(\frac{1}{\varphi_1\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_1\varphi_3}\right)-d_2\left(\frac{1}{\varphi_1\varphi_3}+\frac{1}{\varphi_2\varphi_3}\right)+\frac{d_1\,d_2}{\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3}$$

welke ook kan geschreven worden als volgt:

$$[d_1-(\varphi_1+\varphi_2)]\,[d_2-(\varphi_2+\varphi_3]=\varphi_2\left(\varphi_2-\frac{\varphi_1\varphi_3}{f}\right) \quad . \; . \; . \; (1)$$

Is de toestel een kijker dan is $f = \infty$ en mitsdien

$$[d_1-(\varphi_1+\varphi_2)]\,[d_2-(\varphi_2+\varphi_3)]=\varphi_2^2$$

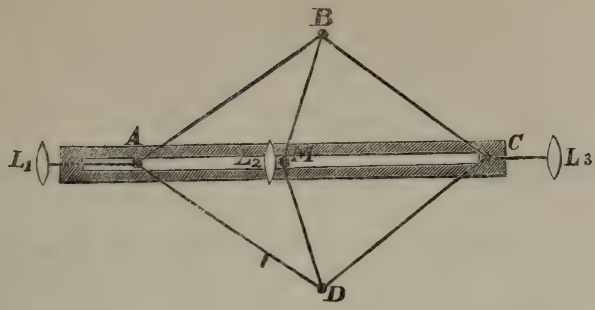
of

$$D_1\,D_2=\varphi_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

wanneer D_1 den afstand beteekent van het achterste brandpunt der eerste lens tot het voorste brandpunt der tweede, en D_2 den afstand van het achterste brandpunt der tweede lens tot het voorste brandpunt der derde.

Deze betrekking wijst aan dat door enkele verplaatsing der middelste lens, waarbij D_1 en D_2 met gelijke waarden doch in tegengestelden zin veranderen, de voorwaarde niet kan vervuld worden, dat de toestel een werkelijke kijker blijve.

Men verkrijgt evenwel een toestel, waarin de drie glazen automatisch hunne afstanden naar eisch veranderen wanneer men de lenzen verbindt met de gelede ruit van PEAUCELLIER, een samenstel van zes door scharnieren verbonden stangen waarvan er vier, AB, BC, CD en DA eene ruit vormen en de twee overige BM en DM de beide overstaande hoekpunten B en D verbinden.



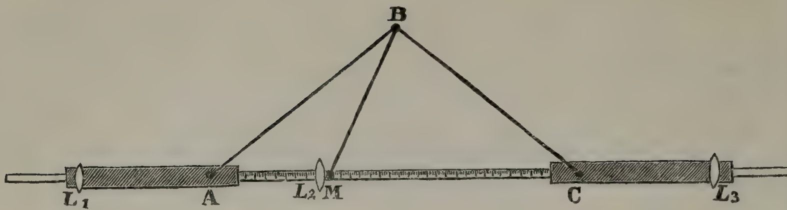
Wordt het scharnier M in de richting naar A of naar C bewogen, dan verandert de ruit van gedaante, in dier voege dat steeds de betrekking geldt

$$AM \, . \, MC = AB^2 - BM^2$$

welke met (2) overeenstemt zoo $AM = d_1 - (\varphi_1 + \varphi_2) = D_1$, $MC = d_2 - (\varphi_2 + \varphi_3) = D_2$ gemaakt worden. Plaatst men de middelste lens boven M, de eerste lens op een afstand $AL_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ buitenwaarts van A, de laatste lens op een afstand $CL_2 = \varphi_2 + \varphi_3$ buitenwaarts van C, is verder de ruit van zoodanige afmetingen, dat wanneer BM en MD in elkanders verlengde vallen, $AM = MC = \varphi_2$ is, dan zal in elken vorm der ruit aan de betrekking (2) voldaan zijn en de toestel evenwijdig invallende stralen evenwijdig doen uittreden.

Dezelfde ruit kan dienen voor verschillende stelsels van drie lenzen, waarin de middelste lens dezelfde is. Om haar ook voor verschillende middellenzen in te richten heeft men slechts de armen BM en DM te verkorten of te verlengen, of ook de zijden der ruit de omgekeerde verandering te laten ondergaan.

Bij de heen en wedergaande beweging van M kan men òf het punt A òf het punt C vast doen blijven. In het eerste geval blijft het objectief, in het tweede blijft het oculair op zijne plaats. Is geen van beide vereischt, zoo kan men het punt M vast laten blijven en dan in plaats van eene gelede ruit eene krukbeweging aanwenden, zooals in fig. 2 is voorgesteld, waar de armen AB en BC, in B met de kruk BM verbonden, in hunne andere uiteinden A en C door schuifstukken gedwongen worden zich met de lenzen L_1 en L_2 over de lijn $L_1 M L_2$ te bewegen.



Men kan evengoed het optisch stelsel aan de voorwaarde laten voldoen, dat de brandpuntsafstand, hoewel niet oneindig groot, desniettemin standvastig bijv. $= a$ blijve. In dit geval moet

$$D_1 D_2 = \varphi_2\left(\varphi_2 - \frac{\varphi_1 \varphi_3}{a}\right)$$

zijn. Hiertoe is in de ruit

$$AB^2 - BM^2 = \varphi_2\left(\varphi_2 - \frac{\varphi_1 \varphi_3}{a}\right)$$

te maken.

De onderstelling dat de toestel een eigenlijke kijker met oneindig grooten brandpuntsafstand zij, brengt mede dat hij alleen dienen kan, wanneer een oneindig ver verwijderd voorwerp beschouwd wordt door een normaal oog zonder inspanning van accommodatie. Men kan het vraagstuk algemeener opvatten en bepalen hoe de buitenste lenzen zich ten opzichte der middelste moeten verplaatsen opdat een voorwerp, op gegeven afstand voor het eerste glas geplaatst, scherp gezien worde door een oog met bepaalden gezichtsafstand achter het derde; met andere woorden, opdat het beeld steeds op denzelfden afstand van het derde glas gevormd worde.

Noemen wij a den afstand van het voorwerp tot het eerste glas, b den afstand van het beeld tot het laatste, beide afstanden positief gerekend wanneer zij zich buitenwaarts van de uiterste glazen bevinden, is wijders f_1 de afstand van het eerste brandpunt tot het eerste glas, f_2 de afstand van het tweede brandpunt tot het laatste en eindelijk f de hoofdbrandpuntsafstand van het stelsel, dat is de afstand der brandpunten tot de overeenkomstige knooppunten, dan moet, gelijk bekend is,

$$(a - f_1)(b - f_2) = f^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

zijn. In een stelsel van drie lenzen is verder

$$f_1 = \varphi_1 \frac{D_2(D_1 + \varphi_1) - \varphi_2^2}{D_1 D_2 - \varphi_2^2}$$

$$f_2 = \varphi_3 \frac{D_1(D_2 + \varphi_3) - \varphi_2^2}{D_1 D_2 - \varphi_2^2}$$

$$f = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{D_1 D_2 - \varphi_2^2}$$

waardoor, na eenige herleiding, de betrekking (3), ook aldus kan geschreven worden :

$$(D_1 D_2 - \varphi_2^2)\left\{(D_1 - C_1)(D_2 - C_2) - \varphi_2^2\right\} = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

wanneer ter bekorting gesteld wordt:

$$C_1 = \frac{\varphi_1^2}{a - \varphi_1}\,;\ C_2 = \frac{\varphi_3^2}{b - \varphi_3}.$$

De verplaatsing der lenzen geschiedt dus naar eisch wanneer òf

$$D_1 D_2 = \varphi_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

òf

$$(D_1 - C_1)(D_2 - C_2) = \varphi_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

De eerste voorwaarde (5) is in dit geval blijkbaar niet van toepassing. De tweede doet zien dat ook hier de ruit van PEAUCELLIER of de krukbeweging aan de glazen automatisch de vereischte verplaatsing zullen geven. De buitenste lenzen moeten thans op de afstanden

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{a - \varphi_1}$$

en

$$\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{\varphi_3^2}{b - \varphi_3}$$

buitenwaarts van de uiterste hoekpunten der ruit verwijderd zijn.

Ook zonder de waarde van den afstand a en de gezichtswijdte b te kennen, kan men de juiste plaatsing der buitenste lensen door een kunstgreep gemakkelijk treffen.

Wij merken daartoe op, dat wanneer het voorwerp oneindig ver verwijderd is, de betrekking (6) wordt

$$D_1 (D_2 - C_2) = \varphi_2^2 \quad \dots\dots\dots\dots (7)$$

gelijk zij voor een oog dat op oneindigen afstand scherp ziet, wanneer het voorwerp op een afstand a van het objectief verwijderd is, worden zou

$$(D_1 - C_1) D_2 = \varphi_2^2 \quad \dots\dots\dots\dots (8)$$

Heeft men nu eenmaal de zijden en de dwarsarmen der ruit op de juiste afmetingen gebracht, zoodat $A M^2 - B M^2 = \varphi_2^2$ is, en is de voorste lens op een afstand $\varphi_1 + \varphi_2$ buitenwaarts van A geplaatst, dan zal men door het verschuiven der derde lens den stand kunnen opzoeken voor welken een zeer verwijderd voorwerp door het waarnemend oog scherp gezien wordt. Daar als nu, blijkens (7),

$$D_1 (D_2 - C_2) = \varphi_2^2$$

is, zoo bevindt de achterste lens zich ook in den vereischten stand om nabijgelegene voorwerpen scherp te zien.

Alleen de voorste lens moet hiertoe nog over een afstand C_1 verplaatst worden om aan de vergelijking (6)

$$(D_1 - C_1)(D_2 - C_2) = \varphi_2^2$$

te voldoen. Dit kan nu op dezelfde wijs geschieden als met de achterste lens.

Onder de vergrooting van kijkers verstaat men de verhouding tusschen de hoeken waaronder het voorwerp en het beeld worden gezien, het eerste beschouwd uit het middelpunt van het objectief, het tweede beschouwd uit het middelpunt van den zoogenaamden oogring.

Deze verhouding heeft in een stelsel van drie lenzen tot uitdrukking

$$V = \frac{D_2 (D_1 + \varphi_1) - \varphi_2^2}{\varphi_2 \varphi_3}$$

Is de toestel een ware, astronomische kijker en dus $D_1 D_2 - \varphi_2^2 = 0$ dan is

$$V = \frac{D_2 \varphi_1}{\varphi_2 \varphi_3}.$$

De vergrooting is mitsdien evenredig met den afstand der draaipunten M en C in de ruit. Kent men haar bedrag bij zekere waarde van D_2 dan is het voldoende bij eenigen stand der ruit D_2 te meten, om de vergrooting van den kijker in dit geval te kennen. Eene in gelijke deelen verdeelde schaal tusschen M en C kan in staat stellen de vergrooting rechtstreeks af te lezen.

Verstaat men onder de vergrooting van het optische stelsel de verhouding van de ware grootten van beeld en voorwerp dat bestaat er eveneens eene eenvoudige betrekking tusschen de vergrooting en den afstand MC.

Die verhouding V_1 is namelijk

$$V_1 = -\frac{b - f_2}{f} = -\frac{f}{a - f_1}$$

of, zoo wij hierin voor f, f_1 en f_2 hare waarden stellen

$$V_1 = -\frac{\varphi_3}{\varphi_1 \varphi_2} \frac{C_1}{C_2} (D_2 - C_2).$$

De verhouding V_1 kan dus hier daadwerkelijk op dezelfde eenvoudige wijze bij verschillende standen der ruit worden bepaald, als in het geval van den waren kijker de verhouding V der hoeken, waaronder beeld en voorwerp gezien worden.

In het *Mémorial de l'officier du Génie* n⁰. 18 (1868) bl. 350 en volgende, heeft PEAUCELLIER zelf eene toepassing beschreven van zijne ruit op kijkers met veranderlijke vergrooting. Zijn doel was een afstandsmeter te vervaardigen, die veroorlooft den te meten afstand rechtstreeks aan het werktuig af te lezen. Hiertoe diende een kijker welks objectief uit twee glazen bestond, waarvan het tweede kon achteruit geschoven worden. Alsdan kon bewerkt worden dat eene horizontale lijn van standvastige lengte, geplaatst op het punt van het terrein, welks af-

stand men meten wil, in den kijker gezien, begrensd wordt door twee vertikale draden in het brandvlak van het oculair gespannen. Uit de verplaatsing van de tweede objectieflens kon nu de te meten afstand rechtstreeks worden afgeleid, indien de beide lenzen werden verbonden met de gelede ruit, in dier voege, dat de tweede lens in het punt M was geplaatst. Door de verschuiving van het punt C over eene verdeelde schaal werd dan die afstand aangeduid. PEAUCELLIER voegt hierbij het volgende:

„Pendant la course du verre mobile qui peut atteindre jusqu'à 2 centimètres, la vision de l'image se trouble et nécessite par intervalles le rétablissement de la mise au point. Cette circonstance ne laisserait pas de prolonger la durée de l'observation, si on ne l'avait éludée en rendant l'appareil automoteur, c'est-à-dire en le dotant d'un organe particulier, maintenant sans interruption la coincidence du plan du réticule avec le plan focal variable de la lunette. Cet organe consiste dans un système articulé fort simple, dont les diverses parties sont déterminées de manière à satisfaire à la condition précitée. Il en résulte que malgré le déplacement de la lentille mobile, la vision conserve sa netteté et que l'observation se fait aussi rapidement que si l'image était fixe."

PEAUCELLIER heeft dus met behulp van zijne ruit en een tweeden niet nader beschreven toestel een dergelijk vraagstuk, als in dit opstel werd behandeld, op eene naar het schijnt iets meer samengestelde wijze reeds weten op te lossen.

OVER DE

SPECIFIEKE WARMTE VAN DEN VERZADIGDEN DAMP.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.

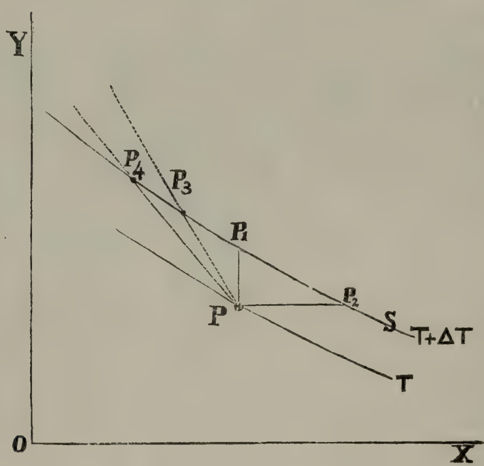
---

§. 1. Als een der belangrijkste resultaten, waartoe de mechanische theorie der warmte in hare toepassing op stoomwerktuigen gevoerd heeft, wordt beschouwd het langs theoretischen weg ontdekte feit, dat er om verzadigden waterdamp te verwarmen warmte aan den damp onttrokken moet worden, als men namelijk tegelijkertijd zorg draagt het volume zoodanig te verkleinen, dat de damp verzadigd blijft. Vroeger had men met PAMBOUR aangenomen, dat een dergelijke toestandsverandering zonder uitwisseling van warmte, hetzij in positieven, hetzij in negatieven zin, plaats grijpt. Merkwaardig is het, dat schier tegelijkertijd RANKINE en CLAUSIUS het bovengenoemde feit ontdekten, en dat deze ontdekking een der eerste is, waartoe de mechanische theorie der warmte heeft geleid. Reeds in CLAUSIUS' eerste verhandeling: *Ueber die bewegende Kraft der Wärme*, wordt zij medegedeeld. Dat dit resultaat, in weerwil van de ingewikkeldheid van het verschijnsel, waarop het betrekking heeft, zoo vroeg gevonden is, is wel een bewijs dat de mechanische theorie der warmte haar oorsprong heeft gevonden in de begeerte, om, nadat de mechanische moeielijkheden bij de stoomwerktuigen overwonnen waren, haar physische werking te doorgronden.

Sedert is gevonden, dat niet alleen de waterdamp deze eigenschap heeft, maar ook andere verzadigde dampen. Alleen etherdamp, ten minste van de dampen, die men daaromtrent, hetzij theoretisch, hetzij praktisch onderzocht heeft, maakt een uitzon-

dering. Aan dezen moet bij een bovengenoemde toestandsverandering warmte medegedeeld worden. Het ligt voor de hand, dat, zoolang men niet een nadere aanwijzing kan doen, waarom etherdamp zich zoo verschillend gedraagt, men de wijze, waarop de andere dampen zich gedragen als de *wet*, en het gedrag van etherdamp als een *zonderlinge afwijking* moest beschouwen.

In het volgende zal ik een poging beproeven om te doen zien, dat de meeste gewoonlijk voorkomende dampen zich als waterdamp moesten gedragen, maar dat het gedrag van etherdamp niet is een afwijking van een *wet* en dat hoogstwaarschijnlijk ook etherdamp niet alleen staat in die afwijking van wat wij hoogstens mogen noemen een tot hiertoe waargenomen *regel*.



§. 2. Denken wij ons een isotherme van den graad T en daarop een punt P, dat door zijn ligging den druk en het volume van de gewichtseenheid van den damp aangeeft. Zij de warmte noodig om de stof Δ T graden te verwarmen, gelijk aan Δ Q dan is $lim \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$ in het algemeen de specifieke warmte. Is ook geteekend de isotherme van den graad $T + \Delta T$, dan zal na de verwarming de toestand van de stof aangegeven zijn door een punt van deze isotherme, bijv. S. Maar aangezien de plaats van dit punt nog geheel willekeurig op deze isotherme kan gekozen worden, en de hoeveelheid warmte Δ Q met de

verandering van de plaats van dat punt ten nauwste samenhangt is $lim \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ voor oneindig veel waarden vatbaar en wordt eerst bepaald, als men de plaats van het punt S heeft aangewezen. Onder al die waarden worden enkele bij voorkeur met den naam van specifieke warmte bestempeld, en door eene of andere bijvoeging van elkander onderscheiden. Wij zullen er 4 onderscheiden.

1^0. als het punt S juist boven P in den stand P_1 ligt. In dit geval is het volume gedurende de verwarming standvastig gebleven, en noemt men

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v = c_v$$

de specifieke warmte bij standvastig volume.

2^0. als de stand van S in P_2 is, op gelijke hoogte als P. Dan is de druk standvastig gebleven en wordt

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = c_p$$

de specifieke warmte bij standvastigen druk genoemd.

Voor ik tot het noemen der twee anderen overga, deze opopmerking: Naarmate het punt S meer rechts van P_1 ligt, is de specifieke warmte grooter dan c_v; naarmate het meer links ligt daarentegen kleiner. Dit volgt onmiddellijk uit de in de mechanische warmtetheorie bekende vergelijking

$$d\,Q = c_v\, d\,T + A\,T \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v d\,v$$

of

$$\frac{d\,Q}{d\,T} = c_v + A\,T \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v \frac{d\,v}{d\,T}$$

In deze vergelijking toch staat te lezen, dat als $\frac{d\,v}{d\,T}$ positief is $\frac{d\,Q}{d\,T} > c_v$ en te grooter is naarmate $\frac{d\,v}{d\,T}$ grooter wordt. Het geval, dat de isotherme van lager temperatuur hooger ligt

dan die van hooger temperatuur ga ik, als hier niet van rechtstreeks gewicht, met stilzwijgen voorbij. Is $\left(\frac{d\,v}{d\,T}\right) < 0$ dan is $\frac{d\,Q}{d\,T} < c_v$ en te kleiner naarmate de absolute waarde van $\frac{d\,v}{d\,T}$ toeneemt.

Uit deze opmerking volgt, dat wij

3⁰. den stand van S zoodanig kunnen bepalen, dat $\frac{d\,Q}{d\,T} = 0$ is. Dan is de specifieke warmte $= 0$ en geschiedt de toestandsverandering langs adiabatischen weg. De plaats van het punt S wordt dan bepaald door

$$-\left(\frac{\partial\, v}{\partial\, T}\right)_Q = \frac{c_v}{A\,T\left(\frac{\partial\, p}{\partial\, T}\right)_v}$$

Laat die stand door P_3 worden aangeduid.

4⁰. Ligt het punt S nog meer links van P_1 dan P_3, dan zal de specifieke warmte negatief moeten zijn. Stelde nu P den toestand van verzadigden damp voor bij de temperatuur T en P_4 dien bij de temperatuur $T + \Delta T$, dan zal de specifieke warmte van den verzadigden damp negatief zijn, maar ligt P_4 daarentegen tusschen P_1 en P_3, dan is die specifieke warmte nog positief.

§ 3. Daar de limietstand van $P P_3$ de richting der adiabatische lijn in het punt P is, en evenzoo de limietstand van $P P_4$ de richting der *verzadigde damplijn* in het punt P, kunnen wij het hiervoor gevonden resultaat aldus uitdrukken: "de "specifieke warmte van den verzadigden damp is negatief, als "de adiabatische lijn in een punt van de verzadigde damplijn "steiler stijgt dan de damplijn; ze is daarentegen positief als "de adiabatische lijn minder steil stijgt."

In de hypothese van PAMBOUR lag dus de geheel willekeurige stelling opgesloten, dat de verzadigde damplijn tegelijkertijd een adiabatische lijn zou zijn, of een enveloppe van adiabatische lijnen.

Over den werkelijken stand van P_4, of die links of rechts van P_3 zal zijn, is zonder nader onderzoek niet te beslissen.

Wel voeren deze eenvoudige beschouwingen, als men in aanmerking neemt, dat de adiabatische lijn te minder van de isotherme afwijkt naarmate de verhouding $\frac{c_p}{c_v}$ te minder van de eenheid verschilt, reeds tot het denkbeeld, dat de omstandigheid, dat het punt P_4 tusschen P_1 en P_3 ligt en dat dus de specifieke warmte van den verzadigden damp positief is, juist bij die stoffen zal voorkomen, waar die verhouding weinig grooter dan de eenheid is. Dit denkbeeld wordt versterkt, als men ziet, dat bij etherdamp, ten minste de theoretische verhouding van $\frac{c_p}{c_v}$ kleiner is, dan bij ieder der andere dampen, die zich in de andere richting gedragen.

Het behoeft nauwelijks opgemerkt te worden, dat, daar rechts van de lijn $P\,P_4$ de punten liggen, die den onverzadigden toestand aanduiden, de adiabatische samendrukking bij waterdamp oververhitting ten gevolge heeft, bij etherdamp daarentegen condensatie teweegbrengt. Bij waterdamp en bij de dampen, die zich in dat opzicht gelijk gedragen, bestaat dus in werkelijkheid alleen dat deel der adiabatische lijn, dat naar boven gaat; bij etherdamp, en bij die, welke zich evenzoo mogen gedragen, daarentegen het naar benedengaande deel.

§ 4. Door CLAUSIUS is ter berekening van de waarde van de specifieke warmte van den verzadigden damp, de volgende formule afgeleid.

$$h = H + \frac{d\,r}{d\mathrm{T}} - \frac{r}{\mathrm{T}}$$

In deze formule stelt r de warmte voor, noodig om een kilogram vloeistof van T graden onder den druk van haar verzadigden damp te verdampen; T is de absolute temperatuur en H is de specifieke warmte van de vloeistof, als de druk gedurende de verwarming steeds gelijk gehouden wordt aan dien van den verzadigden damp. Daar H niet bekend is, wordt daarvoor gewoonlijk genomen de specifieke warmte van de vloeistof onder den standvastigen druk van één atmosfeer. Voor zoover dat verschil verwaarloosd kan worden, en bij geringen druk en geringe uitzetting der vloeistof, is dat zeker geoorloofd, en voor

zoover de waarnemingen van REGNAULT omtrent de afhankelijkheid der latente warmte van de temperatuur nauwkeurig zijn, stelt deze formule ons in staat onmiddelijk over het teeken van h te oordeelen, en de waarde er van te berekenen. De schaduwzijde van deze formule is echter, dat de grootheden, die er in voorkomen, in een of niet opgemerkt of te verwijderd verband staan tot de eigenschappen der dampen, waarover zij beslissing moet geven. Zij leert berekenen, maar beoogt geen verklaring. Zoo zegt bijv. ZEUNER in zijn bekend leerboek der mechanische warmtetheorie, als hij bovengenoemde formule alleen bij etherdamp een positieve uitkomst ziet leveren „Eine nähere „Erklarung dieser sonderbaren Abweichung lässt sich bis jetzt „nicht geben." Daarom kan het zijn nut hebben de voorwaarde voor het gedrag in den eenen of anderen zin uit te drukken in andere meer rechtstreeks op den damp betrekking hebbende grootheden, waaronder de specifieke warmte c_p en c_v zullen moeten voorkomen,

§ 5. Zal een damp zich verhouden als waterdamp, dan moet

$$\frac{dp}{du + d\sigma} > \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q \text{ zijn}$$

Hierin hebben p en v en $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q$ de bekende beteekenis, en stelt σ het vloeistofvolume onder den druk van den verzadigden damp voor en u de toename van dit volume als de geheele massa in damp is overgagaan, zoodat $u + \sigma$ het volume van den damp voorstelt Blijven wij bij niet al te groote drukking, dan is σ slechts een klein gedeelte van u en $d\sigma$ slechts een klein gedeelte van du, en kan als hooge benadering gelden de voorwaarde:

$$\frac{\frac{dp}{dT}}{\frac{du}{dT}} > \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Herleiden wij deze vergelijking door voor $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_Q$ in de plaats te schrijven $\frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$ en nemen wij in aanmerking, dat

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} \text{ is}$$

dan kan voor (α) geschreven worden

$$\frac{A u \frac{d p}{d T}}{A p \frac{d u}{d T}} > - \frac{c_p}{c_v} \frac{\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

waarin A het calorisch equivalent der warmte-eenheid voorstelt.

Maar

$$A u \frac{d p}{d T} = \frac{r}{T}$$

en

$$A p \frac{du}{dT} = - \left\{ \frac{r}{T} - \frac{d(A p u)}{d T} \right\}$$

Zoodat (β) veranderd kan worden in

$$\frac{c_p}{c_v} \frac{\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} > \frac{1}{1 - \frac{T}{r}\frac{d(A p u)}{d T}} \quad \ldots\ldots (\gamma)$$

Voor dampen, die zich als etherdamp verhouden zal daarentegen

$$\frac{c_p}{c_v} \frac{\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} < \frac{1}{1 - \frac{T}{r}\frac{d(A p u)}{d T}}$$

moeten zijn.

§ 6. Voor een nauwkeurige berekening is de formule (γ) ten eenenmale ongeschikt. Daarvoor komen in haar voor verschillende grootheden, omtrent welker bedrag wij in het onzekere verkeeren. Maar wel kan zij dienen, als wij slechts de vraag stellen met zekeren graad van waarschijnlijkheid à priori van een damp te weten, of zij in den zin van waterdamp of van etherdamp zal afwijken; ten minste als wij ze toepassen bij niet grooten druk bijv. bij dien van één atmosfeer.

De in het tweede lid der vergelijking (γ) voorkomende grootheid $\frac{T}{r} \frac{d(A\,pu)}{dT}$ is n. l. altijd slechts een kleine grootheid en zelfs bij de verschillende dampen een nagenoeg evengroote. Zoo leveren de tafels van ZEUNER voor $\frac{T}{r} \frac{d(A\,pu)}{dT}$ bij den druk van een atmosfeer, bij water, ether, aceton, chloorkoolstof en zwavelkoolstof daarvoor de waarden 0,062, 0,061, 0,068, 0,072 en 0,069; zoodat voor dat tweede lid bij dien druk een waarde kan gesteld worden tusschen 1,07 en 1,08.

De grootheden $\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ en $\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ zijn bij zoogenoemde volkomen gassen $= 1$, bij de werkelijk voorkomende gassen > 1. Omtrent de hoegrootheid van het bedrag boven de eenheid, maakt men zich echter bij verzadigde dampen onder niet grooten druk dikwijls overdreven voorstellingen, wij zijn in staat door de waarnemingen van REGNAULT het bedrag van beide grootheden te bepalen.

§ 7. Het bedrag van $\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ wordt gevonden langs den volgenden weg. Uit de in de mechanische warmtetheorie bekende vergelijking

$$dQ = c_p\, dT - A\,T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp$$

leiden wij de volgende waarde voor h af:

$$\frac{dQ}{dT} = h = c_p - A\,T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dT}$$

mits voor $\frac{dp}{dT}$ de waarde in de plaats gesteld wordt, die dat quotient bij verzadigde dampen heeft nl.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{A T u}$$

en dus

$$h = c_p - \frac{r}{T}\left[\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]$$

een vergelijking, die door substitutie van de waarde van h voert tot de volgende

$$c_p - \left(H + \frac{dr}{dT}\right) = \frac{r}{T}\left\{\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - 1\right\} \quad . \; . \; . \; (\delta)$$

De vergelijking (δ) toont aan, dat de verwachting die onder anderen RANKINE had, dat $c_p = H + \frac{dr}{dT}$ is, alleen vervuld wordt als $\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = 1$ is. Bij waterdamp is voor den druk van een atmosfeer $c_p = 0{,}4805$ en $H + \frac{dr}{dT} = 0{,}305$. Uit dat groote verschil volgt echter nog volstrekt niet, dat verzadigde waterdamp van 100° zeer groote afwijkingen van de wetten der volkomen gassen vertoonen moet. Uit (δ) volgt

$$\frac{c_p - \left(H + \frac{dr}{dT}\right)}{\frac{r}{T}} = \frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p - 1$$

Voor verzadigde waterdamp van 100° volgt uit $T = 373$ en $r = 536{,}5$

$$\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = 1{,}12.$$

De waarnemingen van REGNAULT voeren dus volstrekt niet

tot uitkomsten, zooals o. a. SIEMENS zou gevonden hebben, dat die waarde zelfs $>$ 5 zijn zou.

Bij andere dampen vindt men voor $\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ bij het kookpunt onder den druk van een atmosfeer:

etherdamp	1,18
aceton	1,25
chloroform	1,11
zwavelkoolstof	1,17

§ 8. Tot de kennis van de waarde van $\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ komt men uit de waarnemingen van REGNAULT op de volgende wijze.

In het algemeen heeft men

$$\frac{dv}{dT} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p.$$

Bij verzadigden damp wordt dit gelijk aan

$$\frac{du}{dT} = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}\frac{r}{A\,T\,u} + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

of

$$-\,Ap\frac{du}{dT} = \frac{r}{T}\,\frac{\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_v}{\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v} - \frac{A\,pu}{T}\,\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p.$$

Na herleiding vinden wij

$$\frac{\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}{\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v} - 1 = \frac{A\,pu}{r}\,\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - \frac{T}{r}\,\frac{d(A\,pu)}{\partial T}.$$

Bij verzadigden waterdamp onder den druk van een atmosfeer is de waarde van het tweede lid dezer vergelijking 0,022.

Bij etherdamp . . . . 0,046.
Bij aceton . . . . 0,042.
Bij chloroform . . . . 0,030.
Bij zwavelkoolstof . . . . 0,044.

Bij al deze dampen blijkt $\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v < \frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ of zooals te verwachten was de uitzettings-coëfficiënt grooter dan de spannings-coëfficiënt.

Voor $\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ vinden wij bij

waterdamp	1,10
etherdamp	1,13
aceton	1,21
chloroform	1,08
zwavelkoolstof	1,13

§. 9. Nu heeft men de gegevens, welke noodig zijn om de specifieke warmte bij standvastig volume te berekenen, door middel der vergelijking:

$$c_v = c_p - A\,T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

of

$$c_v = c_p - \frac{Apu}{T} \times \frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \times \frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \quad . \; . \; (\varepsilon)$$

Bij verzadigden waterdamp onder de spanning van een atmospheer is, volgens de hierboven berekende waarden het verschil van c_p en $c_v = 0,13$; terwijl, als men de berekening deed als bij volkomen gassen, dat verschil $= 0,11$ is; zoodat $\frac{c_p}{c_v} = 1,37$ is, terwijl de waarde zooals die o. a. door CLAUSIUS is opgegeven $= 1.3$ is.

Bij etherdamp is $c_p - c_v = 0,0345$, terwijl het theoreretisch verschil $= 0,027$ is.

Maar in de verhouding $\frac{c_p}{c_v}$ geeft dit maar weder een kleine verandering; de ware verhouding is 1,08; de theoretisch berekende $= 1,06$.

Namen der dampen.	c_p	c_v volgens formule (ε).	c_v volgens theoretisch verschil	$\frac{c_p}{c_v}$	$\frac{c_p}{c_v}$ volgens kolom (3).	$\frac{\frac{c_p}{c_v}}{\left(\frac{c_p}{c_v}\right)}$
Waterdamp . .	0,4805	0,350	0,370	1,37	1,3	1,05
Etherdamp. . .	0,4797	0,444	0,453	1,08	1,06	1,02
Aceton	0,4125	0,363	0,378	1,14	1,09	1,04
Chloroform . .	0,1567	0,136	0,140	1,15	1,12	1,03
Zwavelkoolstof	0,1569	0.123	0,131	1,27	1,20	1,06
Benzin	0,3754		0,350		1,073	
Alkohol. . . .	0,4534		0,410		1,11	
Terpentijnolie.	0,5061		0,491		1,03	

§ 10. Keeren wij nu tot de vergelijking (γ) terug, dan hebben wij in de boven behandelde gevallen gezien, dat, wanneer wij voor het eerste lid

$$\frac{c_p}{c_v} \frac{\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}{\frac{T}{p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}$$

in de plaats stellen $\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$ zooals deze in de 5de kolom voorkomt, wij een fout maken van gering bedrag. Dan hebben wij als voorwaarde, dat als $\frac{c_p}{c_v} < 1,07$ de damp zich als etherdamp zal gedragen; en als $\frac{c_p}{c_v} > 1.08$ daarentegen als waterdamp. Verschilt $\frac{c_p}{c_v}$ echter niet veel van 1.07 dan laat de vergelijking (γ) de zaak onbeslist, daar de fout, die wij door $\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$ te nemen, begaan, zoowel in de eene als in de andere richting kan uitval-

len. Volgens voorgaande tabel is $\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$ bij terpentijndamp = 1,03. Hier is dus grond voorhanden om te verwachten, dat damp van terpentijnolie zich als etherdamp zal verhouden.

Voor zoover ik weet zijn er omtrent den damp van terpentijn geen waarnemingen omtrent den samenhang van r met de temperatuur gedaan. Het kenmerk

$$h = \mathrm{H} + \frac{dr}{d\mathrm{T}} - \frac{r}{\mathrm{T}}$$

kan dus hier niet worden toegepast. Dat die damp zich echter in de aangegeven richting zal gedragen, wordt zeer bevestigd door de vergelijking van § 7.

$$h = c_p - \frac{r}{\mathrm{T}}\left[\frac{\mathrm{T}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \mathrm{T}}\right)_p\right].$$

Immers daar $c_p = 0{,}5061$ en r door BRIX op 74, door DESPRETZ op 76,75 is bepaald, terwijl $\mathrm{T} = 273 + 157$, zou om h negatief te hebben

$$\frac{\mathrm{T}}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial \mathrm{T}}\right)_p > 2{,}8$$

moeten zijn. Iets wat, met het oog op wat wij bij andere dampen zagen, hoogst onwaarschijnlijk is.

§ 11. Dat wij uit de vergelijking (γ) niet met volkomen zekerheid een besluit kunnen trekken, ligt daaraan, dat wij van de verschillende dampen niet weten, in hoever zij van de wetten der volkomen gassen afwijken. Die onzekerheid is echter niet zoo groot of wij kunnen wel het besluit trekken, dat bijv. die gassen, waarbij de theoretische waarde van $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}41$ is, zich in den zin van waterdamp zullen gedragen. Hiertoe behooren stikstof, waterstof, zuurstof. Wanneer die gassen zich dus bij oorspronkelijk hoogen druk adiabatisch uitzetten, en zij zijn in den toestand van verzadigde dampen gekomen, zal bij verdere uitzetting een gedeelte condenseeren; en dat zij in den toestand van verzadigde dampen zullen komen, laat zich uit het feit,

dat de adiabatische lijnen in de punten der verzadigde damplijn sterker dalen dan de damplijn zelve met zekerheid verwachten. Gedroegen zij zich daarentegen als etherdamp, dan was die condensatie of in het geheel niet of slechts voorbijgaande te wachten.

Daar het CAILLETET gelukt is door adiabatische uitzetting die gassen ten minste gedeeltelijk tot vloeistof te brengen, zien wij een gevolg van de vergelijking (γ) bevestigd.

Nog verdient opgemerkt te worden, dat die dampen, waarbij de verhouding van c_p en c_v slechts weinig grooter dan 1,08 is, en waarbij vergelijking (γ) ons niet toelaat met waarschijnlijkheid een besluit te trekken, zich dan ook bij verschillende temperaturen verschillend in dit opzicht blijken te gedragen. Zoo volgt o a uit de tafels van ZEUNER, dat voor chloroform bij ongeveer 130^0 een overgangstemperatuur voor het verschijnsel zijn moet.

Bij 120^0 is $h = -0{,}002$ en bij 130^0 $h = +0{,}003$. Het is dan ook aan CAZIN gelukt proefondervindelijk aan te toonen, dat beneden 130^0 chloroformdamp zich als waterdamp, boven 136^0 zich als etherdamp gedraagt.

Bij alcohol geven de tafels van ZEUNER bij 140^0 eveneens $h > 0$.

Bij acetondamp is dit eveneens boven 175^0 te wachten.

§ 12. Op gelijke wijze als in § 7 een betrekking gevonden is tusschen c_p en h, kan door de vergelijking der mechanische warmtetheorie

$$dQ = c_v\, dT + A\, T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv$$

een betrekking gevonden worden tusschen c_v en h, en wel van den volgenden vorm:

$$c_v - h = \frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left\{\frac{r}{T} - \frac{d\,(A\,p\,u)}{\partial T}\right\}$$

wat evenwel geen nieuwe vergelijking is, maar die uit de vroegere zou kunnen worden afgeleid.

Na eliminatie van $\frac{T}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ en $\frac{T}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ vindt men de volgende betrekking tusschen c_v en c_p

$$\frac{(c_p - h)\,(c_v - h)}{c_p - c_v} = \frac{\dfrac{r}{T} - \dfrac{d\,(Apu)}{dT}}{\dfrac{Apu}{r}} \quad \ldots (\delta)$$

een vergelijking, waardoor als c_p bekend is, en de gewone waarnemingen omtrent de spanning der verzadigde dampen en de latente warmte en de uitzetting der vloeistof verricht zijn, ook c_v kan gevonden worden. Nu is het à priori niet zeker, dat c_p onafhankelijk van temperatuur en dichtheid is. Integendeel heeft men grond om te verwachten, dat c_p evenals elke andere grootheid, die een eigenschap der lichamen betreft, een functie van p en T is. De waarnemingen van REGNAULT geven echter recht tot het besluit, dat de verschillen, die in c_p mochten bestaan, vallen binnen de grenzen van de nauwkeurigheid der waarnemingen.

De vergelijking (δ) op verzadigden waterdamp tusschen 0^0 en 200^0 toegepast, levert als men c_p steeds op 0,4805 stelt, slechts weinig verschil in de berekende waarde van c_v. Deze vergelijking kan ook aldus geschreven worden:

$$\frac{1}{c_v - h} - \frac{1}{c_p - h} = \frac{\dfrac{Apu}{r}}{\dfrac{r}{T} - \dfrac{d\,(Apu)}{dT}}$$

§. 13. Vatten wij het behandelde samen, dan meenen wij te hebben aangetoond:

1^0. dat het verschijnsel, dat verzadigde dampen bij adiabatische samendrukking gedeeltelijk zullen condenseeren, te wachten is, bij die dampen, waarbij $\frac{c_p}{c_v}$ slechts weinig van de eenheid verschilt. In het bijzonder hebben wij grond om te wachten, dat damp van terpentijnolie zich aldus zal gedragen.

2^0. dat uit de waarnemingen omtrent de spanning der verzadigde dampen en latente warmte en uit de kennis van c_p kan gevonden worden: de uitzettingscoëfficient, de spanningscoëfficient en de waarde van c_v voor de dampen in verzadigden toestand.

Amsterdam, December 1877.

OVER HET

CRITHMUM MARITIMUM DER NEDERLANDSCHE SCHRIJVERS.

DOOR

C. A. J. A. OUDEMANS.

In den *Prodromus Florae Batavae* (a⁰ 1850), p. 100, vindt men onder n⁰. 437, en dus in de doorloopende reeks onzer Nederlandsche indigenen, ook *Crithmum maritimum* vermeld, met de bijvoeging: „Aan de zeekust. ♃. Jul. Aug. (Cachrys maritima F. B. S., p. 242). (Zeeland GORT., p. 76) n. v. i."

De letters F. B. S. hebben betrekking op de *Flora Belgii Septentrionalis* van VAN HALL, waar men dan ook werkelijk op p. 242 van *Cachrys maritima* SPR. (gelijkluidend met *Crithmum maritimum*) vindt gewag gemaakt, alweder met verwijzing naar DE GORTER, die ze in Zeeland zou hebben aangetroffen. De letters n. v. i. beteekenen „non vidi indigenam", waarmede VAN DEN BOSCH, de samensteller van den *Prodromus*, te kennen wilde geven, dat hem geen exemplaar der plant, op Nederlandschen bodem geplukt, was onder de oogen gekomen.

Het werk van DE GORTER, waarop zoowel door VAN HALL als door den *Prodromus* gezinspeeld werd, was diens *Flora VII Provinciarum*, in 1814 te Utrecht in het licht gegeven. Op p. 76 aldaar, wordt *Crithmum maritimum* ons voorgesteld met de volgende toelichting:

„*Crithmum* foliolis lanceolatis carnosis. *Sp.* 354 n. 1.

Crithmum s. Foeniculum maritimum minus. *Bauh. pin.* 288. *Boerh. lugdb.* 1. p. 57.

Foeniculum marinum s. Empetrum s. Calcifraga *Lob. ic.* 392.
Zee-Venkel, Zee-Peterselie. Belg.
In Zeeland."

Uit de Gorter's voorrede vernemen wij, dat de letters *Sp.* betrekking hebben op de 13e uitgave der *Species Plantarum* van Linnaeus, door Murray bewerkt. Aan dien schrijver ontleende hij de korte Latijnsche diagnose achter het woord *Crithmum,* terwijl de volgende regel ons den naam doet kennen, waaronder de door de Gorter bedoelde plant in den *Pinax Theatri Botanici* van Bauhinus en in Boerhaave's *Index alter plantarum quae in Horto Academico Lugduno-Batavo aluntur* stond opgeteekend. In de *Plantarum seu Stirpium Icones*, door Plantijn in 1581 uitgegeven en uit de werken van de Lobel getrokken, vinden wij de laatste zinsnede van de Gorter (Foeniculum marinum, etc.) boven eene houtsnede, die, ook bij Dodonaeus te vinden, ons eene voorstelling geeft van de plant, welke al de genoemde auteurs op het oog hadden, en die volkomen past op het gewas, dat nog heden ten dage met den naam van *Crithmum maritimum* of *Cachrys maritima* wordt aangeduid.

Bij Murray, Bauhinus en de Lobel — de schrijvers, door de Gorter in de eerste plaats geraadpleegd — wordt noch van Zeeland, noch van eenige andere provincie in Nederland gesproken, als van eene plaats, waar *Crithmum maritimum* gevonden zoude kunnen zijn. Boerhaave echter, die gewoon was, in zijn *Index* al die planten met een † te teekenen, welke, zooals hij het noemde: „Indigenae Bataviae Stirpes" waren, plaatste dit teeken ook achter zijn „Crithmum sive foeniculum maritimum minus", maar zonder eenige nadere aanwijzing van de plaats, waar het bedoelde gewas zich zou hebben opgedaan.

Met het oog op deze feiten en op de bijzonderheid, dat de Gorter, niettegenstaande hij de gewoonte had, de groeiplaatsen der door hem vermelde gewassen steeds zoo nauwkeurig mogelijk op te geven, echter van eene zoo belangrijke plant als *Crithmum maritimum* niets meer vermeldde dan dat zij in Zeeland gevonden was, rijst de vraag: of Boerhaave en de Gorter laatstgenoemde wel ooit zelven in ons vaderland zagen

groeien, dan wel op een dwaalspoor gebracht werden door een anderen auteur, wiens woorden trouwens door hen ook wel verkeerdelijk konden zijn uitgelegd.

Na lang zoeken, meen ik er eindelijk in geslaagd te zijn aan te toonen, dat dit laatste werkelijk het geval is geweest, en wensch ik van het gevondene hier een kort en zakelijk verslag te doen.

Vooraf ga de opmerking, dat men bij alle oudste auteurs van naam over onze flora: een DODONAEUS, een DE LOBEL, een CLUSIUS, het door DE GORTER bedoelde *Crithmum maritimum* wel vindt afgebeeld, maar nergens met de bijvoeging, dat de plant in Zeeland, of ook zelfs in Nederland gevonden zou zijn. Ook bij PELLETIER, wiens zeldzaam werkje: *Plantarum tum patriárum tum exoticarum in Walachria, Zeelandiae insula, nascentium synonymia* in 1610 te Middelburg in het licht verscheen, wordt op p. 127 wel van *Crithmum maritimum* gesproken, ja zelfs een achttiental regels aan deze plant gewijd, maar zonder eenige zinspeling op hare aanwezigheid in Zeeland, of liever met de zijdelingsche verklaring: dat ons vaderland het gewas niet kon opleveren, zooals uit de woorden: „in petrosis non autem in sabulosis ut portulaca marina provenit" wel mag worden afgeleid.

Het werk, waarin ik de lang gezochte opheldering eindelijk vinden mocht, was „de Moufe-Schans" van PETRUS HONDIUS, in 1621, als tweede druk, te Leiden in het licht verschenen. Men heeft onder dien titel eene buitenplaats te verstaan, dicht bij Neuzen gelegen en door den predikant PIETER DE HOND bewoond, die, als vurig bewonderaar van al wat door de drie Rijken der Natuur werd opgeleverd, niet alleen botanische tochten ondernam, maar ook alle kruiden, welke slechts eenigermate — hetzij in ziekten of in de keuken — van nut konden wezen, op zijn uitgestrekt grondgebied kweekte en bestudeerde. De uitkomsten zijner onderzoekingen en overpeinzingen werden door HONDIUS in versmaat zijnen lezers aangeboden, en wel met zulk eene kwistigheid, dat het boek, 't welk wij thans op het oog hebben, een klein 8°. deel uitmaakt van 534 bladzijden, elke van 36 regels, en dat alles verdeeld in 10 „Ganghen" of Hoofdstukken, ten titel voerende: I. Het Ste-leven vergeleken by het buyten-leven; II. Buyten-Hof; III. Bloem-Hof; IV. Moes

cruyden; V. Ghenees-cruyden; VI. Spyse; VII. Ouffeninghe naer den eten; VIII. Ouffeninghe op t' cantoor; IX Wandelinghe naer t' studeren; X. Morghenstont-werck. — In deze Hoofdstukken worden door den auteur niet minder dan 330 planten vermeld, welke hij, hetzij op zijne botanische uitvluchten in Zeeland gevonden of op zijne buitenplaats ter kweeking had opgenomen, en daaronder nu ook, in het 6e Hoofdstuk, en wel op p. 211, het gewas, aan welks indigeniteit ten onzent deze regels gewijd zijn. De volgende verzen zijn daarop van toepassing:

„Petersely van de zee,
Vinde lanckst de kreken staen,
Binnen lande wel geree,
Sonder ver van huys te gaen,
Op de blicken, alst ons lust,
Buyten aen de watercust,
Vinden hoopwerck van s' gelijcken,
Of int vallen van de dijcken:
Die een ander mette voeten
Als onnutte veeck betrapt,
Wy ons lusten daer me boeten,
Daer elck een by ons naer snackt;
Om de Persil de la mer,
Die ons veel van t' Engels veer,
Wert gebracht, licht te vergeten,
Als wy dese voor die eten;
Is sy minder in haer crachten,
Danse doet uyt Engelant;
Meer misschien oock isse t' achten,
Die van selfs hier is geplant,
Om haer malsheyt ende smaeck,
Daer voor ick de vremde laeck;
Die gesouten boven schreven
Min is dienstigh voor ons leven."

Na al hetgeen vooraf is gegaan, is het wel niet te betwijfelen, dat BOERHAAVE en DE GORTER beiden de „Moufe-Schans"

van HONDIUS gekend en daarin hunne opgaven hebben geput. En, kan tegen deze onderstelling geen geldig bezwaar worden aangevoerd, dan dient allereerst te worden onderzocht, hoe zij de „Zee-Peterselie" van HONDIUS met het *Crithmum maritimum* konden gelijkstellen, niettegenstaande gene op drooggevallen plaatsen aan de zeekust, en langs kreken en dijken in hare nabijheid, en deze aan de kusten van Engeland, Ierland, Frankrijk, enz., nooit anders als in rotsspleten werd aangetroffen.

Te dezen opzichte nu meen ik het naast bij de waarheid te komen, door aan te nemen, dat BOERHAAVE en DE GORTER den Zeeuwschen dichter te veel bij het woord gevat en er niet op gelet hebben, dat de door hem gekozen Hollandsche naam minder diende om de botanische kenmerken of verwantschap zijner gunstelinge in het licht te stellen, dan wel om te kennen te geven dat de „Persil de la mer" uit Engeland hier, zoo al niet hare wederga, dan toch eene concurrente gevonden had, waardig om haar te vervangen, of wellicht boven haar te worden geprezen.

Vergissen wij ons niet, dan deed het woord „Petersely" hen aan eene Umbellifera denken, en verleidde hen de nadere omschrijving: „van de zee", naar eene plant te zoeken, wier soortelijke naam eveneens met de zee in verband stond, waaruit dan zou voortvloeien, dat het *Crithmum maritimum* hun was toegeschenen, aan de gestelde eischen wonderwel te voldoen. Eenige aanleiding tot hunne dwaling mag ook gelegen zijn in het feit, dat de uit Engeland afkomstige „Persil de la mer" van HONDIUS het ware *Crithmum maritimum* wel geweest konde zijn, daar laatstgenoemde plant, volgens DODONAEUS (Cruydt-Boeck a°. 1618, p. 1103 b.), in Spanje door de woorden „Perexil de la Mar" werd aangeduid.

Indien nu onze voorgangers gedwaald hebben, dient de vraag gesteld, welke verklaring voor de hunne mag worden in de plaats gegeven, en daarop meenen wij gerustelijk te kunnen antwoorden: HONDIUS heeft zonder eenigen twijfel met zijn „Peterselie van de Zee" *Aster Tripolium* bedoeld. Slaan wij nl. het artikel *Crithmum* (het aangewezene ter verklaring van het „Persil de la mer" van HONDIUS) bij DODONAEUS op, dan blijkt, dat deze auteur met dien naam 3 verschillende planten

bestempelde, en wel 1°. *Crithmum maritimum* L. (Creta marina oft Zee Venckel), 2°. *Echinophora spinosa* L. (Stekende Creta marina), en 3°. eene Composita, waaraan de naam van „Derde Creta marina met geele bloemen" en, in den text zelven, nog daarenboven die van „Aster atticus marinus", „Crithmum Chrysanthemum" en „Zee-Sterrecruyt" gegeven werd. Daar nu de eerste dezer drie gewassen, zooals wij gezien hebben, in Zeeland, uit gebrek aan rotsen, niet groeien, en de tweede om hare stekelige bladen en distelachtige eigenschappen niet gegeten kan worden — daargelaten dat zij in Zuid-Europa te huis behoort, aan de boorden der Middellandsche Zee — zoo blijft er niet anders als de Composita over, waaraan de „Zee-Peterselie" van HONDIUS kan worden vastgeknoopt.

Tegen deze vastknooping bestaan twee bezwaren, nl. 1°. dat DODONAEUS die Composita, evenals zijne Zee-Venckel, verplaatst naar de zeekusten van Italië, Frankrijk en Spanje (p. 1103 b.), en ten tweede, dat onze *Aster Tripolium* wel eenigermate op haar gelijkt, maar toch in andere opzichten ook weer van haar afwijkt.

Ik meen echter dat die bedenkingen haar gewicht verliezen, als men in het oog houdt: 1°. dat er voor HONDIUS wel eenige reden kon bestaan om te vermoeden, dat genoemde Composita bij ons kon voorkomen, dewijl DODONAEUS ten opzichte van het ware *Crithmum maritimum*, de fout begaan had, ook Engeland niet op te noemen onder de gewesten, waar dat gewas was aangetroffen; 2°. dat zoowel het derde Crithmum of de „Aster atticus marinus" als onze *Aster Tripolium* (Cruydt-Boeck a°. 1618, p. 617) door DODONAEUS met den naam van Zee-Sterrecruyt bestempeld, en op de verwantschap tusschen die beiden nog daarenboven gezinspeeld werd door de woorden, op laatstgenoemde plant toepasselijk: „daerop schoone Bloemkens wassen, in heur middelste cruyne geel van verwen, maar rontom met schoon blaeuwe bladekens beset, de bloemen van Aster Atticus oft Sterrecruyt gelijckende;" 3°. dat onze *Aster Tripolium*, die reeds ten tijde van DODONAEUS (zie p. 618) „in de Zeeuwsche Eylanden" werd gevonden, en toen reeds bekend was om zijne voorliefde voor de „blicken" of slikken van den

tegenwoordigen tijd, op geene enkele plaats van het gedicht van HONDIUS genoemd wordt, niettegenstaande die auteur de namen van 330 verschillende planten vermeld, en *Aster Tripolium*, onder de in 't wild groeiende indigenen, wel in de eerste plaats zijne aandacht moest getroffen hebben; eindelijk 4°. dat *Aster Tripolium*, waar zij groeit, steeds in een groot aantal exemplaren wordt aangetroffen, en deze eigenschap in het vers van HONDIUS ook naar behooren werd in het licht gesteld.

Men zou zich eenigermate kunnen verwonderen, dat *Aster Tripolium* door HONDIUS als eetbaar wordt voorgesteld, doch in dit opzicht bedenke men, dat de Zeeuwsche dichter er zeer op gesteld was, alles wat daarvoor slechts eenigszins vatbaar scheen — en hiervan waren de in 't wild groeiende planten niet uitgezonderd — hetzij als sla, hetzij in gekookten staat of als toekruid, op zijne tafel te doen verschijnen; ja, dat hij zich daarop zelfs verhoovaardigde, zooals blijken kan uit de volgende versregels, aan p. 211 van zijn boekje ontleend en juist voorafgaande aan die, welke wij hierboven hebben afgeschreven:

„'t Is een botte vysicheyt,
En een vyse botticheyt,
Geen nieuw spijse willen eten,
Die wy voor ons dienstich weten."

Het ware *Crithmum maritimum* werd gewoonlijk, hetzij dan versch of in pekel ingelegd, met olie en azijn toebereid, als sla gegeten, en nu is het niet onmogelijk, dat HONDIUS de bladeren van *Aster Tripolium* op dezelfde wijze dienstbaar trachtte te maken aan de opluistering van zijn disch.

Ik mag niet ontveinzen, dat de gedachte ook bij mij is opgekomen, of HONDIUS met zijn „Peterselie van de zee" niet onze gewone Selderij (*Apium graveolens*) bedoeld mocht hebben; maar ik heb dat denkbeeld weder laten varen: 1° omdat deze plant wel op zilten kleigrond, maar niet op „blicken" of boven het water uitstekende — en dus, aan de kusten, opnieuw aan overstrooming blootstaande — plaatsen groeit; 2° omdat er in de werken van DODONAEUS en andere oude herboristen nergens op eenige verwantschap tusschen *Crithmum maritimum* en

Apium graveolens gedoeld wordt; 3⁰. omdat *Apium graveolens* bij DODONAEUS (p. 1087 b.) met den Franschen naam "Persil des marez" en niet "Persil de la mer" bestempeld wordt, en men veilig mag aannemen, dat HONDIUS, die predikant was en aan de Leidsche akademie gestudeerd had, het onderscheid tusschen "mer" en "marez" (= marais) wel gekend zal hebben; eindelijk 4⁰, omdat *Apium graveolens* bij HONDIUS op p. 187 onder den titel van "Jonckvroumercke" reeds in zijn gedicht was ingevoerd.

Ook aan *Halimus portulacoides* WALLR. en *Salicornia herbacea* L. meende ik niet te moeten denken, omdat beide planten, door HONDIUS "Souternelle" en "Crabbecruyt" geheeten, een tiental regels vroeger dan de "Petersely van de zee" in het gedicht als moesplanten waren ingevoerd, en men niet kan onderstellen, dat de dichter, onmiddellijk daarop, eene reeks van 24 regels aan eene dier planten zou gewijd hebben.

De uitkomst onzer beschouwingen blijft echter altijd deze: dat *Crithmum maritimum* nooit aan onze kusten gegroeid heeft; dat BOERHAAVE en DE GORTER hunne opgave aangaande de indigeniteit dezer plant aan HONDIUS ontleend, en eindelijk, dat zij de bedoeling van dezen dichter verkeerd begrepen hebben.

Uit een planten-aardrijkskundig oogpunt is die uitkomst niet onverschillig. In eene nieuwe uitgave van den Prodromus Florae Batavae, of in welk werk ook over de flora van Nederland, zal *Crithmum maritimum* niet meer genoemd mogen worden, en zoo zal dan het geval zich niet meer kunnen voordoen, dat de beoefenaren onzer flora, welke in een ruilhandel met personen uit andere landen betrokken zijn, onder de planten, welke in andere gewesten uit Nederland verlangd worden, allereerst het *Crithmum maritimum* vinden aangeteekend, als een bewijs van het wantrouwen, waarmede de juistheid der bepaling van deze soort ook buiten af werd aangezien.

SUR DEUX ESPÈCES INÉDITES

DE

CICHLOIDES DE MADAGASCAR.

PAR

P. BLEEKER.

(*Avec figures*).

J'ai pu examiner, par la bienveillance de M le docteur Fr. L. Pollen, une petite collection de Poissons de Manahare, sur la côte orientale de Madagascar, collection faite par M. AUDEBERT et qui ne manque pas d'intérêt, tant parce qu'elle contient trois espèces qui jusqu'ici n'étaient pas connues de cette grande île, que parce que de ces trois espèces deux sont inédites, dont l'une appartient à un genre nouveau de Cichloïdes et l'autre représente une nouvelle forme du genre Paretroplus, genre qu'on ne connaissait jusqu'ici que de la petite île de Nossité.

Il paraît que les espèces de Cichloïdes de la faune Madégasse sont toutes propres à cette faune, aucune des cinq espèces actuellement connues étant connue habitant de l'Afrique ou de l'Asie continentale. Je pense que les fleuves de Madagascar récèlent encore bon nombre d'autres espèces de la même famille, et les faits connus justifient l'opinion que les espèces à découvrir sont, elles aussi, différentes de celles de l'Afrique orientale.

Les espèces de la collection de M. AUDEBERT ne sont qu'au nombre de neuf, sav. Paratilapia Polleni Blkr, Paracara typhus Blkr, Paretroplus polyactis, Ambassir Commersoni CV., Holocentrum diadema CV , Ephippus tetracanthus (= Scatophagus

tetracanthus Günth.), Salarias striatomaculatus Kner Steind., Muraena virescens Peters (= Anguilla virescens Günth.) et Echidna variegata Forst.

De ces espèces celle de Paracara, de Paretroplus et de Salarias sont nouvelles pour la connaissance de la faune de Madagascar. J'en donne ici les descriptions et les figures.

PARACARA Blkr (Gen. Chromid. novum).

Dentes: maxillis pluriseriati conici acuti serie externa fortiores, pharyngeales compressi acuti infra apicem emarginati. Corpus oblongum. Caput vertice, fronte, genis operculisque squamatum. Praeoperculum edentulum. Squamae capite et trunco antice cycloideae, trunco medio et postice ctenoideae, lateribus 30 circ. in serie longitudinali. Processus arcus branchialis 1ª subelongati simplices antice denticulati. Pinnae dorsalis et analis alepidotae, dorsalis spinis 1° et radiis 10, analis spinis 3 et radiis 9. B. 5.

Paracara typus Blkr. Fig. 3.

Parac. corpore oblongo compresso, altitudine 3 et paulo in ejus longitudine, latitudine 2 circ. in ejus altitudine; capite acutiusculo $3\frac{2}{5}$ circ. in longitudine corporis, paulo longiore quam alto; oculis diametro 3 circ. in longitudine capitis, diametro 1 fere distantibus; linea interoculari rectiuscula; linea rostrofrontali declivi rectiuscula; rostro acuto non convexo, absque maxilla oculo breviore; osse praeorbitali parte humillima oculi diametro plus duplo humiliore; maxillis aequalibus, inferiore sat humili, superiore mediocriter protractili sub oculi margine anteriore desinente, 3 circ. in longitudine capitis; dentibus maxillis tri-ad quadriseriatis serie externa seriebus ceteris conspicue majoribus, leviter curvatis apice infuscatis; dentibus pharyngealibus compressis apice fuscatis conicis leviter curvatis infra apicem leviter emarginatis; ossibus pharyngealibus inferioribus sutura mobili unitis; labiis mediocribus; maxilla inferiore antice utroque latere poris 2 conspicuis; squamis capite et trunco

antice cycloideis, trunco medio et postice minutissime ctenoideis; fronte usque inter medios oculos squamata; praeoperculo integro squamis longitudinaliter quadri-vel subquinqueseriatis, limbo alepidoto; squamis interoperculo uniseriatis; squamis serie longitudinali regionem interocularem inter et spinam dorsi 1m 12 circ., angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem 30 circ.; squamis serie transversa pinnam ventralem inter et pinnam dorsalem 16 circ. quarum 4 ($4\frac{1}{2}$) supra lineam lateralem; squamis ventralibus 15 circ. in serie longitudinali aperturam branchialem inter et basin ventralium; squamis linea laterali postice incisura valde superficiali aperta; linea laterali singulis squamis tubulo simplice notata, sub radio dorsali anteriore abrupta; pinnis dorsali et anali basi alepidotis; dorsali spinosa humiliore et minus duplo longiore spinis mediocribus postrorsum longitudine sensim accrescentibus posterioribus $2\frac{1}{3}$ ad $2\frac{1}{2}$ in altitudine corporis, membrana inter singulas spinas mediocriter incisa; dorsali radiosa obtuse rotundata corpore duplo circ. humiliore; pectoralibus obtusiuscule rotundatis capitis parte postoculari longioribus capite absque rostro brevioribus; ventralibus vix post basin pectoralium insertis pectoralibus non vel vix longioribus spina mediocri oculo vix longiore; anali dorsali radiosae forma, longitudine et altitudine subaequali, spinis mediocribus 3a ceteris longiore oculo vix longiore; caudali integra truncatiuscula capite absque rostro non vel vix longiore; colore corpore superne viridi inferne flavescente vel argenteo; iride violascente-viridi; operculo postice superne macula violacea vel profunde fusca; trunco fasciis 7 vel 8 transversis diffusis fascis intentitiis paulo ad non gracilioribus posterioribus 2 caudalibus; axilla superne macula fusca; lateribus regione postscapulari maculis 2 vel 3 irregularibus fuscis; pinnis pectoralibus flavescentibus, ceteris radiis flavescentibus membrana plus minusve fuscescente arenatis; dorsali basi spinam penultimam inter et radium primum ocello irregulari nigricante; caudali basi fusca.

B. 5. D. 12/9 vel 10. P. 2/12. V. 1/5. A. 3/8 vel 3/9. C. 1/14/1 et lat. brev.

Hab. Madagascar orientalis, in fluviis.

Longitudo speciminis unici 75 ‴.

PARETROPLUS Blkr. (Diagnosis reformata).

Dentes maxillis uniseriati conici obtusiusculi non lobati, parci, pharyngeales ex parte acuti ex parte obtusi facie masticatoria concavi. Os pharyngeale inferius triangulare linea media sutura solida simplex. Corpus oblongum valde compressum, squamis cycloideis (30 ad 37) in serie longitudinali vestitum. Caput vertice, fronte, genis operculisque squamatum. Maxillae breves, superior protractilis. Praeoperculum edentulum. Linea lateralis tubulis simplicibus notata. Pinnae, dorsalis et analis basi vagina squamosa inclusae, dorsali spinis 16 ad 19 et radiis 13 ad 19, analis spinis 9 et radiis 11 ad 16. Ventrales post basin pectoralium insertae. Caudalis radiis fissis 14. Processus arcus branchialis externi cornei conici breves. B. 5.

Paretroplus polyactis Blkr, Fig. 2.

Paretropl. corpore oblongo compresso, altitudine $2\frac{1}{2}$ circ. in ejus longitudine; latitudine $2\frac{3}{4}$ ad 3 in ejus altitudine; capite acutiusculo $3\frac{2}{3}$ ad 4 fere in longitudine corporis, paulo altiore quam longo; oculis diametro 3 ad 3 et paulo in longitudine capitis, minus diametro 1 distantibus; linea rostro-frontali ante oculos concaviuscula; linea interoculari rectiuscula; naribus ante oculi partem inferiorem perforatis, patulis; rostro acutiusculo cum maxilla oculo paulo ad vix breviore; osse praeorbitali parte humillima oculi diametro multo ad paulo humiliore; maxillis aequalibus parvis, superiore mediocriter protractili, ante oculum desinente, 4 circ. in longitudine capitis, postice lato superne valde emarginato; dentibus maxillis conicis obtusiusculis integris, intermaxillaribus utroque latere 6 vel 7 postrorsum longitudine decrescentibus, mandibularibus utroque latere 5 vel 6 inaequilongis symphysiali sequente minore; dentibus pharyngealibus seriebus externis compressiusculis apice conicis infra apicem leviter emarginatis, seriebus internis osseque inferiore posterioribus mediis corona obtusa concava; labiis sat carnosis; maxilla inferiore antice inferne poris conspicuis nullis; squamis frontalibus usque ante medium oculum extensis,

praeoperculo quadriseriatis, limbo praeoperculi nullis, interopercularibus bi-ad uniseriatis, operculo quadri ad quinque seriatis; squamis serie longitudinali regionem inter ocularem inter et spinam dorsi anteriorem 15 circ., trunco angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis 32 vel 33; squamis serie transversa pinnam ventralem inter et pinnam dorsalem 20 circ., 6 vel 7 initium lineae lateralis inter et spinam dorsi 1^{m}, 4 supra lineam lateralem infra spinas dorsales medias; squamis ventralibus parvis 22 circ. in serie longitudinali aperturam branchialem inter et basin ventralium; squamis linea laterali postice partim incisis partim integris; linea laterali sub radiis dorsalibus anterioribus abrupta, cauda non vel tubulis solitariis aliquot tantum conspicua; vagina dorsalis et analis squamosa sat elevata; dorsali parte spinosa parte radiosa minus duplo longiore spinis mediocribus, posterioribus subaequilongis $3\frac{1}{2}$ circ. in altitudine corporis, membrana inter singulas spinas mediocriter incisa leviter lobata; dorsali radiosa dorsali spinosa altiore obtuse rotundata, radiis praemedianis ceteris longioribus; pectoralibus obtuse rotundatis capite absque rostro non brevioribus; ventralibus acutis capite absque rostro non brevioribus; ventralibus acutis capite absque rostro brevioribus; anali parte spinosa et parte radiosa aequilongis, spinis validis postrorsum longitudine sensim accrescentibus spinis dorsalibus fortioribus sed non longioribus, parte radiosa parte spinosa altiore obtuse rotundata radiis praemedianis ceteris longioribus; caudali capite non vel vix breviore, leviter emarginata angulis acuta; colore corpore superne olivascente marginibus squamarum profundiore, inferne roseo-margaritaceo vel flavescente; iride violascente-viridi; trunco fasciis 7 transversis fuscescentibus diffusis interstitiis latioribus; pinnis violascente-hyalinis vel flavescente-hyalinis; imparibus plus minusve fuscescente arenatis.

B. 5. D. 16/17 vel 16/18 vel 16/19. P. 2/16 vel 2/17. V. 1/5.
A. 9|13 vel 9|14 ad 9/15 vel 9/16. C. 1/14/1 et lat. brev.

Hab. Madagascar orientalis (Manahare); in fluviis.

Longitudo 2 speciminum 67‴ ad 89‴.

Rem. On ne connaissait jusqu'ici du genre Paretroplus qu'une seule espèce, qui habite les eaux douces de la petite île de

Nossibé et que j'ai publiée sous le nom de Paretroplus Damii (Versl. Kon. Ak. Wet. 2e Reeks II p. 313 et Poiss. Madagasc. p. 13 tab. 4 fig. 3). Cette espèce est fort voisine de l'espèce de Madagascar, mais le Damii en est nettement distinct par la dorsale à 18 ou 19 épines et à 13 jusqu'à 15 rayons, par l'anale à 11 ou 12 rayons, par les 39 écailles sur une rangée longitudinale du tronc, par les 6 (5½) rangées longitudinales d'écailles entre la ligne latérale et les épines dorsales médianes, par la présence d'une grande tache axillaire noirâtre et par l'absence de bandes transversales du tronc. Les dents intermaxillaires aussi, dans le Damii, ne sont qu'an nombre de quatre ou cinq de chaque côté, et j'y trouve encore la dorsale épineuse du double plus longue que dans le polyactis.

Salarias striato-maculatus Kner Steind., N. Fisch. Mus. Godefroy, Sitz. ber. K. Ak. Wiss. LIV p. 368 tab. 1 fig. 4. — Fig. 3.

Salar. corpore elongato compresso. altitudine 7 fere in ejus longitudine, antice paulo altiore quam lato; capite truncato-convexo, 6 circ. in longitudine corporis, paulo longiore quam alto et lato; fronte convexa; rostro obtusotruncato vix ante frontem prominente; oculis diametro 3 circ. in longitudine capitis; vertice nuchaque cristis vel cirris nullis; orbita cirro tri-ad quinquefimbriato oculo non breviore; naribus anterioribus cirro fimbriato oculo breviore; labro superiorem nec crenulato nec fimbriato; maxilla inferiore caninis nullis; cute laevi, dorso striis vel rugulis numerosis confertis oblique postrorsum descendentibus parum conspicuis; linea laterali paulo post apicem pinnae pectoralis deorsum curvata, post anum inconspicua; pinna dorsali partem spinosam inter et radiosam profunde incisa, parte spinosa parte radiosa conspicue humiliore et multo breviore radio producto nullo, parte radiosa corpore sat multo humiliore postice cum basi pinnae caudalis unita: pectoralibus oblique rhomboideis rotundatis capite paulo longioribus, radiis omnibus simplicibus; ventralibus pectoralibus duplo circ. brevioribus; anali dorsali radiosa multo humiliore non cum

caudali unita, membrana inter singulos radios mediocriter incisa; caudali capite non vel vix breviore, obtusa, convexa, radiis fissis 9; colore capite, dorso lateribusque superne viride-violascente, lateribus inferne ventroque viridi-margaritaceo vel albido; cirris supraorbitalibus et nasalibus irideque violaceis; trunco fasciis pluribus transversis undulatis ex parte geminatis nigricante-violaceis, cauda in maculas irregulares decompositis; pinnis violascente-hyalinis; dorsali spinosa vittulis 3 horizontalibus fuscis, antice superne spinas 2 anteriores inter macula nigricante; dorsali radiosa radiis maculis parvis fuscis antice et superne series obliquas postrorsum descendentes, medio inferne et postice in series obliquas postrorsum adscendentes dispositis; anali dimidio inferiore violascente-fusca; caudali guttulis vel maculis parvis fuscis in series 5 circ. transversas dispositis.

B. 6. D. 13/21. P. 14. V. 1/3 (spina cum radio 1°. et radiis 2°. crasso cum 3°. gracili juxtapositione et cute communi unitis quasi simplicibus). A. 24. C. 1/9/1 et lat. brev.

Syn. *Salarias Dussumieri* Playf, Fish. Zanzeb. p. 77 n°. 385 (nec n°. 391, 62) tab. 9 fig. 7 (nec. fig. 6); Day, Fish. Ind. I p. 333 (ex parte) tab. 70 fig. 7.

Hab. Manahare (Madagascar orientalis).

Longitudo speciminis descripti 83‴.

Rem. L'individu décrit, bien qu'il présente quelques différences par rapport aux couleurs, aux proportions et aux formules, me paraît spécifiquement identique avec le Salarias striatomaculatus et avec les poissons cités publiés sous les noms de Salarias Dussumieri par M.M. Playfair et Day. L'individu de Madagascar a une épine et un rayon de plus à la dorsale et deux ou trois rayons de plus à l'anale que ceux décrits par les auteurs cités. Les rayons de la pectorale sont bien positivement tous indivisés et les ventrales se composent d'une faible épine et de trois rayons simples, mais l'épine étant enveloppée par la peau commune avec le premier rayon et le second rayon avec le troisième, la nageoire a l'air de n'être composée que de deux rayons.

La Haye, Septembr. 1877.

Fig. 1.

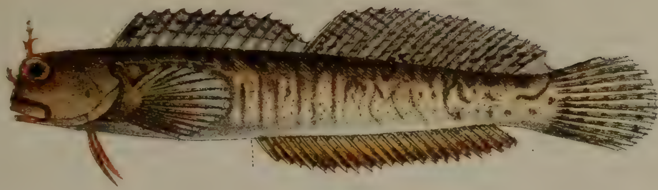


Fig. 2.

Fig. 3.

Bleeker, dir. L. Speigler, del. Lith. v. Emrik & Binger.

Fig. 1. *Salarias striato maculatus* Kner Steind.
Fig. 2. *Paretreplus polyactis* Blkr.
Fig. 3. *Paracara typus* Blkr.

DESCRIPTION

DES ESPÈCES

INSULINDIENNES DU GENRE STIGMATOGOBIUS.

PAR

P. BLEEKER.

STIGMATOGOBIUS Blkr.

Corpus subelongatum antice subcylindraceo-compressum postice compressum. Caput obtusum convexum altius quam latum vel aeque altum ac latum, superne lateribusque squamatum. Nares anteriores tubulatae. Lingua non emarginata. Dentes maxillis pluriseriati fixi acuti; intermaxillares serie externa ceteris longiores; mandibulares serie externa non usque post medium maxillae ramum extensa, serie interna postsymphysiales canini. Dentes pharyngeales pluriseriati acuti leviter curvati. Isthmus valde latus Regiones nuchalis, thoraco-gularis et ventralis squamatae. Squamae trunco ctenoideae, 25 ad 30 in serie longitudinali. Pinnae: dorsales distantes, anterior spinis 6, posterior radiis 9; analis radiis 8 ad 10; ventralis basi infundibuliformis; caudalis obtusa. B. 5.

Lorsque j'établis ce genre (Archiv. néerl. sc. nat. T. IX p. 298) je n'avais examiné de l'espèce type que des individus où la dentition intermaxillaire était peu prononcée. L'examen de nombreux individus et, en partie, d'une taille plus forte que ceux examinés antérieurement, a permis de déterminer plus rigoureusement les caractères du genre. Les dents intermaxillai-

res sont bien positivement plurisériales, bien que celles des rangées internes soient très-petites, Par la dentition le genre s'approche donc des Gobies propres, mais il est distinct par la présence de canines mandibulaires postsymphysiales. Il se fait reconnaître aussi par les grandes écailles du dessus de la tête et du tronc et par la formule des nageoires dorsales et anales.

Je rapporte maintenant au genre Stigmatogobius cinq espèces insulindiennes qui se font nettement distinguer par les caractères exposés dans l'aperçu suivant.

I. Une grande écaile frontale antérieure impaire (caractère générique).

1. Dents mandilaires postérieures de la rangée interne plus grandes que celles des rangées medianes. Corps comprimé antérieurement. Ecailles du dessus de la tête s'avançant entre les orbites. Corps à 28 jusqu'à 30 écailles sur une rangée longitudinale à 8 ou 9 écailles sur une rangée transversale.

A. 8 ou 9 écailles sur une rangée entre le museau et la première dorsale.

a. Mâchoire inférieure plus longue que la supérieure. D. 6—1/7 ou 1/8. A. 1/8 ou 1/9. Flancs à points-noirs nettement dessinés.

1. *Stigmatogobius sadanundio* Blkr.

b. Mâchoires égales. D. 6—1/6 ou 1/7. A. 1/7 ou 1/8. Flancs sans points noirs. Une gouttelette brune sur le haut de la base de la caudale.

2. *Stigmatogobius isognathus* Blkr.

B. 13 écailles sur une rangée entre le museau et la première dorsale.

a. Mâchoire inférieure plus longue que la supèrieure. D. 6—1/7 ou 1/8. A. 1/7 ou 1/8. Corps sans taches ni points noirs. Base de la caudale à tache ronde et brune.

3. *Stigmatogobius singapurensis* Blkr.

II. Dents mandibulaires postérieures de la rangée interne fort petites presque imperceptibles. Corps cylindrique antérieurement. Corps à environ 26 écailles sur une rangée longitudinale, à 6 ou 7 écailles sur une rangée transversale. Mâchoire inférieure plus courte que la supérieure. A. 1/7 ou 1/8.

A. Joues et préopercule squameux. Première dorsale obtuse. Région postventrale inférieure à une rangée de quatre tâches brunes distantes.

4. *Stigmatogobius gastrospilus* Blkr.

B. Joues et préopercule sans écailles. Première dorsale pointue à deux bandelettes obliques noires. Région postventrale inférieure sans taches.

5. *Stigmatogobius amblyrhynchus* Blkr.

Stigmatogobius sadanundio Blkr.

Stigmatog. corpore subelongato compresso, altitudine $3\frac{3}{4}$ ad 4 in ejus longitudine absque, $4\frac{2}{3}$ ad 5 in ejus longitudine cum pinna caudali, latitudine $1\frac{1}{3}$ ad $1\frac{1}{2}$ in ejus altitudine; capite obtuso convexiusculo $4\frac{1}{3}$ ad 5 in longitudine corporis; altitudine capitis 1 et paulo ad $1\frac{2}{5}$, latitudine capitis $1\frac{2}{5}$ ad $1\frac{3}{4}$ in ejus longitudine; linea rostro-frontali convexa vel rostro convexa fronte rectiuscula; oculis subverticalibus lateraliter spectantibus, diametro 3 ad 4 in longitudine capitis, diametro 1 et paulo ad $1\frac{1}{2}$ distantibus; rostro convexo oculo multo breviore apice ante medium oculum vel ante oculi partem inferiorem sito; labiis mediocribus; rictu obliquo; maxilla superiore maxilla inferiore paulo breviore sub medio oculo vel sub oculi dimidio posteriore desinente; dentibus intermaxillaribus serie externa curvatis distantibus subaequilongis, dentibus mandibularibus serie externa intermaxillaribus serie externa paulo brevioribus, serie interna caninis postsymphysialibus erectis curvatis utroque latere 2 vel 1 et utroque ramo maxillae postice 3 vel 4 ceteris conspicue fortioribus; dentibus pharyngealibus, superioribus osse medio, inferioribus serie posteriore ceteris longioribus; squamis rostro, genis et capite inferne nullis, fronte, vertice, operculo et regione postoculari cycloideis magnis frontalibus autem ceteris majoribus; sulco oculo-suprascapulari conspicuo poro orbitae approximato; squamis nucha cycloideis, cetero trunco ctenoideis; squamis rostrum inter et dorsalem anteriorem 8 vel

9 in serie longitudinali anteriore impari ceteris majore totam regionem interocularem tegente; squamis 30 circ. in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis, 8 vel 9 in serie transversa initium pinnae analis inter et dorsalem radiosam; squamis lateribus antice medio et postice subaequimagnis; appendice anali oblonga brevi; pinnis dorsalibus non contiguis; dorsali spinosa acuta corpore multo ad non humiliore spinis 3ª et 4ª ceteris longioribus plus minusve extra membranam productis; dorsali radioso dorsali spinosa non longiore et non ad paulo altiore antice quam postice multo humiliore postice acutangula; pectoralibus obtuse rotundatis non filosis capite paulo brevioribus ad paulo longioribus; ventrali acutiuscula, capite paulo breviore; anali forma, longitudine et altitudine dorsali radiosae subaequali; caudali obtusa oblique convexa capite paulo longiore; colore corpore viridi; iride flava vel viridi margine pupillari aurea; lateribus media altitudine guttulis vel punctis magnis nigris 8 ad 10 distantibus in seriem regularem vel valde irregularem dispositis; pinnis dilute vel profunde roseis; dorsali spinosa fascia lata mediana nigricante vel fusca vel postice macula magna et antice guttula nigricantibus vel fuscis; dorsali radiosa et anali punctis magnis vel guttulis parcis sparsis nigris; caudali punctis magnis nigris sat numerosis in series transversas irregulares dispositis, basi vulgo guttulis aliquot majoribus; dorsali radiosa et anali insuper guttulis sparsis flavis.

B. 5. D. 6—1/7 vel 6—1/8. P. 18. V. 1—5. 5/1. A. 1/8 vel 1/9. C. 10/15/9 circiter.

Syn. *Gobius sadanundio* HB., Fish. Gang. p. 5?, 366; Blkr Verh. Gen. XXV Nal. ichth. Beng. p. 102 tab. 2 fig. 2; Günth., Cat. Fish. III p. 29; Day, Fish. Ind. p. 296 tab. 63 fig. 10.

Gobius pleurostigma Blkr, Verh. Bat. Gen. XXII Blenn. Gobius p. 28; Günth., Cat. Fish. III p. 43.

Stigmatogobius pleurostigma Blkr, Esq. Syst. Gob. Arch. néerl. sc. nat. IX p. 323.

Puntang Javan.

Hab. Singapura; Java (Surabaya), in aquis fluvio-marinis.

Longitudo 42 speciminum 38‴ ad 85‴.

Rem. Un nouvel examen des huit individus du Bengale que je possède du Gobius sadanundio et de mes 33 spécimens de Java du Gobius pleurostigma, apprend que ce dernier n'est que une variation locale du premier, à gouttelettes ou points noirs des flancs disposés sur une seule rangée régulière. La première dorsale dans cette variation porte souvent une gouttelette noire vers le milieu de la première épine et souvent aussi une large bande longitudinale brunâtre ou noirâtre, tandis que les individus du Bengale, comme aussi un spécimen de Singapore, ont la première dorsale seulement marquée d'une large tache noirâtre occupant la partie postérieure de la nageoire. Les gouttelettes noirâtres de la seconde dorsale, sur les individus de Calcutta, sont moins rares que sur ceux de Java.

L'espèce est dite habiter aussi les îles Viti (Kanathia).

Stigmatogobius isognathus Blkr.

Stigmatog. corpore elongato compresso, altitudine 5 circ. in ejus longitudine absque, $6\frac{1}{2}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis $1\frac{2}{5}$ circ. in ejus altitudine; capite valde obtuso convexo 4 circ. in longitudine corporis absque, $5\frac{2}{5}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{1}{2}$ circ., latitudine capitis $1\frac{3}{4}$ circ. in ejus longitudine; linea rostro-frontali convexa; oculis oblique sursum spectantibus, diametro $3\frac{3}{4}$ circ. in longitudine capitis, diametro $\frac{1}{2}$ circ. distantibus; rostro valde convexo oculo breviore apice ante oculi marginem inferiorem sito; labiis mediocribus; maxillis subaequilongis, superiore sub medio oculo desinente; dentibus intermaxillaribus serie externa curvatis mediis ceteris longioribus postrorsum et antrorsum longitudine sensim decrescentibus; dentibus mandibularibus serie externe subaequilongis, serie externa serie media longioribus postsymphysialibus et laterali postico caninis curvatis; genis rugis longitudinalibus conspicuis; sulco oculo-suprascapulari conspicuo poro majore orbitae approximato; capite superne post oculos squamato, ceterum (operculo forsan excepto) alepidoto; squamis rostrum inter et dorsalem anteriorem 9 circ. in serie longitudinali; squamis 28? in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin

9 in serie longitudinali anteriore impari ceteris majore totam regionem interocularem tegente; squamis 30 circ. in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis, 8 vel 9 in serie transversa initium pinnae analis inter et dorsalem radiosam; squamis lateribus antice medio et postice subaequimagnis; appendice anali oblonga brevi; pinnis dorsalibus non contiguis; dorsali spinosa acuta corpore multo ad non humiliore spinis 3ª et 4ª ceteris longioribus plus minusve extra membranam productis; dorsali radioso dorsali spinosa non longiore et non ad paulo altiore antice quam postice multo humiliore postice acutangula; pectoralibus obtuse rotundatis non filosis capite paulo brevioribus ad paulo longioribus; ventrali acutiuscula, capite paulo breviore; anali forma, longitudine et altitudine dorsali radiosae subaequali; caudali obtusa oblique convexa capite paulo longiore; colore corpore viridi; iride flava vel viridi margine pupillari aurea; lateribus media altitudine guttulis vel punctis magnis nigris 8 ad 10 distantibus in seriem regularem vel valde irregularem dispositis; pinnis dilute vel profunde roseis; dorsali spinosa fascia lata mediana nigricante vel fusca vel postice macula magna et antice guttula nigricantibus vel fuscis; dorsali radiosa et anali punctis magnis vel guttulis parcis sparsis nigris; caudali punctis magnis nigris sat numerosis in series transversas irregulares dispositis, basi vulgo guttulis aliquot majoribus; dorsali radiosa et anali insuper guttulis sparsis flavis.

B. 5. D. 6—1/7 vel 6—1/8. P. 18. V. 1—5. 5/1. A. 1/8 vel 1/9. C. 10/15/9 circiter.

Syn. *Gobius sadanundio* HB., Fish. Gang. p. 52, 366; Blkr Verh. Gen. XXV Nal. ichth. Beng. p. 102 tab. 2 fig. 2; Günth., Cat. Fish. III p. 29; Day, Fish. Ind. p. 296 tab. 63 fig. 10.

Gobius pleurostigma Blkr, Verh. Bat. Gen. XXII Blenn. Gobius p. 28; Günth., Cat. Fish. III p. 43.

Stigmatogobius pleurostigma Blkr, Esq. Syst. Gob. Arch. néerl. sc. nat. IX p. 323.

Puntang Javan.

Hab. Singapura; Java (Surabaya), in aquis fluvio-marinis.

Longitudo 42 speciminum 38‴ ad 85″.

Rem. Un nouvel examen des huit individus du Bengale que je possède du Gobius sadanundio et de mes 33 spécimens de Java du Gobius pleurostigma, apprend que ce dernier n'est que une variation locale du premier, à gouttelettes ou points noirs des flancs disposés sur une seule rangée régulière. La première dorsale dans cette variation porte souvent une gouttelette noire vers le milieu de la première épine et souvent aussi une large bande longitudinale brunâtre ou noirâtre, tandis que les individus du Bengale, comme aussi un spécimen de Singapore, ont la première dorsale seulement marquée d'une large tache noirâtre occupant la partie postérieure de la nageoire. Les gouttelettes noirâtres de la seconde dorsale, sur les individus de Calcutta, sont moins rares que sur ceux de Java.

L'espèce est dite habiter aussi les îles Viti (Kanathia).

Stigmatogobius isognathus Blkr.

Stigmatog. corpore elongato compresso, altitudine 5 circ. in ejus longitudine absque, $6\frac{1}{2}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis $1\frac{2}{5}$ circ. in ejus altitudine; capite valde obtuso convexo 4 circ. in longitudine corporis absque, $5\frac{2}{5}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{1}{2}$ circ., latitudine capitis $1\frac{3}{4}$ circ. in ejus longitudine; linea rostro-frontali convexa; oculis oblique sursum spectantibus, diametro $3\frac{3}{4}$ circ. in longitudine capitis, diametro $\frac{1}{2}$ circ. distantibus; rostro valde convexo oculo breviore apice ante oculi marginem inferiorem sito; labiis mediocribus; maxillis subaequilongis, superiore sub medio oculo desinente; dentibus intermaxillaribus serie externa curvatis mediis ceteris longioribus postrorsum et antrorsum longitudine sensim decrescentibus; dentibus mandibularibus serie externe subaequilongis, serie externa serie media longioribus postsymphysialibus et laterali postico caninis curvatis; genis rugis longitudinalibus conspicuis; sulco oculo-suprascapulari conspicuo poro majore orbitae approximato; capite superne post oculos squamato, ceterum (operculo forsan excepto) alepidoto; squamis rostrum inter et dorsalem anteriorem 9 circ. in serie longitudinali; squamis 28? in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin

pinnae caudalis, 8 vel 9? in serie transversa initium pinnae analis inter et dorsalem radiosam; squamis mediis lateribus et caudalibus subaequimagnis; appendice anali elongata gracili; pinnis dorsalibus non contiguis; dorsali spinosa acutiuscula corpore multo humiliore, spinis 2ª et 3ª ceteris longioribus; dorsali radiosa dorsali spinosa altiore, antice quam postice humiliore, postice corpore non humiliore angulata; pectoralibus obtuso rotundatis, filosis, capite longioribus; ventrali acutiuscule rotundata capite non longiore; anali forma longitudine et altitudine dorsali radiosae subaequali; caudali rotundata capite longiore; colore corpore superne fuscescente-olivaceo; inferne dilutiore; iride violascente; fascia oculo-postmaxillari verticali fuscescente; pinnis, ventrali tota fere fusca, ceteris membrana hyalinis, radiis roseis vel aurantiacis; dorsali spinosa superne postice fusca, dorsali radiosa singulis radiis punctis 4 ad 6 fuscis series longitudinales, caudali singulis radiis punctis vel striis geminis 8 ad 10 fuscis series transversas efficientibus; caudali basi superne guttula fusca.

B. 5. D. 6—1/7. P. 15 vel 16. V. 1/5. 5/1. A. 1/7 vel 1/8
C 4 (13/4 circ.

Hab. Singapura; in mari.

Longitudo speciminis unici 48‴.

Rem. Cette espèce se fait aisément distinguer du sadanundio par la longueur égale des mâchoires, par un rayon de moins tant à la dorsale postérieure qu'à l'anale, par l'absence de points noirs sur les flancs, par la présence d'une tache brune sur le haut de la base de la caudale, par la forme plus allongée du corps et le profil plus convexe de la tête, etc.

Stigmatogobius singapurensis Blkr.

Stigmatog. corpore subelongato compresso, altitudine 4 circ. in ejus longitudine absque, 5 circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; capite obtuso convexiusculo $3\frac{3}{5}$ in longitudine corporis absque, $4\frac{2}{5}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{2}{5}$ circ., latitudine capitis $1\frac{4}{5}$ circ. in ejus longitudine; linea rostro-frontali convexa; oculis latera-

liter spectantibus, diametro $3\frac{1}{2}$ circ. in longitudine capitis, diametro 1 fere distantibus; rostro convexiusculo, oculo multo breviore, apice ante medium oculum sito; labiis mediocribus; rictu obliquo; maxilla superiore maxilla inferiore paulo breviore, sub medio oculo desinente; dentibus intermaxillaribus serie externa conicis curvatis distantibus mediocribus subaequilongis dentibus mandibularibus serie externa seriebus mediis longioribus symphysiali utroque latere canino erecto, serie interna postice 2 vel 3 inaequilongis dentibus seriebus mediis longioribus; genis rugulis longitudinalibus conspicuis; sulco oculo-suprascapulari poro conspicuo nullo; squamis capite superne et operculo, nucha, regione thoraco-gulari et ventre cycloideis, lateribus et cauda ctenoideis; squamis 13 circ. in serie longitudinali rostrum inter et dorsalem spinosam, squama interorbitali anteriore impari; squamis 30 circ. in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis, 8 vel 9 in serie transversa initium pinnae analis inter et dorsalem radiosam; squamis lateribus medio et cauda subaequimagnis squamis lateribus antice majoribus; appendice anali conica brevi; pinnis dorsalibus non contiguis corpore humilioribus; dorsali spinosa acutiuscula spinis 2ª et et 3ª ceteris longioribus; dorsali radiosa dorsali spinosa altiore obtusa postice quam antice non altiore; pectoralibus obtuse rotundatis non filosis capite paulo brevioribus; ventrali obtusiuscula pectorali paulo vel non breviore; anali forma longitudine et altitudine dorsali radiosae subaequali; caudali obtusa convexa capite non longiore; colore corpore superne olivascente inferne dilutiore; iride superne viridi, inferne aurea; capite corporeque vittis vel maculis conspicuis nullis; pinnis flavescente-hyalinis, dorsali spinosa medio fusca, dorsali radiosa, anali et caudali radiis punctis fuscescentibus variegatis, caudali media basi insuper macula majore rotunda fusca.

B. 5. D. 6—1/7 vel 6—1/8. P. 17. V. 1/5.5/1. A. 1/7 vel 1/8. C. 6/15/5 circ.

Hab. Singapura, in aquis fluvio-marinis.

Longitudo speciminis unici 47‴.

Rem. Le Stigmatogobius singapurensis a la forme trapue du

corps du sadanundio, mais on n'y voit pas les points noirs des flancs et il est différencié encore par son profil plus convexe, par un rayon de moins à l'anale, par la tache brane sur le milieu de la base de la caudale, et surtout par le nombre plus considérable d'écailles entre le museau et la première dorsale.

Stigmatogobius gastrospilus Blkr.

Stigmatog. corpore elongato antice subcylindraceo postice compresso, altitudine 5 fere in ejus longitudine absque, 6 et paulo in ejus longitudine cum pinna caudali; capite obtuso convexo 4 et paulo in longitudine corporis absque, 5 et paulo in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine et latitudine capitis $1\frac{1}{3}$ ad $1\frac{2}{5}$ in ejus longitudine; linea rostro frontali convexa; oculis oblique sursum spectantibus, diametro $3\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{4}$ in longitudine capitis, diametro $\frac{1}{3}$ circ. distantibus; rostro valde obtuso convexo oculo breviore, apice paulo infra oculi marginem inferiorem sito; labiis carnosis; rictu parum obliquo; maxilla superiore maxilla inferiore vix longiore sub oculi parte posteriore desinente; dentibus maxillis serie externa seriebus ceteris longioribus, mandibularibus serie interna caninis postsymphysialibus erectis curvatis exceptis, omnibus parvis; genis rugulis longitudinalibus conspicuis; sulco oculo suprascapulari poro majore orbitae approximato; genis et praeoperculo squamatis; squamis capite, nucha, regione thoraco-gulari et ventre cycloideis, lateribus caudaque ctenoideis; squamis 8 circ. in serie longitudinali regionem interocularem inter et dorsalem spinosam, 26 circ. in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis, 7 in serie transversa initium pinnae analis inter et dorsalem radiosam; squamis mediis lateribus caudaque subaequimagnis squamis lateribus antice majoribus; appendice anali conica brevi; pinnis dorsalibus non contiguis; dorsali spinosa rotundata corpore non humiliore spinis mediis ceteris longioribus; dorsali radiosa dorsali spinosa paulo altiore obtusa postice angulata; pectoralibus et ventralibus rotundatis capite brevioribus, pectoralibus non vel subfilosis; anali forma et longitudine dorsali radiosa subaequali eaque paulo humiliore; caudali obtuse rotundata capite

paulo longiore; colore corpore superne viridi, inferne dilutiore; squamis corpore plurimis macula parva fusca; regione postventrali inferne maculis 4 oblongis nigris majoribus; pinnis, ventralibus violaceis, ceteris aurantiacis; dorsali spinosa postice macula coerulea; dorsali radiosa, anali et caudali singulis radiis punctis 4 ad 7 fuscis variegatis.

B 5. D. 6—1/7 vel 6—1/8. P. 14. V. 1/5.5/1. A. 1/7 vel 1/8. C. 6/13/5 circ.

Syn. *Gobius gastrospilos* Blkr, Diagn. n. vischs. Batav., Nat. T. Ned. Ind. IV p. 477; Günth, Cat. Fish. III p. 43.

Blodokt Mal. Bat.

Hab. Java (Batavia); in mari.

Longitudo speciminis unici 40'''.

Rem. Cette espèce et la suivante se distinguent des trois précédentes par la forme cylindrique de la partie antérieure du tronc, par un nombre moindre des rangées d'écailles transversales et longitudinales et par les fort petites dents mandibulaires de la rangée interne. Les caractères spécifiques du gastrospilus se trouvent dans l'écaillure de la joue et du préoper-cule, dans la forme obtuse de la première dorsale et dans les quatres taches brunes postventrales.

Stigmatogobius amblyrhynchus Blkr.

Stigmatogob. corpore elongato antice subcylindraceo postice compresso, altitudine $4\frac{1}{3}$ ad $4\frac{1}{2}$ in ejus longitudine absque, $5\frac{1}{2}$ ad in ejus longitudine cum pinna caudali; capite obtuso convexo 4 circ. in longitudine corporis absque, 5 circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine et latitudine capitis $1\frac{1}{3}$ ad $1\frac{1}{5}$ in ejus longitudine; linea rostro-frontali convexa; oculis oblique sursum spectantibus, diametro 3 et paulo ad $3\frac{1}{2}$ in longitudine capitis, diametro $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{4}$ distantibus; rostro valde obtuso convexo, oculo breviore, apice infra oculi marginem inferiorem sito; labiis carnosis; rictu parum obliquo; maxilla superiore maxilla inferiore vix longiore, sub oculi parte posteriore desinente; dentibus mandibularibus serie interna, caninis postsymphysialibus erectis curvatis exceptis, omnibus

parvis; genis rugulis longitudinalibus conspicuis; sulco oculo-suprascapulari pone majore orbitae approximato; genis et praeoperculo alepidotis; squamis capite, nucha, regione thoraco-gulari et ventre cycloideis, lateribus caudaque ctenoideis; squamis 6 vel 7 in serie longitudinali regionem interocularem inter et pinnam dorsalem radiosam, 26 circ. in serie longitudinali angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis, 7 in serie transversa initium pinnae analis inter et dorsalem radiosam; squamis mediis lateribus caudaque subaequimagnis squamis lateribus antice majoribus; appendice anali conica acuta vel obtusa; pinnis dorsalibus distantibus; dorsali spinosa acuta corpore humiliore ad altiore, spinis 2ª et 3ª plus minusve extra membranam productis; dorsali radiosa corpore paulo ad non humiliore postice angulata; pectoralibus obtusiuscule rotundatis non vel vix filosis capite paulo ad non longioribus; ventrali rotundata capite non ad paulo longiore; anali forma altitudine et longitudine dorsali radiosae subaequali; caudali obtuse rotundata capite longiore; colore corpore superne profunde viridi vel olivaceo, inferne dilutiore; iride aureo-viridi; dorso lateribusque maculis parvis irregularibus fuscis variegata; pinnis flavescentibus; dorsali spinosa fasciis vel vittis latis 2 obliquis nigris; dorsali 2ª et caudali radiis punctis fuscis variegatis; ventrali interdum violascente.

B. 5. D. 6—1/7 vel 6—1/8. P. 14 vel 15. V. 1/5.5/1. A. 1/7 vel 1/8. C. 7/13/5 circ.

Hab. Java (Batavia, Tjisekat) in fluviis et aquis fluvio-marinis.

Longitudo 6 speciminum 38‴ ad 45‴.

Rem. Cette cinquième espèce du genre se fait reconnaître par l'absence d'écaillure sousoculo-préoperculaire, par la forme pointue et les bandelettes noires de la première dorsale, par l'absence de taches postventrales foncées et par son museau fort obtus.

La Haye, Février 1877.

SUR LES ESPÈCES DU GENRE

HYPOPHTHALMICHTHYS Blkr, CEPHALUS Bas (nec Bl. nec al.).

PAR

P. BLEEKER.

Dans un article intitulé: "Mémoire sur les Cyprinoïdes de Chine" (Verhand. Koninkl. Akad. Wetensch. 1871 Dl. XII), j'ai décrit et fait figurer deux espèces du genre Hypophthalmichthys sous les noms de molitrix et nobilis, sur des individus de Chine conservés au Muséum du Jardin des plantes. Les poissons avaient été étiquettés : Hypophthalmichthys Dabryi Guich. et Hypophthalmichthys Simoni Guich., mais croyant y reconnaître les Leuciscus molitrix et nobilis Rich je les décrivis comme des représentants de ces deux espèces. Et, en effet, en ne consultant que les descriptions et les figures de Richardson, prises sur des individus en herbier, et les diagnoses des deux formes dans le Catalogue of Fishes, il aurait été hasardé d'y voir des espèces inédites.

Tous récemment, dans un envoi de poissons de Chine, dont l'Administration du Musé Zoologique de Hambourg a bien voulu me confier la détermination, je trouvai deux espèces dont l'étude et la comparaison avec les descriptions et les figures du Mémoire sur les Cyprinoïdes m'ont fait revenir de mon opinion sur les Hypophthalmichthys du Musée de Paris. Le crois avoir retrouvé dans les poissons du Museum de Hambourg le vrai

Hypophthalmichthys molitrix et le vrai Hypophthalmichthys nobilis et devoir reclamer pour les deux espèces du mémoire susdit les noms de Dabryi et de Simoni proposés avant moi par Guichenot.

Le genre est des plus remarquables, non seulement par sa physionomie à yeux postérieurs et à abdomen comprimé en lame de couteau, mais aussi par l'appareil pharyngien à muqueuse gonflée et développée en larges plis spongieux, à os fénestré et à dents unisériales en forme d'ongles humains.

Les espèces sont remarquables aussi par les caractères que présentent l'appareil branchial, la forme et la dentition des os pharyngiens et la forme de la partie préventrale du ventre et se font distinguer encore par la longueur relative de la tête, des mâchoires et des pectorales, par la formule de l'écaillure et des rayons des nageoires, etc.

Les quatre espèces que j'ai pu examiner sont différencées par les caractères suivants.

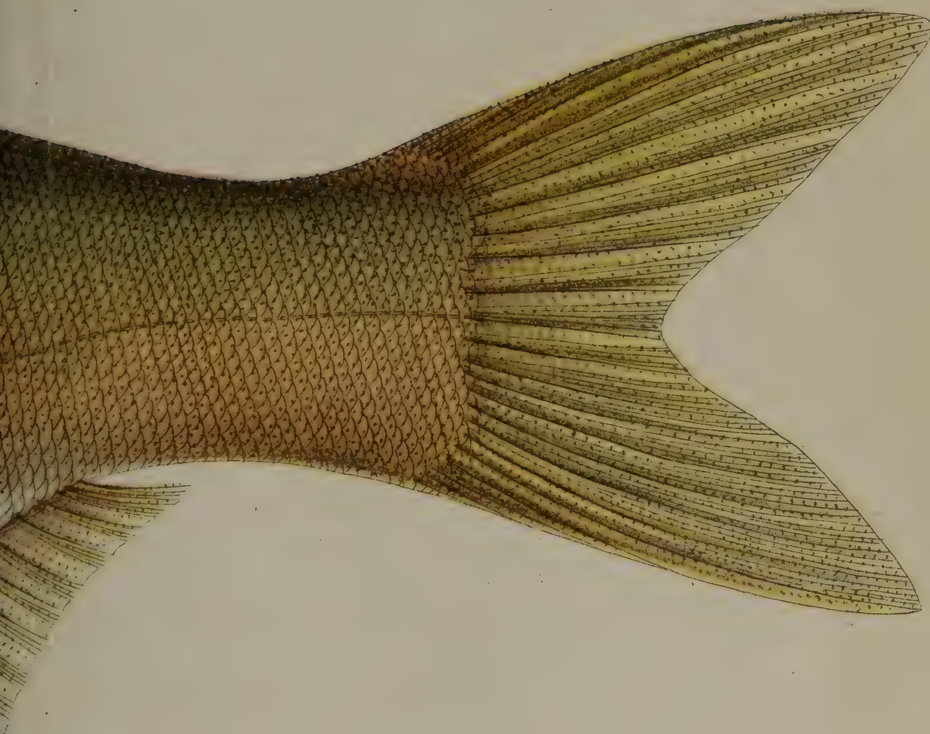
I. Appendices internes de chaque arc branchial plus longs que les branchies et réunis en deux lames spongieuses. Os pharyngiens à de nombreuses stries transverses divisées en deux groupes par un sillon médian. Ventre comprimé en carène entièrement squameuse en avant et en arrière des ventrales; ces dernières implantées latéralement bien au-dessus de profil ventral. Ligne latérale beaucoup plus rapprochée des ventrales que de la dorsale. Environ 30 rangées d'écailles entre la ligne latérale et la dorsale, 13 à 15 entre la ligne latérale et l'insertion des ventrales.

a. Yeux non recouverts par les préorbitaires ou par les susorbitaires. Mâchoire supérieure plus longue que l'inférieure $4\frac{1}{3}$ fois dans la longueur de la tête. V. 2/7.

1. *Hypophthalmichthys molitrix* Blkr = Leuciscus molitrix Rich.

. Yeux recouverts en dessus par les préorbitaires et les susorbitaires. Mâchoire supérieure plus courte que l'inférieure, 4 fois dans la longueur de la tête. V. 2/6.

2. *Hypophthalmichthys Dabryi* Guich. = H. molitrix Blkr Mém. Cypr. Chine.



Chromolith. v. Emrik & Binger, Haarlem.

Hypophthalmichthys molitrix et le vrai Hypophthalmichthys nobilis et devoir reclamer pour les deux espèces du mémoire susdit les noms de Dabryi et de Simoni proposés avant moi par Guichenot.

Le genre est des plus remarquables, non seulement par sa physionomie à yeux postérieurs et à abdomen comprimé en lame de couteau, mais aussi par l'appareil pharyngien à muqueuse gonflée et développée en larges plis spongieux, à os fénestré et à dents unisériales en forme d'ongles humains.

Les espèces sont remarquables aussi par les caractères que présentent l'appareil branchial, la forme et la dentition des os pharyngiens et la forme de la partie préventrale du ventre et se font distinguer encore par la longueur relative de la tête, des mâchoires et des pectorales, par la formule de l'écaillure et des rayons des nageoires, etc.

Les quatre espèces que j'ai pu examiner sont différencées par les caractères suivants.

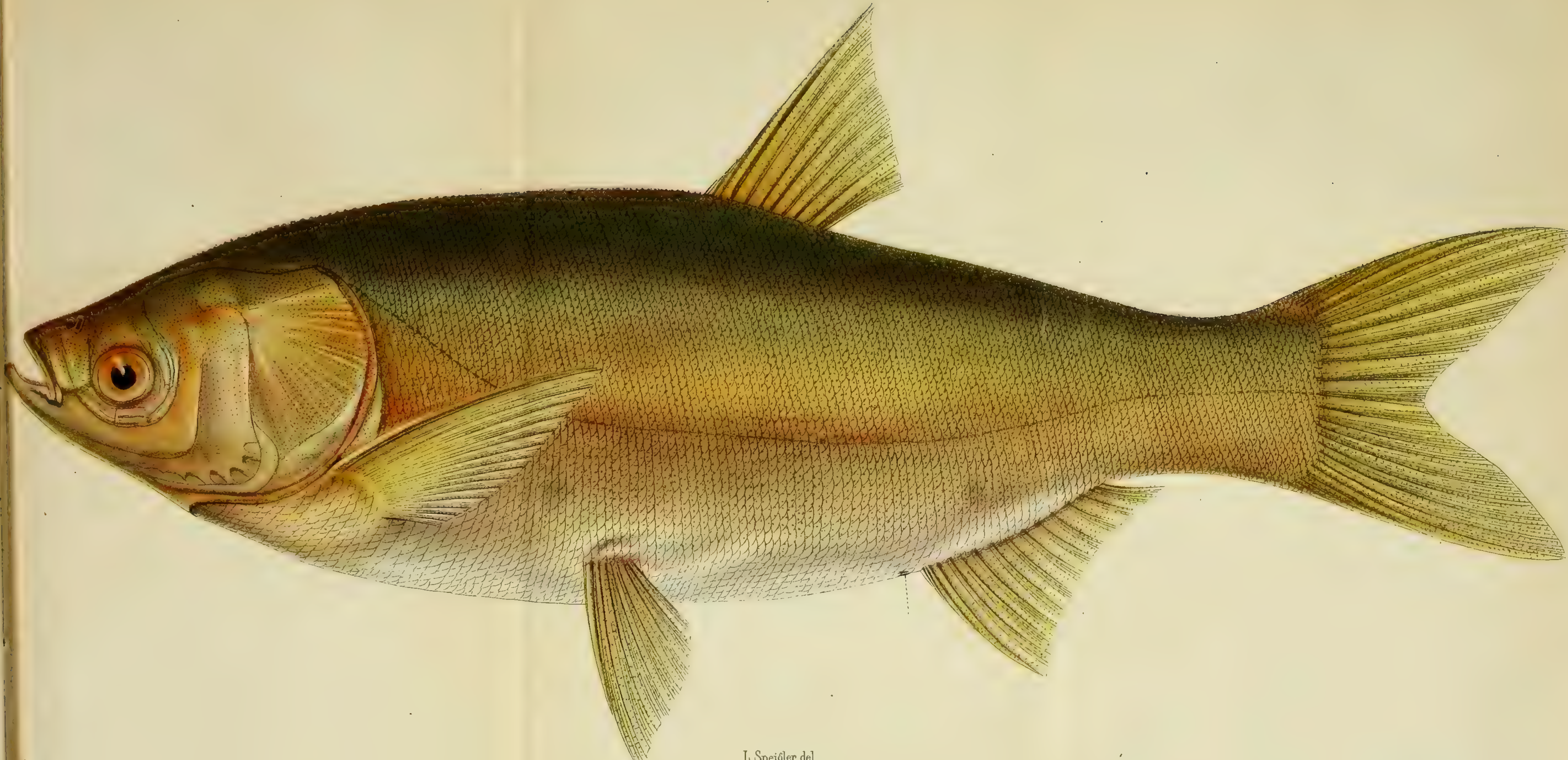
I. Appendices internes de chaque arc branchial plus longs que les branchies et réunis en deux lames spongieuses. Os pharyngiens à de nombreuses stries transverses divisées en deux groupes par un sillon médian. Ventre comprimé en carène entièrement squameuse en avant et en arrière des ventrales; ces dernières implantées latéralement bien au-dessus de profil ventral. Ligne latérale beaucoup plus rapprochée des ventrales que de la dorsale. Environ 30 rangées d'écailles entre la ligne latérale et la dorsale, 13 à 15 entre la ligne latérale et l'insertion des ventrales.

a. Yeux non recouverts par les préorbitaires ou par les susorbitaires. Mâchoire supérieure plus longue que l'inférieure $4\frac{1}{3}$ fois dans la longueur de la tête. V. 2/7.

1. *Hypophthalmichthys molitrix* Blkr = Leuciscus molitrix Rich.

. Yeux recouverts en dessus par les préorbitaires et les susorbitaires. Mâchoire supérieure plus courte que l'inférieure, 4 fois dans la longueur de la tête. V. 2/6.

2. *Hypophthalmichthys Dabryi* Guich. = H. molitrix Blkr Mém. Cypr. Chine.



L. Speigler. del

P. Bleeker. dir.

Chromolith. v. Emrik & Binger. Haarlem.

Hypophthalmichthys molitrix Blkr.

II. Appendices internes des arcs branchiaux libres non réunis en lames. Os pharyngiens fénestrés en avant et en arrière les dents. Dents pharyngiennes lisses sans stries transverses. Ligne latérale un peu seulement plus rapprochée des ventrales que de la dorsale. Environ 25 rangées d'écailles entre la ligne latérale et la dorsale.

a. Ventre comprimé en carène en avant des ventrales. Ventrales implantées latéralement bien au-dessus du profil ventral. Yeux recouverts en dessus par les préorbitaires et les susorbitaires. Mâchoire supérieure $3\frac{1}{2}$ fois dans la longueur de la tête.

3. *Hypophthalmichthys Simoni* Guich. = H. nobilis Blkr. Mém. Cypr. Chine.

b. Ventre en avant des ventrales à profil large, non comprimé en carène. Ventrales implantées inférieurement, au profil ventral. Yeux non recouverts par les préorbitaires ou les susorbitaires. Mâchoire superieure presque pas plus de 3 fois dans la longueur de la tête.

4. *Hypophthalmichthys nobilis* Blkr, Ichth. Arch. Ind. Prodr. (nec. Mém. Cypr. Chine.).

Hypophthalmichthys molitrix Blkr, Ichth. Arch. Ind. Prodr. II Cypr. p. 283 (nec Mém. Cypr. Chin. p. 83 tab. 12 fig. 4); Günth., Cat. Fish. VII p. 298. — Tab. I.

Hypophth. corpore oblongo compresso, altitudine $3\frac{1}{7}$ circ. in ejus longitudine absque, 4 fere in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis 2 circ. in ejus altitudine; capite acuto $3\frac{2}{3}$ ad $3\frac{3}{4}$ in longitudine corporis absque, $4\frac{3}{5}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altutidine capitis 1 et paulo, latitudine capitis $1\frac{3}{4}$ circ. in ejus longitudine; linea rostro-dorsali nuchae convexa capite convexiuscula ante nares tantum concaviuscula; linea interoculari valde convexa; osse supraorbitali non usque supra oculum producto, triangulari apice sursum directo; oculis posteris aeque longis circ. ac latis, diametro marginem liberum inter $6\frac{1}{2}$ in longitudine capitis, 4 circ. in capitis parte postoculari diametris 3 circ. distantibus; rostro

acuto depresso oculi diametro $1\frac{1}{2}$ circ. longiore, apice supra oculi marginem superiorem sito; naribus linea rostro frontali approximatis longe ab oculo remotis, posterioribus anterioribus majoribus; osse praeorbitali subpentagono angulis obtuse rotundatis, longiore quam alto, dimidio inferiore crista longitudinali percurso; osse suborbitali 2° quadrangulari plus duplo longiore quam alto antice quam postice vix altiore; osse suborbitali 3° elongato triplo circ. longiore quam lato margine inferiore convexo; maxillis acie tenuibus; maxilla superiore maxilla superiore maxilla inferiore paulo longiore, vix protractili, ante oculum desinente $4\frac{1}{3}$ circ. in longitudine capitis; maxilla inferiore cochleariformi symphysi tuberculo subhamata, ramis latis sat distantibus margine interne subparallelis; labiis tenuibus; sulco infralabiali brevi; praeoperculo non striato limbo inferiore lacunoso: operculo radiatim rugoso minus duplo altiore quam lato, margine postero-inferiore rectiusculo vel convexiusculo; ossibus pharyngealibus gracilibus basi planis post dentes tantum fenestratis; dentibus pharyngealibus uniseriatis 4/4 apice quam basi non gracilioribus valde compressis incisivis rotundatis facie interne concaviusculis utroque latere rugulis numerosis primis transversis, facie externe convexis laevibus obtuse carinatis longitudinaliter subbisulcatis; processubus arcuum branchialium anterioribus numerosissimis elongatis ramis branchialibus multo longioribus in laminam antice spongiosam postice laevem coalitis; apertura branchialis non usque sub oculo extensa; membrana interbranchiali latissima; osse scapulari obtuse rotundato; ventre ante pinnas ventrales acutiuscule post ventrales acutissime carinato, carina ante et post ventrales continua cauda parte libera aeque longa circ. ac postice alta; squamis striis longitudinalibus nullis, angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 130 circ., infra lineam lateralem in series 115 circ., os scapulare inter et basin pinnae caudalis in series 95 circ. transversas dispositis; squamis 46 circ. in serie transversa pinnas ventrales inter et initium pinnae dorsalis quarum 30 circ. supra, 15 infra lineam lateralem; squamis occiput inter et pinnam dorsalem 70 circ. in serie longitudinali; linea laterali valde curvata, pinnae ventrali multo magis quam lineae dorsali approximata sin-

gulis squamis tubulo simplice notata, antice valde declivi; pinna dorsali medio circ. ventralem inter et analem sita, radio 1° medio oculum inter et basin pinnae caudalis inserto, corpore multo humiliore, duplo circ. altiore quam basi longa, acuta, vix emarginata; pinnis pectoralibus acutis capite absque rostro vix longioribus, basin ventralium non superantibus, radio 1° valido osseo; ventralibus lateraliter insertis a carina ventris remotis acutis capitis parte postoculari non longioribus, longe ante analem desinentibus; anali mox post anum incipiente dorsali sat multo longiore et sat multo humiliore, longiore quam antice alta, acuta, emarginata; caudali lobis acutis vel acutiusculis capite absque rostro non brevioribus; colore corpore superne viridi, lateribus aureo-viridi vel aureo-argenteo, inferne argenteo; iride flavescente; pinnis flavescentibus plus minusve fusco arenatis; anali basi aurantiaca.

B. 3. D. 3/7 vel 3/8. P. 1/18. V. 2/7. A. 3/11 vel 3/12. C. 1/17/1 et lat. brev.

Syn. *Leuciscus molitrix* Val., Poiss. XVII p. 268; Rich., Ichth. Chin. Rep. 15^h^ meet. Brit. Assoc. p. 295.

Leuciscus hypophthalmichthys Gr. Rich., Ichth. Voy. Sulphur p. 139 tab. 63 fig. 1.

Cephalus mantschuricus Bas., Ichth. Chin. hor., N. mém. Soc. Nat. Moscou X p. 235 tab 7 fig. 3.

Hypophthalmichthys mantschuricus Blkr, Ichth. Arch. Ind. Prodr. II. Cypr. p. 283.

Hab. Shangai; in fluviis.

Longitudo speciminis descripti et depicti 365‴.

Rem. L'espèce fut le premier indiquée par Valenciennes d'après un dessin, mais sa description se borna aux phrases suivantes: „il a les écailles petites, la dorsale courte et haute de l'avant, l'anale plus étendue" (que les Leuciscus chevanella et molitorella également établis sur des peintures chinoises). „Le dos est vert rembruni, le ventre argenté, les lèvres roses, l'opercule lavé de rouge: toutes les nageoires sont teintées de rose."

Il aurait été impossible de reconnaître dans ces phrases ni le genre ni l'espèce, mais Richardson a pu constater, par les dessins chinois à sa disposition, que le molitrix est identique avec le Leuciscus hypophthalmus Gr.

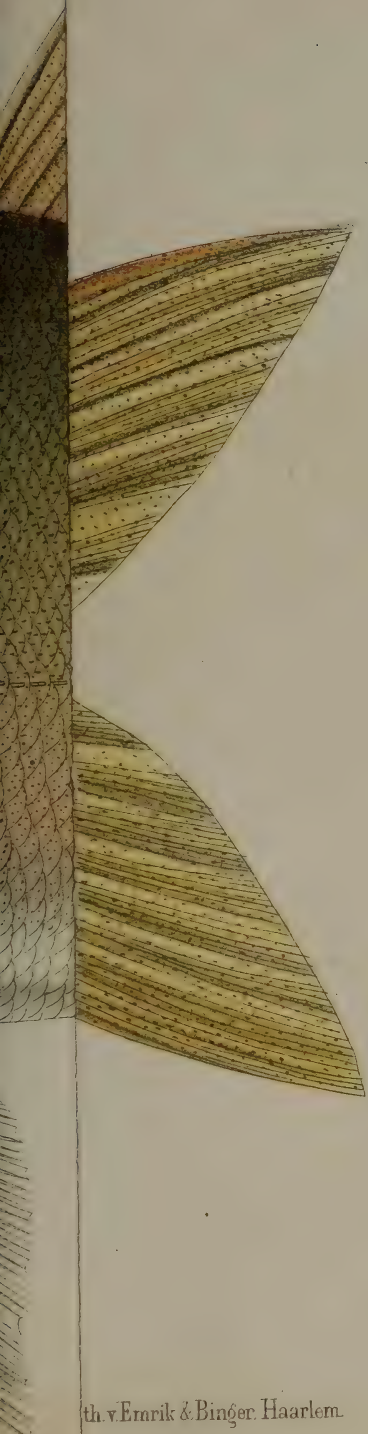
La description et la figure publiées par Richardson furent prises sur un individu en herbier qui ne permit pas une détermination rigoureuse des proportions. La formule des nageoires est donnée par Richardson = D. 13. P. 17. V. 8. A. 17 et reproduite comme telle par M. Günther d'apres le type même du Leuciscus hypophthalmus. — Basilewski publia de nouveau la même espèce sous le nom de Cephalus mantschuricus. Sa figure, bien que laissant à désirer, fait assez bien reconnaître le molitrix.

J'ai déjà dit que l'espèce, décrite et figurée dans le Mémoire sur les Cyprinoides de Chine comme représentant le molitrix, doit être distincte, comme l'avait déjà indiqué Guichenot, qui la nomma Dabryi sans toutefois la décrire.

L'espèce décrite par M. Steindachner sous le nom de Cephalus hypophthalmus et par Kner sous le nom d'Hypophthalmichthys mandschuricus n'est pas non plus le molitrix mais le nobilis.

Outre les caractères indiqués ci-dessus, le molitrix paraît se distinguer encore du Dabryi par plusieurs autres, mais il est possible que les différences ne sont pas, en partie au-moins, que des caractères individuels ou d'âge. Chez les individus du Dabryi, mésurant en longueur 230''' et 265''' et dont par conséquent le plus grand est d'un decimètre plus petit que l'individu décrit ci-dessus, je trouvai la tête un peu plus longue ($3\frac{3}{7}$ à $3\frac{1}{2}$ dans la longueur sans la caudale) et moins large ($2\frac{1}{3}$ à $2\frac{1}{4}$ fois dans sa longueur), les yeux plus grands (5 fois dans la longueur de la tête et 3 fois dans la partie postoculaire de la tête), la région interoculaire moins large ($1\frac{3}{4}$ à 2 diamètres de l'oeil), la mâchoire supérieure un peu plus courte que l'inférieure et ne mésurant que 4 fois dans la longueur de la tête, l'opercule deux fois plus haut que large, l'orifice branchial descendant jusque sous les yeux, et la formule des rayons assez différente : = D. 2/8 ou 2/9. V. 2/6. A. 3/13 ou 3/14, ce qui donne un rayon de plus à la dorsale, un de moins aux ventrales et deux de plus à l'anale. La formule de l'anale cependant du molitrix, donnée par Richardson, étant = 17, il se pourrait bien que celle-ci est sujette à des variations, mais celle des ventrales pourrait bien être de valeur spécifique.

TAB. II.



th. v. Emrik & Binger. Haarlem.

La description et la figure publiées par Richardson furent prises sur un individu en herbier qui ne permit pas une détermination rigoureuse des proportions. La formule des nageoires est donnée par Richardson = D. 13. P. 17. V. 8. A. 17 et reproduite comme telle par M. Günther d'apres le type même du Leuciscus hypophthalmus. — Basilewski publia de nouveau la même espèce sous le nom de Cephalus mantschuricus. Sa figure, bien que laissant à désirer, fait assez bien reconnaître le molitrix.

J'ai déjà dit que l'espèce, décrite et figurée dans le Mémoire sur les Cyprinoides de Chine comme représentant le molitrix, doit être distincte, comme l'avait déjà indiqué Guichenot, qui la nomma Dabryi sans toutefois la décrire.

L'espèce décrite par M. Steindachner sous le nom de Cephalus hypophthalmus et par Kner sous le nom d'Hypophthalmichthys mandschuricus n'est pas non plus le molitrix mais le nobilis.

Outre les caractères indiqués ci-dessus, le molitrix paraît se distinguer encore du Dabryi par plusieurs autres, mais il est possible que les différences ne sont pas, en partie au-moins, que des caractères individuels ou d'âge. Chez les individus du Dabryi, mésurant en longueur 230''' et 265''' et dont par conséquent le plus grand est d'un decimètre plus petit que l'individu décrit ci-dessus, je trouvai la tête un peu plus longue ($3\frac{3}{7}$ à $3\frac{1}{2}$ dans la longueur sans la caudale) et moins large ($2\frac{1}{3}$ à $2\frac{1}{4}$ fois dans sa longueur), les yeux plus grands (5 fois dans la longueur de la tête et 3 fois dans la partie postoculaire de la tête), la région interoculaire moins large ($1\frac{3}{4}$ à 2 diamètres de l'oeil), la mâchoire supérieure un peu plus courte que l'inférieure et ne mésurant que 4 fois dans la longueur de la tête, l'opercule deux fois plus haut que large, l'orifice branchial descendant jusque sous les yeux, et la formule des rayons assez différente : = D. 2/8 ou 2/9. V. 2/6. A. 3/13 ou 3/14, ce qui donne un rayon de plus à la dorsale, un de moins aux ventrales et deux de plus à l'anale. La formule de l'anale cependant du molitrix, donnée par Richardson, étant = 17, il se pourrait bien que celle-ci est sujette à des variations, mais celle des ventrales pourrait bien être de valeur spécifique.

P. Bleeker, dir.

Hypophthalmichthys nobilis Blkr.

L. Speigler, del.

Chromolith v. Emrik & Binger Haarlem

Quant à l'Abramocephalus microlepis (Sitzungsb. K. Ak. W. LX p. 302), qui n'est connu que par la description de M. Steindachner, il est possible qu'il soit de l'espèce du molitrix, mais M. Steindachner parlant d'une carène ventrale dénuée d'écailles, de 23 rangées d'écailles entre la ligne latérale et l'insertion des ventrales, et d'une tache triangulaire sans écailles au devant de la dorsale, il serait hasardé de l'y rapporter positivement. Le genre Abramocephalus est fondé surtout sur la carène pré- et postventrale sans écailles, mais la carène préventrale étant bien développée aussi dans le molitrix et le Dabryi (quoiqu'elle y soit couverte d'écailles et la dentition et les appendices des arcs branchiaux y présentant les mêmes caractères) le genre rentre parfaitement dans celui du molitrix, le type de l'Hypophthalmichthys. S'il y avait donc lieu à séparer génériquement le molitrix du nobilis, espèce à partie préventrale obtuse et horizontalement aplatie, c'est le dernier qui aurait du prendre un nom générique nouveau.

L'Onychodon mantschuricus Dyb. que je ne connais que par la diagnose, publiée dans les Verhandlungen der Zoolog. botan. Gesellschaft in Wien (XII p. 211), est rapporté par M. Dybosky au Cephalus mantschuricus Bas., et serait donc synonyme du molitrix, mais l'espèce mérite d'être mieux connue avant de l'y pouvoir rapporter définivement. M. Dybowski y parle aussi de 20 rangées d'écailles au-dessus de la ligne latérale, ce qui fait penser à l'Abramocephalus microlepis.

Basilewski dit de son espèce qu'elle habite aussi la Mantschurie et la Mongolie, qu'elle atteint une longueur de quatre pieds et que, pendant l'hiver, elle est importée à Pekin en grand nombre à l'état de congélation.

Hypophthalmichthys nobilis Blkr., Ichth. Arch. Ind. Prodr. II Cypr. p. 283 (nec Mém. Cyprin. Chine p. 85 tab. 14 fig. 2); Günth., Cat. Fish. VII p. 299.

Hypophth. corpore oblongo compresso, altitudine $3\frac{1}{3}$ circ. in ejus longitudine absque, 4 et paulo in ejus longitudine cum pinna caudali, latitudine corporis $1\frac{2}{5}$ circ. in ejus altitudine; capite acuto $2\frac{4}{5}$ in longitudine corporis absque, $3\frac{1}{2}$ circ. in

longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{1}{3}$ circ., longitudine capitis $1\frac{3}{4}$ circ. in ejus longitudine; linea rostro-dorsali fronte concava nucha convexa; linea interoculari valde convexa; osse supraorbitali non usque supra oculum producto, ovato-oblongo duplo circ. longiore quam lato; oculis posteris diametro marginem liberum inter 8 circ. in longitudine capitis, $4\frac{1}{2}$ circ. in capitis parte postoculari, diametris 4 circ. distantibus; rostro acuto depresso oculi diametro longitudinali plus duplo longiore, apice supra oculi marginem superiorem sito; naribus linea rostro-frontali approximatis, longe ab oculo remotis, posterioribus anterioribus majoribus; osse praeorbitali subpentagono angulis obtuse rotundatis, longiore quam alto dimidio inferiore crista longitudinali percurso; osse suborbitali 2° irregulariter quadrangulari duplo circ. longiore quam alto, antice quam postice plus duplo altiore; osse suborbitale 3° elongato triplo circ. longiore quam lato margine inferiore valde convexa; maxillis acie tenuibus; maxilla superiore inferiore paulo longiore vix protractili; ante oculum desinente, vix plus quam 3 in longitudine capitis; maxilla inferiore cochleariformi symphysi tuberculo subhamata, ramis latis sat distantibus margine interno subparallelis postrorsum tantum divergentibus; labiis tenuibus; sulco infralabiali brevi; praeoperculo et operculo radiatim rugosis, praeoperculo limbo inferne lacunoso; operculo duplo circ. altiore quam lato margine postero-inferiore rectiusculo; ossibus pharyngealibus gracilibus basi planis ante et post dentes fenestratis; dentibus pharyngealibus uniseriatis 4/4 apice quam basi latioribus valde compressis incisivis rotundatis, facie interne concaviusculis striis vel rugulis nullis, facie externa convexis laevibus obtuse carinatis; processubus arcuum branchialium anterioribus numerosissimis elongatis liberis, mediis arcu 1° tantum ramis branchialibus longioribus; apertura branchiali non usque sub oculo extensa; membrana interbranchiali latissima; osse scapulari obtuse rotundato; ventre ante pinnas ventrales lato inferne plano nullibi carinato medio sulco longitudinali lato superficiali, post pinnas ventrales acute carinato; cauda parte libera paulo longiore quam postice alta; squamis striis longitudinalibus nullis, angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 125

circ. infra lineam lateralem in series 100 circ. os scapulare inter et basin pinnae caudalis in series 90 circ. transversas dispositis; squamis 42 circ. in serie transversa pinnas ventrales inter et initium pinnae dorsalis, quarum 25 circ. supra lineam lateralem; squamis occiput inter et pinnam dorsalem 70 circ. in serie longitudinali; linea laterali valde curvata pinnae ventrali vix magis quam lineae dorsali approximata, singulis squamis tubulo simplico notata, antice valde declivi; pinna dorsali medio circ. ventrales inter et analem sita, radio 1° oculo quam basi pinnae caudalis paulo propiore, corpore multo humiliore, duplo fere altiore quam basi longa, acuta, non vel vix emarginata; pinnis pectoralibus acutis capite absque rostro non brevioribus basin ventralem longe superantibus radio 1° osseo lato; ventralibus ventre infimo insertis acutis capitis parte postoculari paulo brevioribus, analem non attingentibus; anali mox post anum incipiente dorsali sat multo longiore et sat multo humiliore, aeque longa ac antice alta, acuta, emarginata; caudali lobis acutis vel acutiusculis capite absque rostro non brevioribus; colore corpore superne viridi, lateribus aureo-viridi vel aureo-argenteo, inferne argenteo; iride flavescente; pinnis flavescentibus plus minusve fusco arenatis.

B. 3. D. 3/7 vel 3/8. P. 1/18. V. 2/8. A. 3/12 vel 3/13. C. 1/17/1 et lat. brev.

Syn. *Leuciscus nobilis* Gr., Rich., Ichth. Voy. Sulphur p. 100 tab. 63 fig. 3; Ichth. Chin. Rept. 15[h] meet Brit. Assoc. p. 295.
Cephalus Hypophthalmus Steind., Cephal. hypophth. in Verh. Zool. bot. Ges. Wien. XVI p. 283 tab. 4.
Hypophthalmichthys mandschuricus Kner, Zool. Reis. Novar. Fisch. p. 350 (nec syn. part.)

Hab. Shangai; in fluviis.

Longitudo speciminis descripti 470‴.

Rem. On doit la première connaissance du nobilis à Richardson. La figure qu'en publia l'éminent ichthyologiste, bien que pris sur un individu en herbier de 14 pouces de long, en rend assez bien, à l'écaillure près, les caractères externes, c'est-à-dire, la longue tête, la large fente buccale, les longues pectorales et les ventrales s'attachant au profil ventral.

M. Steindachner publia l'espèce de nouveau, et donna une figure plus exacte et plus belle et fit connaître les détails de son armure pharyngienne, mais il la croyait identique avec le molitrix en la nommant Cephalus hypophthalmus.

Kner aussi, en ajoutant plusieurs détails anatomiques, aussi par rapport à l'appareil branchial, la confondit avec le molitrix en la décrivant sous le nom d'Hypophthamichthys mandschuricus.

L'erreur de M. Steindachner et de Kner fut déjà relevée par M. Günther qui ne donna du reste des deux espèces que des diagnoses succinctes sans faire allusion aux caractères remarquables que présente la forme du ventre et les appareils branchial et pharyngien.

L'Hypophthalmichthys nobilis décrit et figuré dans le Mémoire sur les Cyprinoïdes de Chine, sur des individus appartenant au Muséum du Jardin des plantes, ne peut pas être non plus de l'espèce de Richardson. Bien qu'il présente les proportions de la tête et des pectorales, les appendices libres des arcs branchiaux, les os pharyngiens inférieurs bifénestrés et les dents pharyngiennes lisses sans stries transverses ; du nobilis il est bien distinct par son ventre comprimé en carène au devant des ventrales, la carène se continuant en arrière bien au-dessous de l'insertion des ventrales, qui par conséquent sont implantées bien au-dessus du profil ventral. Cette espèce qui doit reprendre le nom de Simoni, proposé par Guichenot, est différencée encore par les yeux plus grands et qui ne sont pas recouverts en dessus par le préorbitaire et le susorbitaire, par la tête plus obtuse et plus courte, par la mâchoire supérieure plus courte et par un rayon de plus tant à la dorsale qu'aux pectorales et à l'anale. L'Hypophthalmichthys Simoni est une espèce à ventre du molitrix et à dentition pharyngienne et appareil branchial du nobilis.

Je pense que des recherches ultérieures démontreront l'existense de plusieurs autres espèces du même genre et qu'elles permettront aussi de se prononcer plus positivement sur celles, enrégistrées jusqu'ici sous les noms d'Abramocephalus microlepis et de Onychodon mantschuricus.

La Haye, Décembre 1877,

OVER DE

DOORDRINGBAARHEID VAN KLEI EN ZAND DOOR WATER;

NAAR AANLEIDING

VAN DE MEDEDEELINGEN VAN DEN HEER P. HARTING, IN DE VERGADERING VAN MEI 1877, EN VAN DE VROEGERE PROEVEN (1851—1853).

DOOR

T. J. STIELTJES.

In de Vergadering van 26 Mei 1877 heeft de heer P. HARTING eenige beschouwingen medegedeeld omtrent de mate van doordringbaarheid van zand en klei door water. Die beschouwingen waren gegrond op proeven, genomen in naauwe glazen buizen. Verder heeft de heer HARTING zich beroepen op vroegere uitgebreide proeven, genomen in 1851 omtrent de doordringbaarheid van kleisoorten, gelegen op groote diepten onder Amsterdam, en op waarnemingen omstreeks denzelfden tijd gedaan op Urk en te Gorcum.

De uitkomsten van de jongste proeven kwamen mij reeds bij de mededeeling zoo onwaarschijnlijk voor, dat ik ter loops de aandacht der vergadering op eenige punten meende te moeten vestigen, mij voorstellende later uitvoeriger daarop terug te komen. Verschillende bezigheden van anderen aard hebben mij belet in de maanden Julij en Augustus aan dit onderwerp mijn tijd te wijden. Eerst in de maand September was het nu en dan mogelijk mij daarmede bezig te houden. Men gelieve daarom het onvolledige der behandeling voor lief te nemen.

M. Steindachner publia l'espèce de nouveau, et donna une figure plus exacte et plus belle et fit connaître les détails de son armure pharyngienne, mais il la croyait identique avec le molitrix en la nommant Cephalus hypophthalmus.

Kner aussi, en ajoutant plusieurs détails anatomiques, aussi par rapport à l'appareil branchial, la confondit avec le molitrix en la décrivant sous le nom d'Hypophthamichthys mandschuricus.

L'erreur de M. Steindachner et de Kner fut déjà relevée par M. Günther qui ne donna du reste des deux espèces que des diagnoses succinctes sans faire allusion aux caractères remarquables que présente la forme du ventre et les appareils branchial et pharyngien.

L'Hypophthalmichthys nobilis décrit et figuré dans le Mémoire sur les Cyprinoïdes de Chine, sur des individus appartenant au Muséum du Jardin des plantes, ne peut pas être non plus de l'espèce de Richardson. Bien qu'il présente les proportions de la tête et des pectorales, les appendices libres des arcs branchiaux, les os pharyngiens inférieurs bifénestrés et les dents pharyngiennes lisses sans stries transverses; du nobilis il est bien distinct par son ventre comprimé en carène au devant des ventrales, la carène se continuant en arrière bien au-dessous de l'insertion des ventrales, qui par conséquent sont implantées bien au-dessus du profil ventral. Cette espèce qui doit reprendre le nom de Simoni, proposé par Guichenot, est différencée encore par les yeux plus grands et qui ne sont pas recouverts en dessus par le préorbitaire et le susorbitaire, par la tête plus obtuse et plus courte, par la mâchoire supérieure plus courte et par un rayon de plus tant à la dorsale qu'aux pectorales et à l'anale. L'Hypophthalmichthys Simoni est une espèce à ventre du molitrix et à dentition pharyngienne et appareil branchial du nobilis.

Je pense que des recherches ultérieures démontreront l'existense de plusieurs autres espèces du même genre et qu'elles permettront aussi de se prononcer plus positivement sur celles enrégistrées jusqu'ici sous les noms d'Abramocephalus microlepis et de Onychodon mantschuricus.

La Haye, Décembre 1877,

OVER DE

DOORDRINGBAARHEID VAN KLEI EN ZAND DOOR WATER;

NAAR AANLEIDING

VAN DE MEDEDEELINGEN VAN DEN HEER P. HARTING, IN DE VERGADERING VAN MEI 1877, EN VAN DE VROEGERE PROEVEN (1851—1853).

DOOR

T. J. STIELTJES.

In de Vergadering van 26 Mei 1877 heeft de heer P. HARTING eenige beschouwingen medegedeeld omtrent de mate van doordringbaarheid van zand en klei door water. Die beschouwingen waren gegrond op proeven, genomen in naauwe glazen buizen. Verder heeft de heer HARTING zich beroepen op vroegere uitgebreide proeven, genomen in 1851 omtrent de doordringbaarheid van kleisoorten, gelegen op groote diepten onder Amsterdam, en op waarnemingen omstreeks denzelfden tijd gedaan op Urk en te Gorcum.

De uitkomsten van de jongste proeven kwamen mij reeds bij de mededeeling zoo onwaarschijnlijk voor, dat ik ter loops de aandacht der vergadering op eenige punten meende te moeten vestigen, mij voorstellende later uitvoeriger daarop terug te komen. Verschillende bezigheden van anderen aard hebben mij belet in de maanden Julij en Augustus aan dit onderwerp mijn tijd te wijden. Eerst in de maand September was het nu en dan mogelijk mij daarmede bezig te houden. Men gelieve daarom het onvolledige der behandeling voor lief te nemen.

Achtereenvolgens wil ik in het kort mededeelen:

I. De uitkomsten, waartoe de heer HARTING gekomen is, en eenige bemerkingen daarop.

II. De meening van bekende ingenieurs, die veel op zand of aan zee gewerkt hebben, over deze zaak, berustende op wat de ondervinding geleerd heeft:

a. Bij polders in Zeeland.

b. Bij den bouw der Noordzee sluizen te IJmuiden.

c. Bij het doen van boringen in de duinen.

d. Bij de doorlekking aan de westzijde van de Haarlemmermeer.

e. Bij den bouw van kanaalvakken in ophooping, in Overijssel.

III. Mijne vermoedens over de oorzaak der verschillen, die tusschen de proeven in 't klein van den heer HARTING en de waarnemingen in 't groot der praktijk blijken te bestaan.

Eindelijk wil ik dan

IV. eene poging wagen tot het aangeven der middelen, op welke wijze nadere proeven, met grooter kans op waarschijnlijke uitkomsten, te nemen zouden zijn.

I. UITKOMSTEN DER PROEVEN VAN DEN HEER HARTING.

De proeven over de waterdigtheid der kleilagen onder Amsterdam, in 1851 genomen, zijn te vinden in de Verhandelingen der 1e klasse van het Koninklijk Nederl. Instituut over 1852, blz. 73—232. De proeven werden genomen met klei- en mergelsoorten, gevonden van 25.3 tot 61.2 M. onder A. P. Zij werden genomen in verticale buizen van 2.5 M. hoogte en 1 cM. middellijn bij verschillende dikten der kleikolom en der daarop drukkende waterkolom. Ook zijn vele proeven genomen omtrent den tijd, noodig om eene op klei drukkende waterkolom van 1.01 M. hoogte tot 0.99 M. hoogte te herleiden. Op blz. 213 en 214 trekt de waarnemer dan de volgende besluiten:

Blz. 213. „*Vooreerst*, dat er geene klei is, die in den vol„strekten zin ondoordringbaar kan genoemd worden, daar zelfs

„die, welke hier de onderste der lagen vormt, en enkel bestaat „uit deeltjes van schier moleculaire fijnheid, toch nog eene zeer „merkelijke doordringbaarheid voor water bezit.''

„*Ten tweede* vloeit uit de genomen proeven de opmerkelijke „gevolgtrekking voort, dat elke bodemsoort haar eigen maximum „van moeijelijke doordringbaarheid bezit, dat is: dat eene laag „van zekere dikte het grootste weêrstandbiedend vermogen ten „opzigte van het doorzijgend water heeft, zonder dat dit weêr-„standbiedend of den doorgang van het water vertragend ver-„mogen toeneemt bij dikkere lagen van denzelfden bodem. Deze „eigenschap, hoe zonderling en onverklaarbaar zij ook schijnen „moge, is door te vele proeven telkens bevestigd, dan dat zij „betwijfeld zou kunnen worden." enz. enz. . . . .

Blz. 214: „*Ten derde.* De invloed dier hoogte van het water „blijkt uit de uitkomsten der proeven, reeds vermeld op blz. „155 en 156. Daaruit volgt dat men in het algemeen, zonder „groote fout, stellen kan, dat de hoeveelheid water, die in een „gegeven tijdbestek door eene kleilaag heendringt, in gelijke „verhouding toeneemt of vermeerdert met de toeneming of ver-„mindering van de hoogte der daarop rustende waterkolom. Nu „is er gevonden dat, met de klei van N°. XI, de hoogte eener „waterkolom van gemiddeld één M. in 24 uren verminderd wordt „met 11.4 mm., dat wil zeggen, dat, indien de oppervlakte „der kleilaag 1 M^2 had bedragen, dan zouden er in 24 uren „11.4 liters doorgezogen zijn, derhalve op een hectare 114.000 „liters. Enz. enz."

De reeks nieuwste proeven, door den heer HARTING medegedeeld, geschiedde met *liggende* buizen van ruim 1.5 meter lengte tot eene totale lengte van ruim 10.6 M. met zand uit de heide bij Barneveld gevuld, en onderworpen aan de drukking eener waterkolom van 4.80 M. tot 3.80 M. hoogte afnemende, tengevolge van het opstijgen van 't water in eene buis tot 1 M. hoogte. De tijd en hoogte van opstijging door 1, 2, 3, 4, 5 of 6 liggende buizen werd aangeteekend en als uitkomst (blz. 317) medegedeeld: „bij eene zandbedding, die eene lengte heeft van „7 × 10.6 = 74.2 M. zal het water dat onder genoemde „drukking in den zandbodem dringt, aan het einde nog eene „snelheid hebben, die het binnen eene besloten ruimte in

„5 × 822 minuten = 68.5 uren of 2 dagen en 20 uren, tot „1 M. hoogte zal doen stijgen.”

Dit zou geven per etmaal 0.35 M. voor 3.8 M. drukhoogte; of volgens de vroegere proeven de doordringbaarheid aannemende als staande in regte reden tot de drukhoogte, voor 1 M. hoogte 0.09 M. per etmaal.

Om bij de Zuiderzee de oppersing van het water tegen te gaan zou (blz. 323, onderaan) eene kleilaag van 5.5 M. dikte noodig zijn. „Elke geringere dikte dan 5.5 M. komt mij min „of meer bedenkelijk voor, althans in de nabijheid van die pun„ten, waar het buiten- of boezemwater gemakkelijk in den „grond kan dringen.”

II. DE MEENING VAN BEKENDE INGENIEURS, DIE VEEL OP ZAND OF AAN ZEE GEWERKT HEBBEN OVER DEZE ZAAK, BERUSTENDE OP WAT DE ONDERVINDING GELEERD HEEFT.

a. De heer J. F. W. CONRAD, thans hoofd-ingenieur, (vroeger ingenieur) in Noord-Holland, vroeger eerst ingenieur en in een later tijdperk hoofd-ingenieur in Zeeland, meldt mij omtrent de polders in Zeeland het volgende:

„De zoogenaamde rijpe schorren in Zeeland bestaan uit eene „laag klei aan de oppervlakte, dik 25 tot 40 cM; daaronder „bevindt zich vet zand, fijn zand en grover zand.”

„Langs de zeezijde, waar de schorvorming het jongst is, „bestaat de kleilaag uit niet meer dan 25 cM. dikte, en op „die plaats wordt in den regel de dijk gelegd.”

„De specie voor den dijk wordt gegraven uit de dijksput „(buitendijks) over 50 en meer M. breedte, tot zoodanige diepte „als noodig is om de vereischte specie te erlangen, hetgeen „meestal 1.50 tot 2 M. is.”

„Langs de binnenberm wordt de bermsloot gegraven, diep „ongeveer 1.25 M.”

„Zoowel tot het maken dezer sloot, als bij het graven der „dijksput, wordt de dunne kleilaag doorgraven, en wordt het „zeewater (in de dijksput) gestuit door de zandlaag, waarop de „dijk rust.”

„Nimmer heb ik bij de vele in Zeeland bedijkte schorren „gehoord, dat er kwel plaats had door de zandlagen onder „den dijk."

„De dijk rond den Elisabeth-polder in den mond van den „Braakman is voor een groot gedeelte der lengte op den zand„bodem aangelegd."

„De dijk voor den Frederika-polder in Zuid-Beveland is op „twee plaatsen door vrij breede kreeken gelegd, waarvan de „bodem uit zand bestond. Geen rijswerk is daartoe gebruikt, „maar enkel zand, en de doorkwelling was gering."

„Bij den Anna Paulowna-polder heb ik nimmer van kwel „gehoord, en dat er zeer zandige streken in dien polder zijn, „weten de eigenaars genoeg."

Hierbij valt op te merken, dat sommigen van die polders in Zeeland, bij geringe breedte dwars op de kust, eene groote lengte in de rigting der kust hebben, en dus veel *dijkslengte* bij weinig *oppervlak*. Dit is juist de allerongunstigste toestand. Zoo heeft bijv. de Elisabeth-polder bijna 5000 M. buitendijk op slechts 255 H. A. oppervlak. De als een eiland gelegen Angelina-polder heeft omstreeks 6700 M. omdijking op slechts 230 H. A. oppervlak. Bij de geringste doorkwelling moesten zulke polders dus onhoudbaar zijn.

b. De hoofd-ingenieur WALDORP, die vroeger als ingenieur aan de boven-rivieren in Gelderland heeft gewerkt, en later bij de Noordzee sluizen de doordringbaarheid van duin- en zeezand kon leeren beoordeelen, vreest zeer de doordringbaarheid van grof zand en grind aan de boven-rivieren, en acht dit onder anderen een bezwaar bij een te graven kanaal van de Grebbe naar Dodewaard, dwars door de Betuwe; maar vreest *hoegenaamd niet* de doordringbaarheid van fijn zeezand. Bij gelegenheid eener bespreking over eene te graven buitenhaven te Cuxhaven, slechts door een dijk van de zee gescheiden, schreef hij mij onder dagteekening van 22 Julij 1877 het volgende:

„Het graven en drooghouden tot 6 — *) bij vloeden van „3 tot 6 M. + is natuurlijk niet alles, het zou tusschen Op„heusden en Doodewaard eene totale onmogelijkheid zijn, zoo

*) Onder de oude nul van Cuxhaven of laag water bij springtij, zijnde ongeveer A.P.

„hoog rivierwaarts op, doch naar zee is het zand zóó fijn en digt, „dat het toch wel kan. Althans wij hebben achter de Noord-„zee-sluizen tot 8.80 M. ontgraven en voor het bouwen der „sluizen tot 11.10 M. onder A. P."

Bedenkt men nu dat de gewone eb daar daalt tot 1.00 M. — A. P., de gewone vloed klimt tot 0.70 + A. P., en stormvloeden tot 2 à 3 M. + A. P., dan ziet men dat in het duinzand, dat onmiddelijk doorloopt tot in zee, is gegraven tot 10 à 12 M. *onder de vloed;* van daar dat de heer WALDORP durft aan te raden om hetzelfde te Cuxhaven te doen, waar de zandbodem doorgaat tot 5 à 6 M. onder de 0, dat daar de eb is, er dus 8 à 9 M. onder gewone, 11 à 12 M. onder stormvloeden.

De heer DIRKS, hoofd-ingenieur der Kanaal-maatschappij, gaf mij den 12[den] September 1877 de volgende inlichting: Het kanaal van de brug (toen dam) in den straatweg bij Velzen tot de Noordzee-sluizen, lang 3000 M. ongeveer, is gegraven tot 5.00 M. — A. P., met eenige daling naar de sluis, en daarbij droog gehouden door een stoomtuig van 80 paardenkrachten. Digt bij de Noordzee werd in de welputten zuiver drinkwater gevonden, dat tijdens de cholera epidemie van 1866 onderzocht en goed bevonden is. Uit de vier boringen blijkt dat de sluis en het kanaal geheel in 't zand gebouwd zijn. De duinen verheffen zich daar tot 10 à 20 M. + A.P.

Ware het zand zoo doordringbaar als de proeven van den heer HARTING aanwijzen, dan zou de bouw van de Noordzee-sluizen veel grooter bezwaren hebben moeten ondervinden.

c. De hoogleeraar HENKET deed in Julij 1866 eene waterpassing in de duinen tusschen Scheveningen en Wassenaar, en liet eene tweede waterpassing verrigten in die streek in November 1868, om te onderzoeken hoe diep het grondwater in die duinen bleef staan. De uitkomsten voor deze waterpassingen zijn op bijgaande profillen en stafkaart aangeduid *). Alvorens de uitkomsten dezer waarnemingen mede te deelen, herinner ik er aan, dat de toestand in het aanliggende Rijnland (uit de officieele verslagen) toen als volgt was.

---

*) De voornaamste gegevens uit die profillen zijn hierachter vereenigd in eene tabel.

In 1866 viel er in Rijnland 0.7055 M. regen en verdampte er eene waterhoogte van 0,27 M., zoodat er 0,4355 M. meer regen dan verdamping was (bl. 26).

Water ter verversching werd ingelaten van het begin van April tot in Augustus. In Mei, Junij en een klein gedeelte van Julij, dus in den tijd waarin bij matigen regenval de verdamping het sterkst is waargenomen, ontstond over geheel Rijnland behoefte aan verversching (bl. 30).

De boezemstanden te Katwijk, onder A. P., waren:

1866.	De middelbare.	De hoogste.	De laagste.
Mei	0.623	0.460	0.720
Junij	0.664	0.560	0.810
Julij	0.534	0.400	0.670
Augustus	0.580	0.480	0.730

(Zie bl. 40).

In 1868 was er slechts 0.423 M. regen tegen 0.411 M. verdamping, en bleven dus slechts 0.012 M. meer regen dan verdamping over. Terwijl 1866 meer tot de natte jaren behoorde, was 1868 een zeer droog jaar, (bl. 20). De inlating tot verversching heeft alles overtroffen wat welligt ooit bestond (bl. 22). Bijna 170 millioen M^3 water werden (meest in Junij Julij en Augustus) ingelaten (bl. 23). De boezemstanden waren onder A. P. als volgt, te Katwijk:

1868.	De middelbare.	De hoogste.	De laagste.
Mei	0.672	0.640	0.780
Junij	0.740	0.680	0.810
Julij	0.769	0.670	0.880
Augustus	0.741	0.600	0.870
September	0.691	0.620	0.760
October	0.673	0.510	0.750
November	0.573	0.400	0.860

Tijdens de waterpassingen en boringen, de eerste in de laatste dagen van Julij en de eerste van Augustus 1866, de laatste in November 1868, werd het water op de volgende hoogten boven A. P. en diepten onder den grond aangetroffen op

punten die op de aangegeven afstand van de zee of de boezemwateren gelegen waren:

Punten van waarneming.	Grondwater in de duinen. + A. P.	— den grond	Boezemstand van Rijnland — A.P.	Afstand tot den boezem of tot de zee.	Verval in meters	Helling één op
Zuid-Oostzijde der vlakte van Waaldorp.				van den boezem		
In Julij 1866	1.43 à 1.76	2.20 à 2.50	0.53	500	1.96 à 2.29	255 à 219
„ Nov 1868	1.35 à 1.43	0.80 2 0.90	0.57	200	1.92 à 2.00	104 à 100
Bij de Meijendel.						
In Julij 1866	2.65 à 3.23	1.00 à 1.20	0.53	1350	3.18 à 3.76	424 à 360
„ Nov. 1868	3.17 à 3.25	1.00 à 1.50	0.57	1300	3.74 à 3.82	348 à 340
Bij de Bierlap.				van de zee		
In Julij 1866	3.00	0.80	0.53	2000	3.53	396
				van den boezem		
Bij het Wassenaarsche slag.				1400		
				van de zee		
In Julij 1866	7.16 à 7.69	1.50 à 5.50	0.53	1000	7.69 à 8.22	
Oostzijde der Berkheide.				van de zee		
In Julij 1866	7.93 à 7.97	1.00 à 2.50	0.53	1300 à 1800	8.46 à 8.50	142 à 141
				van den boezem		
Bij de Doorndel.				1200		
In Julij 1866	5.17 à 5.39	2 50, 1.00 à 7.00	0.53		5.70 à 5.92	

De helling naar zee is niet opgegeven, omdat het moeijelijk te zeggen is, welke der zeestanden van

0.921 + A. P. bij vloed in Julij 1866
0.564 — A. P. „ eb „ „ „

of van

0.936 + A. P. bij vloed in November 1868
0.556 — A. P. „ eb „ „ „

daarbij tot grondslag moet worden aangenomen.

Opmerkelijk is het dat op de plaats, waar de beide waterpassingen van 1866 en 1868 digt bij elkander leggen (in 't midden slechts 400 M.) de waterpeilen waren:

	Bij Duinzigt en vlakte van Waalsdorp.			Oude Rijs.			Meijendel.
In 1868 (droog jaar)	1.664 +	1.354 +	1.435 +	2.833	+		3.217 +
„ 1866 (nat „)	1.35 +	1.76 +	1.43 +	2.92 +	2.88 +	2.63 +	3.23 +

zoodat het jaargetijde niet veel invloed schijnt uit te oefenen.

Volgens mededeeling van den heer WALDORP daalde het water in het bovenpand der Haagsche waterleiding, in de droogste tijden van 1876, nimmer lager dan tot 1.00 M. + A. P. Toch was toen de boezemstand van Delfland 0 40 à 0.50 — A. P. dus 1.40 à 1.50 M. lager.

d. Bij de droogmaking van de Haarlemmermeer is aan de westzijde een gedeelte van den ringdijk op zand gelegd, juist daar waar aan de westzijde de hooge zandgronden zich tot de duinen uitstrekken. Door de medehulp van den heer dijkgraaf VAN DE POEL en den ingenieur ELINK STERK ben ik in staat daaromtrent het volgende mede te deelen.

Het meest water doorlatende gedeelte is gelegen van ongeveer de *Cruquius* tot bij Bennebroek, en is omstreeks 3000 M. lang. De commissie tot onderzoek naar de middelen tot verbetering van den toestand van den Haarlemmermeerpolder (D. J. STORM BUYSING, J. P. VAN DEN BERG JR., A. A. C. DE VRIES ROBBÉ, P. VAN DER STERR en J. LEGUIT), die den 8sten October 1858 verslag uitbragt, deed vier boringen verrigten, waarvan de uitkomst in nevensgaande profillen te zien is. Er werd gevonden:

In boring 1 zand met schelpen van 5.27 tot 5.57 M. — A.P. Dieper kon door het toeschieten van zand niet geboord worden.

In boring 2 zand van 3.85 tot 4.00 M. — A. P. en zand met schelpen tot 6.42 M. — A. P.

In boring 3 zand met schelpen van 5.55 tot 8.90 M. — A. P.

In boring 4 zand met schelpen van 4.40 tot 6.70 M. — A. P.

Zij schatte de lengte der ondigte grondlaag op 6000 M.

De Spaarnetogt bij de Cruquius ligt binnenwaarts van het sterkst lekkend gedeelte, en ontvangt door dwarssloten, die tot digt aan den dijk loopen, het water bovendien van omstreeks 136 H. A. De genoemde commissie vondt in Julij 1857, (bl. 18) „dat over den dam in den Spaarnetogt bij den Cru-„quius, het water nagenoeg ter hoogte van 0.05 M. met eene „snelheid van 0.40 à 0.50 M. per secunde stroomde. Naar de „ingewonnen berigten was toen de overstorting gering en zou „de gemiddelde hoogte grooter moeten gesteld worden. Nemen „wij die aan op 0.08 M. met eene stroomsnelheid van één me-

„ter per secunde; de breedte van den dam bedraagt. 7.00 M.
„de wijdte van twee duikers die insgelijks kwelwater
„aanvoeren . . . . 1.30 „

te zamen . . . 8.30 M.

„de hoeveelheid water wordt dan per etmaal 8.3 × 0.08 × „3600 × 24 = 57370 M³, en verdeeld over de tegenwoordige „waterberging (vroeger gesteld op 419 H. A.) zoude zij geven „eene gemiddelde verhooging van 0.014 M. per etmaal, hetwelk „blijkens de hiervoren genoemde waarnemingen in September „1856 en Maart 1857 zeker niet te hoog gesteld is."

Al dadelijk moet ik hier op eene grove vergissing der commissie wijzen. Zij *nam waar* 0.40 à 0.50 M. snelheid bij 0.05 M. overlaatswerking, wat vrij goed met de formules en coëfficienten strookt. Immers het profiel $b \times h$ was $8.30 \times 0.05 = 0.415$ M². De theoretische snelheid $\sqrt{2gh}$ wordt voor $h = 0.05$ bijna 1 meter. Dus werd de coëfficient $\frac{2}{3}n$ gesteld op 0.40 à 0.50, wat voor n geeft 0.60 à 0.75, wat voldoende met de coëfficient voor proeven in 't klein overeenkomt.

Maar nu neemt de commissie, geheel willekeurig, de snelheid voor 0.08 M. hoogte van overstorting aan op *één meter*. Dit kan niet, zij had *waargenomen* 0.40 à 0.50 M. snelheid voor 0.05 M. hoogte, en moest nu die snelheid vergrooten in reden van de vierkants wortels uit de hoogten, dat is in reden van $\sqrt{5} : \sqrt{8} = 2.236 : 2.828$. Men vindt dan 0.50 à 0.63 M. snelheid. De afvoer bij 0.08 M. overstorting wordt dan slechts 28685 à 36143 M³ per etmaal. De waargenomene in Juli 1857, bij 0.05 M. hoogte van overstorting was 0.166 à 0.2075 M³ per seconde of 14400 à 17928 M³ per etmaal. Dit komt voor de toenmalige waterberging in de Haarlemmermeer van 419 H. A. overeen met eene waterhoogte van 3.44 à 4.28 mm. De afvoer bij de overstortings hoogte van 0.08 M. stemt overeen met eene verhooging der waterberging van 6.85 à 8.63 mm.

Op den 24en Januarij 1861 werd door den opzigter Dansdorp de waterafvoer in den Spaarnertogt door onmiddellijke meting bepaald, en als volgt in een rapport van 26 Januarij

aan den hoofdopzigter van Egmond vermeld Het gemiddelde profil was 0.4466 M², de snelheid aan het oppervlak 0.57 M. Deze aannemende als de gemiddelde snelheid werd de afvoer

per seconde 0.254562 M³
" etmaal 21994 M³.

In een rapport van denzelfden opzigter DANSDORP van 7 Nov. 1860 werd berigt:

Dat de overlaat, breed 7 M., in den zomer werkt met 0.045 M. hoogte, dus met een profil van 0.315 M².

Later schijnt de overlaat tot 4.60 M. versmald te zijn en werkte toen met 0.055 M. hoogte of 0.253 M² profil. In de tweede helft van Augustus 1860 (een vrij natte tijd) werkte die den 25 Augustus met 0.14 hoogte, die echter reeds den 28 Aug. was gedaald tot 0.07 en op 30 Aug. was gedaald tot 0.06 M. hoogte.

Neemt men nu de *waarneming* der commissie omtrent de snelheid in Julij 1857 (0.40 à 0.50 M.) tot grondslag en men herleid de snelheden naar de vierkants wortels der overstortings hoogten, dan krijgt men de volgende *waargenomen* afvoeren:

In zomertijden van 1859 en 1860 10233 à 12790 M³.
Op 25 Aug. 1860, als maximum 57370 à 71710 M³.

Maar van die laatsten waarneming (na veel gevallen regen) moet worden afgetrokken de gevallen regen op 136 H. A. of 1360000 M² oppervlak, vertegenwoordigende elke centimeter hoogte 13600 M³. Ook van de bijna 22000 M³ die op 24 Januarij 1861 afvloeiden, nadat het (na ingevallen dooi) eenige dagen geregend had, kan slechts een gedeelte, al is het een groot gedeelte, als lekwater beschouwd worden.

Stelt men nu, naar aanleiding van deze *waarnemingen*, de massa door lekkend water op bijv. 21000 M³; neemt men verder aan dat die massa uitsluitend voortkomt uit het slechtste vak, lang 3000 M.; dan blijkt daaruit: dat eene grondlaag van zand met schelpen, bij een waterdruk van 4.30 M. hoogte per strekkende meter dijk doorlaat 7 M³. En lag dan de geheele ontworpen dijk tot afsluiting der Zuiderzee, lang 42000 M. op zulke zandgronden met schelpen, dan zou de doorlek-

king, onder eene constante drukking van 4.3 M. hoogte bedragen 294000 M³ per dag, of bijv. voor 1000 dagen der droogmaling 294 millioen M³ water. Maar daar nu bij de droogmaking gerekend is op het opvoeren van ruim 7000 millioen M³ water, zouden deze 294 millioen daar slechts 4 pCt. bijvoegen.

Bij deze rekening is *alles* veelmalen overdreven, en de zwarigheid van de kwel kan dus er niet toe leiden de Zuiderzee niet droog te maken.

e. Ik wil dit gedeelte besluiten met eenige feiten, ontleend aan de ondervinding opgedaan bij het graven van 97 kilometers kanalen in Overijssel, van 1851 tot 1858. Van die kanalen doorsnijden ongeveer 15 kilometers veenstreken, 2 kilometers langs en bij de Schipbeek te Deventer kleistreken, de overige 80 kilometers lengte liggen in zandgronden. Van die lengte liggen in ophooging, dat is met den waterspiegel *boven* het maaiveld, of *boven* de naast het kanaal loopende bermsloten de volgende vakken:

Van sluis 1 tot de Kluinhaarsbrug	4	kilometer
Boven 〃 2 〃 〃 minstens	2	〃
〃 〃 3 〃 〃 〃	2	〃
〃 〃 4 〃 〃 〃	5	〃
In het kanaal van Deventer naar Dalmholte	7	〃
te zamen	20	kilometer

kanaal- of 40 kilometers dijkslengte (kleine vakken nog overgeslagen) waar het kanaalwater 1 à 2 M. of zelfs hooger boven de bodems der bermslooten legt, welke slooten des zomers geheel of bijna geheel droog liggen. Het medegedeelde profil toont aan dat het kanaalwater daar slechts 10 à 20 M. van het lagere slootwater is gescheiden door zanddijken.

Bovendien zijn er in de zandgronden nog een twintigtal punten waar kleine beken door middel van grondduikers onder het kanaal doorgaan; en bovendien eene lengtevan $2 \times 10.6 = 21.2$ M. kanaal, waar, bij een overlaat, de dijk vervangen is door ééne rij stuwplanken, rustende op een onderheidde slagbalk. De damplanken zijn slechts 2.5 M. lang (zie nevenstaand pro-

fil) en aan weerszijden over 5 M. breedte, en tot 1.50 M. diepte in goede klei gelegd. De afstand van *zand tot zand*, onder de damplanken door, is slechts 11 M., en toch bestaat nu sedert Julij 1856 dit werk, zonder zigtbare lekken.

III. MIJNE VERMOEDENS OVER DE OORZAAK DER VERSCHILLEN, DIE TUSSCHEN DE PROEVEN IN HET KLEIN VAN DEN HEER HARTING, EN DE WAARNEMINGEN IN 'T GROOT DER PRAKTIJK BLIJKEN TE BESTAAN.

Reeds in de vergadering van Mei nam ik de vrijheid het vermoeden te opperen, dat de aansluiting van het *zand* aan *'t glas* der buizen, bij de toen medegedeelde zandproeven in *liggende buizen*, te wenschen heeft overgelaten. Bij het nalezen der proeven met klei in *staande buizen*, reeds in 1851 genomen, bemerk ik dat ook daarbij geene pogingen zijn aangewend om die *achterloopsheid* (om een term uit de praktijk te gebruiken) van de kleispecie tegen de gladde glazen wand te verminderen of te voorkomen. Na de vergadering van Mei ll. deed de heer MAC GILLAVRY mij bovendien opmerken dat bij de *liggende buizen*, al ligt eene open ruimte aan de boven zijde kan ontstaan. Overal, in het groot en in 't klein, geeft de zoogenaamde *koude* aansluiting van twee ligchamen eene niet waterdigte naad Niemand zal er aan denken een regte, gladde sluismuur koud tegen een regten aarden wand te doen sluiten, en een slechts even passende kurk in eene flesch zal, deze omkeerende, geene waterdigte sluiting geven. Overal, in de praktijk bij waterwerken, in het laboratorium bij aansluiting van buizen in andere buizen of houten stoppen, zijn voorzorgen noodig, om de sluiting werkelijk waterdigt te maken.

Bij de proeven van 1851 met kleisoorten is, mijns inziens, ook deze niet waterdigte aansluiting van de klei aan 't glas één der oorzaken der voorkomende anomaliën. Er kunnen nog vele andere oorzaken zijn, die mij op 't oogenblik niet in 't oog vallen. Het verkregen resultaat bijv. omtrent het *verminderen* der waterdigtheid, ja zelfs slechts het gelijk blijven, bij ver-

meerderde dikte der kleilaag, zou ik nog niet durven toegeven. Men kan zich deze zaak welligt als volgt duidelijk maken.

Veronderstel dat zekere kleilaag van bijv. 0.40 M. dikte, bij 1 M. waterdruk, dat door den heer HARTING veronderstelde grootste waterkeerend vermogen heeft; dan zal toch (wanneer de buis onder open blijft) water blijven doordruppen, immers de heer HARTING constateert dat geene klei volkomen waterdigt is. Veronderstel dat men op 1 M. lager eene tweede dergelijke kleilaag van 0.40 M. dikte aanbrengt, dan zal na zekeren tijd de tusschenruimte met water zijn gevuld en de 2e kleilaag aan dezelfde waterdruk als de bovenste zijn blootgesteld; evenzoo eene 3e kleilaag als die wederom 1 M. onder de 2e wordt aangebracht, enz. Zal nu de snelheid van uitvloeijing uit het reservoir naar beneden onveranderd blijven, of verminderen? Veronderstel zij bleef dezelfde, daar op *elke* kleilaag van 0.40 M. dikte 1 meter waterdruk komt. Wat zal er nu gebeuren als men achtervolgens die 2e en 3e kleilaag, eerst tot 0.50 M. dan tot 0.25 M. van de bovenste opschuift en eindelijk twee, dan drie kleilagen tegen elkander schuift? Zal dan niet achtereenvolgens de uitvloeijing uit het reservoir verminderen? Immers de drukhoogte op de onderste kleilagen wordt nu minder en daarmede de doorlating van water. Het ware wellicht der moeite waardig op die of soortgelijke wijze de uitkomst, door den heer HARTING in 1851 verkregen, aan een nader onderzoek te onderwerpen.

IV. AANWIJZING VAN EENIGE MIDDELEN, WAARDOOR WELLIGT JUISTERE UITKOMSTEN TE VERKRIJGEN ZOUDEN ZIJN.

De heer HARTING heeft zich bij zijne proeven zoowel van 1851 als van 1877 eene zeer groote moeite getroost, om de best mogelijke resultaten te verkrijgen, en zeker heeft het maanden onverdroten arbeid gekost, om beide merkwaardige reeksen van proeven te nemen. Ten vervolge daarop ware het nu wenschelijk nog de volgende punten meer bijzonder te onderzoeken, als:

1°. De invloed van wat ik zal noemen de *achterloopsheid*,

dat is het dringen van water tusschen de glazen wand en de aarddeelen door. - Bestaat die invloed, dan moet die *afnemen*:

a. Met het vergrooten van den middellijn der buizen, daar de inhouden in de vierkante reden, de omtrekken slechts in de regte reden toenemen. Proeven nemende met bijv. vier buizenwijdten van 2, 4, 8 en 16 cm. middellijn, zal men welligt de wet leeren kennen, volgens welke die achterloopsheid werkt.

b. Van de meerdere of mindere gladheid der wanden van de buizen. Hiertoe zou men proeven met glazen, aarden, metalen buizen, enz. kunnen nemen.

2⁰. Door het nemen van proeven met toestellen, waarin deze achterloopsheid geheel vermeden wordt, zou men dan verdere zekerheid omtrent de doordringbaarheid kunnen verkrijgen.

Men zou bijv. op een voet van klei eene borstwering van klei kunnen oprigten, des noods door latwerk versterkt, en in dit besloten en alleen van boven open kleivat water onder verschillende drukhoogten kunnen aanbrengen.

Deze proeven zullen echter, wegens de hoogte der bakken en dikte der wanden vrij kostbaar worden. Wenschelijk zou het zijn dergelijke ongebakken kleivaten door een dak aan regen, en zooveel mogelijk aan wind te onttrekken, om den invloed van regen en verdamping zoo veel mogelijk te neutraliseeren. Die invloed zou bovendien door op hetzelfde terrein aangebragte wind-, regen- en verdamping meters, nog bovendien geconstateerd moeten worden.

3⁰. Met zanddammen zouden dergelijke proeven te nemen zijn, die echter door de grootere afmetingen en hellingen der dammen nog kostbaarder en moeijelijker zouden worden.

4⁰. Eindelijk zou het zeer wenschelijk zijn de proefnemingen te besluiten met het nagaan van den invloed van kleihoudend water op het waterdigt maken van zand. Het is toch bekend dat lekke zanddijken, bij kanalen in ophooging, beter waterdigt zijn geworden, wanneer die kanalen met zeer troebel rivierwater werden gevuld, of op zeer lekke dijkgedeelten door het heen en weer bewegen van manden met klei, het water onzuiver was gemaakt. Daar nu het rivierwater, dat sommige kanalen voedt, veel zeewater, dat dijken bespoeld, zeer troebel is en vele kleideelen in oplossing bevat, in de werking daarvan wel-

ligt in de prakrijk de oorzaak, die de zanddijken of de zanddeelen waarop ze rusten, meer en meer waterdigt maakt. Had men eerst, met het meest zuivere water, de proef onder 4 met een zanddijk genomen, dan zou die proef met kleihoudend water te vervolgen zijn, en welligt tot belangrijke uitkomsten leiden.

En hierbij zal ik het thans laten, daar de tijd mij ontbroken heeft zoowel om zandpolders in 't Noorden van ons land te bezoeken, als om nog meerdere materialen over kanalen in ophooging, bijv. aan de Zuid-Willemsvaart, te verzamelen. De heer HARTING en de heeren die deze vergadering bijwonen zullen zeker hebben opgemerkt, dat ik geene der wetenschappelijke grondslagen, waarop de heer HARTING zijne stellingen bouwt, heb aangetast. Zeer zeker is zand digter, naarmate het fijner is, maar wordt nimmer zoo digt als klei, en ook onder de kleisoorten is een groot verschil in digtheid op te merken. Al wat ik bestreden heb zijn de *coëfficiënten* van waterdigtheid, omdat zij mij voorkwamen in strijd te zijn met de proefnemingen in het groot, die de praktijk van den ingenieur oplevert. Veel is in deze zaak reeds verrigt, meer blijft te verrigten over, en ik wil niet eindigen met aan te geven *hoe* de coëfficiënten van waterdigtheid zijn moeten, maar om met den heer HARTING op voortgezette studie en proefnemingen in deze belangrijke kwestie aan te dringen.

28 Sept. 1877.

OVER DE BEPALING

DER

BRANDPUNTSAFSTANDEN VAN LENZEN MET KORTEN BRANDPUNTSAFSTAND.

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.

Bij het onderzoek naar de zamenstelling van optische instrumenten komt het menigmaal voor, dat men gaarne met eenige nauwkeurigheid den brandpuntsafstand van kleine lenzen wil kennen. De grondformule der dioptrika, met inachtneming van de ligging der hoofdpunten, geeft hiertoe op verschillende wijze theoretisch het middel aan de hand; of men bij de meting de verlangde nauwkeurigheid bereikt, hangt dus slechts van de keuze der handelwijze en van de uitvoering af.

Bessel heeft *) eene methode beschreven, die hij gebruikte om den brandpuntsafstand van het objectief van den Königsberger heliometer te bepalen.

Hij beschrijft die als volgt: „Das Fernrohr wurde von dem Instrumente abgenommen. Nachdem seine Ourlarröhre herausgenommen war, wurde es auf zwei Lager horizontal aufgelegt, welche sich auf einem Schlitten befinden, der sich auf einem niedrigen und festen Tische, in zwei parallelen Bahnen verschieben lässt, so dass die Axe des Objectivs ihre Lage durch die Verschiebung nicht ändert. Ueber dem Fernrohre, parallel mit seiner Axe, wurde ein Balken, dessen Länge, von 33 Pariser Fuss, die vierfache Brennweite etwas übertraf, auf 6 festen Unterlagen so befestigt, dass eine seiner beiden oberen Kanten sich lothrecht über der Axe (und ihrer Verlängerung) befand,

*) *Astron. Untersuchungen* I, p. 137.

von ihr herabhängende Lothe also die Axe durchschnitten. An dem einem Ende dieser Vorrichtung wurde ein Ocular aufgestellt, vor welchem ein Loth, von dem Balken herab, aufgehängt wurde, so dass man seinen Faden, durch gehörige Verschiebung des Oculars in seiner Röhre, deutlich sehen konnte; ein anderes Loth hing von einem Punkte des Balkens, in der Nähe seines andern Endes herab. Das Fernrohr wurde nun so lange verschoben, bis man *beide* Lothfäden vollkommen deutlich im Oculare sah; die dieses leistende Lage des Fernrohrs wurde durch einen dritten, von dem Balken herabhängenden und eine am Fernrohr befestigte Scale berührenden Lothfaden bestimmt. Dann wurde das Fernrohr in die zweite Lage geschoben, in welcher beide Lothfäden wieder deutlich erschienen, und diese gleichfalls durch den Punkt der Scale, welchen der dritte Lothfaden nun traf, bestimmt. Zum deutlichen Sehen des Bildes von A ist erforderlich dass man das Zimmer, in welchem die Messungen gemacht werden, verdunkele und nur durch eine enge Spalte Licht auf das Objectiv fallen lasse. Als Lothfäden wurden Menschenhaare benutzt. Das angewandte Ocular vergrössert bei dem gewöhnlichen Gebrauche des Heliometers etwa 85 Mal, *) bei dem gegenwärtigen, der es in doppelte Entfernung von dem Objective bringt, also etwa 170 Mal.

Die Entfernung A B = E der beiden Lothfäden voneinander wurde auf der oberen, sorgfältig eben gemachten Fläche des Balkens, von dem sie herabhingen, durch die Toise gemessen; die Entfernung (e) der beiden Lagen des Objectivs OO′ wurde unmittelbar durch die Scale angegeben."

Uit deze twee gemetene grootheden en den afstand k der beide hoofdpunten van het objectief vindt men nu, zooals BESSEL aantoont, den brandpuntsafstand door de eenvoudige formule

$$4f = E - k - \frac{ee}{E - k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Het voordeel dezer methode bestaat daarin, dat men niet verplicht is, afstanden van eenen draad tot de voor- of achtervlakte van het objectief te meten, en daar bovendien de geme-

*) Daar de brandpuntsafstand van het objectief 1134 parijsche lijn was, bedroeg die van het gebruikte oculair $\frac{1134}{85} = 13^1/_3$ lijn nagenoeg.

tene afstand E na vermindering der kleine termen k en $\frac{ee}{E - k}$ door 4 gedeeld wordt, zoo gaan de onvermijdelijke fouten der meting verkleind op het resultaat over.

Het is mij voorgekomen, dat deze methode wellicht ook voor kleinere lenzen, zoo als die, waaruit oculairen zijn zamengesteld, zeer geschikt zou zijn, en op mijne aanwijzing heeft de heer KAGÈNAAR, Amanuensis aan het Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche hoogeschool, eenen toestel vervaardigd, waardoor, bepaalde grenzen niet overschrijdende, met veel gemak, dezelfde grootheden bepaald kunnen worden als BESSEL bedoelde. Uit de verhandeling van HANSEN, getiteld *Untersuchung der Wege eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen*, door de k. Saxische Gesellschaft der Wissenschaften in 1871 uitgegeven, blijkt dat HANSEN ook een dergelijken toestel gebruikt heeft. Bijzonderheden omtrent de bereikte nauwkeurigheid zijn echter niet door hem bekend gemaakt.

Voor hetzelfde doel zijn ook andere methoden aangewend. Wanneer de lichtbron op den dubbelen brandpuntsafstand der lens, in hare as geplaatst is, dan is de grootte van het beeld gelijk aan die van de lichtbron zelve. Hierop berust de methode van ons geacht medelid DONDERS, om met eenen ophalmometer eerst de grootte der lichtbron te bepalen, en daarna, hetzij de lens naar voren of achteren te bewegen, totdat het beeld der lichtbron juist dezelfde grootte vertoont, hetzij, (hetgeen zonder twijfel de voorkeur verdient,) bij verschillende standen der lens ook de grootte van het beeld te meten. Bij de eerste handelwijze bedraagt dan de afstand der lens tot de lichtbron den dubbelen brandpuntsafstand, (of nog beter: de afstand van lichtbron tot beeld bedraagt den viervoudigen brandpuntsafstand); bij de tweede handelwijze wordt die brandpuntsafstand door eene lichte berekening gevonden. Zooals Dr. SNELLEN echter opmerkt, heeft niet ieder een ophthalmometer te zijner beschikking, en levert de methode het bezwaar op, dat men groote brandpuntsafstanden, van zwakke lenzen, hiermede niet direct kan bepalen, en dat men bij elke bepaling met de ligging van de hoofdvlakken der lens heeft te rekenen.

Zeer vernuftig is voorzeker de door Dr. H. SNELLEN te Utrecht bedachte, en op zijne aanwijzing door den heer KAGENAAR vervaardigde *phakometer.*

Van dit instrument vindt men eene beschrijving en afbeelding in het *Maandblad voor Natuurwetenschappen*, Jrg. 7, No. 2. Het is zoodanig ingericht, dat de lichtbron en het scherm, waarop het lichtbeeld opgevangen wordt, beide gelijktijdig en evenveel in tegenovergestelde richting — naar de lens toe of van de lens af — bewogen worden. Als lichtbron dient een zwart schermpje met kleine openingen, waarachter mat glas geplaatst is, hetwelk door evenwijdig licht van eene in het brandpunt eener lens gestelde petroleumlamp verlicht wordt. Het lichtbeeld wordt opgevangen op een tweede schermpje van mat glas, waarop de figuur der openingen, die de lichtbron vormen, nauwkeurig is afgebeeld. Als vorm van lichtbron koos Dr. SNELLEN de figuur van drie punten in éene rechte lijn, waarvan twee dicht bij elkander, evenals bij den ophthalmometer, en wel eene figuur in horizontale en insgelijks eene in verticale richting. Daar de teekening op het scherm hieraan gelijk en gelijkstandig is, moet van het omgekeerde beeld een alleenstaand punt telkens tusschen twee bij elkander staande punten in vallen. Hierdoor wordt met nauwkeurigheid gecontroleerd, of lichtbron en lichtbeeld gelijke grootte hebben en dus op gelijken afstand van de lens zijn gebleven.

Doordien de te onderzoeken lens midden tusschen twee lenzen geplaatst wordt, die altijd in den toestel blijven, wordt de toestel ook bruikbaar gemaakt voor lenzen met grooten brandpuntsafstand. De verdeeling langs de baan van het scherm is niet gelijkmatig in millimeters verdeeld, maar geeft dadelijk het vermogen der lens in dioptriën, hetgeen voor brillenglazen het doelmatigst is. Voor verdere bijzonderheden zie men de beschrijving in het bovengenoemd tijdschrift na.

Hoewel deze toestel, voor het doel, waarvoor hij bestemd is, de bepaling van het vermogen van een gelijkbol (equiconvex) brillenglas, onverbeterlijk genoemd mag worden, door het gemak, den spoed en de juistheid, waarmede de bepaling geschieden kan, achtte ik hem nog niet voldoende voor het door mij beoogde doel. „De schaal," zegt Dr. SNELLEN zelf, „is berekend uitsluitend voor symmetrische, biconvexe lenzen. Om plancon-

vexe of periscopische glazen te bepalen, zal men wel doen, twee glazen van gelijke sterkte zoodanig tegen elkander te plaatsen, dat men een symmetrischen vorm verkrijgt. Zoodanige dubbele lens zal in den regel eene grootere dikte bezitten dan de glazen, waarvoor de schaal is berekend; men heeft alsdan naar de ligging der hoofdvlakken de schaal te reduceeren".

Men zou hierop de aanmerking kunnen maken, dat men dan ook altijd *twee* lenzen van hetzelfde vermogen en denzelfden vorm moet hebben, hetgeen nu wel misschien bij brillenglazen regel is; maar anders toch niet; doch de tegenaanmerking ligt voor de hand, dat ééne enkele, niet equiconvexe lens ook wel evengoed zou kunnen ingevoegd, en haar brandpuntsafstand bepaald worden, indien zij zoo geplaatst kon worden dat hare beide hoofdvlakken symmetriek kwamen ten opzichte van het middenvlak tusschen de beide hulplenzen. Eene platbolle lens zou dus ongeveer een derde gedeelte harer dikte *zijdelings* geplaatst moeten worden naar den kant van hare *platte* oppervlakte, hetzij die naar den kant van de lichtbron of naar dien van het scherm gekeerd ware. Daartoe ontbreekt aan den phakometer de gelegenheid, die echter wellicht gemakkelijk was aan te brengen. Maar al deze bezwaren vallen weg, als men bedenkt, dat, als de lens aan weêrszijden, van lichtbron en beeld, $2f$ afstaat, eene kleine verschuiving x der lens, den afstand $4f$ van lichtbron en beeld slechts eene vermeerdering van de tweede orde, $\frac{x^2}{f \pm x}$, doet ondergaan, eene grootheid, die in de praktijk altijd verwaarloosd kan worden.

Het kwam mij voor, dat wanneer het om de uiterste, bij deze bepalingen te bereiken nauwkeurigheid te doen was, het scherp worden van een beeld op een schermpje mat glas niet juist genoeg kan beoordeeld worden, dat bijv. zulks moeilijk binnen $^1/_4$ millimeter te bewerkstelligen is, doch dat met de methode van BESSEL wellicht zeer goed eene nauwkeurigheid van $^1/_{10}$ millimeter bereikt kon worden. Ik liet daarom een dergelijken toestel maken als den phakometer, mutatis mutandis. De voet in het midden, die voor den phakometer een vereischte is, wordt hier onnoodig, en kan, zie de plaat, door twee voeten vervangen worden, waardoor het instrument bij het gebruik steviger op eene tafel kan staan. Op de plaat is

in fig. 1 het instrument voorgesteld, op zijde gezien. Langs eene liniaal *a*, hebbende eene zwaluwstaartvormige doorsnede en van onderen van eene vertikale versterking voorzien, kunnen verschoven worden vier voeten, waarvan de eerste met de schroef *d* vast op de liniaal bevestigd wordt; die voet draagt van boven het buisje *b*, dat door de schroef *g* en de veer *f* (zie ook fig. 3) zijdelings eenigszins verplaatsbaar is; in dit buisje *b* wordt aan de achterzijde een Ramsdensch oculair *c* gestoken en aan de voorzijde een kort buisje *e*, over welks voorste opening een menschenhaar vertikaal gespannen is. De tweede draagt een kolommetje *h*, (zie ook fig. 4) waarin een rond stangetje op en neêr bewogen kan worden, dat boven, tusschen de twee hoeken *m*, de lens *p* kan houden, waarvan men den brandpuntsafstand wil bepalen. De derde draagt eene buis *q*, (zie ook fig. 5) waarvan de as evenwijdig gericht is aan de lengte der liniaal; in deze kan eene andere buis *r* geschoven worden, over wier, naar de lens toegekeerde, opening een tweede menschenhaar vertikaal gespannen is. De buis wordt omringd door een scherm *s* ter afhouding van het licht der petroleumlamp *t*, die op den vierden voet rust.

De hoogten van de assen der buizen *b* en *q* zijn gelijk en onveranderlijk. Ook aan het kolommetje *h*, dat de lens draagt, kan door de schroef *k*, die het tegen de veêr *o* aandrukt, eene zijdelingsche beweging worden medegedeeld.

Op de liniaal is eene verdeeling in millimeters, en de voeten zoowel van het kolommetje *h* als het buisje *q* zijn van noniën voorzien, waarmede tiende millimeters kunnen afgelezen worden. Wij zullen deze noniën respectivelijk nonius I en II noemen.

Neemt men de kolom *h* weg, (hiervoor moeten het scherm en de lamp *t* eerst van de liniaal afgeschoven worden, en brengt men de randen der buizen *r* en *e* tegen elkander, zoodat de voor hare openingen gespannen haren elkander raken, dan moet de nonius II (van *s*), juist op het nulpunt der verdeeling wijzen; bestaat er een verschil, dan moet dit in rekening gebracht worden. Is dus het scherm geplaatst, zooals fig. 1 aanduidt, dan wijst nonius II, zoo noodig na aanbrenging dezer indexcorrectie, den afstand der beide haren aan.

Wil men nu van eene lens *p* den brandpuntsafstand bepalen,

J. A. C. OUDEMANS. Toestel ter bepaling van brandpuntsafstand van kleine lenzen.

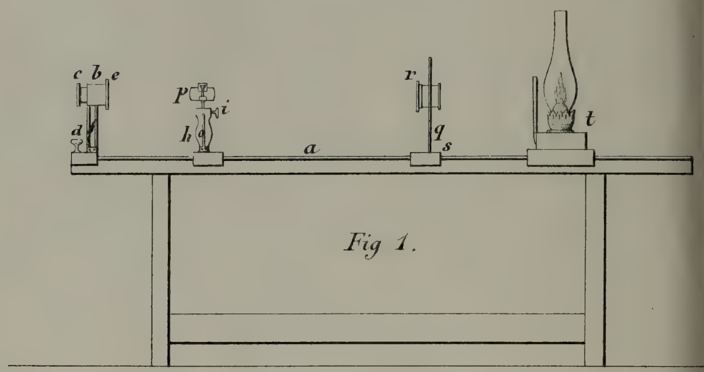


Fig 1.

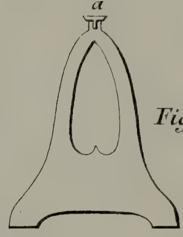


Fig: 2.

Fig: 3.

Fig: 4.

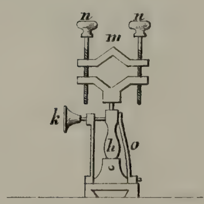
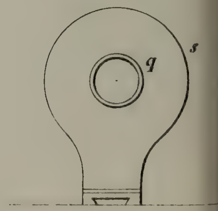


Fig: 5.



dan bepale men dien eerst ten ruwste, bijv. door middel der zon, en neme nu den afstand er eenige centimeters grooter dan 4 maal dien brandpuntsafstand, dan zullen er twee standen van de lens p zijn, waarin zij het beeld van het in r gespannen haar werpt juist in e. Door het oculair c ziende, moet men dus beide haren te gelijk scherp zien, zonder de geringste parallaxis. Bij den eenen stand, dien, welke in fig. 1 is afgebeeld, waarbij de lens p dichter bij e dan bij r is, ziet men naast het haar e een verkleind beeld van het haar r; bij den anderen stand, waarbij $pe > pr$ is, ziet men daarentegen een vergroot beeld. Leest men in beide standen den nonius I af, dan geeft het verschil dier aflezingen de verplaatsing e. Nonius II, zoo noodig voor fout van het nulpunt verbeterd, geeft den afstand E der beide haren, zoodat nu nog noodig is de kennis van den afstand k der knooppunten der lens p, om den brandpuntsafstand te berekenen door de formule

$$f = \frac{1}{4}\left(E - k - \frac{e^2}{E - k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Door den afstand E te variëeren, verkrijgt men verschillende bepalingen.

Het beginsel, waarop de toestel en zijn gebruik berust, is dus niet nieuw, de proef moet alleen uitmaken of er de gewenschte nauwkeurigheid mede bereikt wordt.

Als eerste proef nam ik eene lens, die ik gewoonlijk voor loupe gebruik; en vond daarvan de dikte, met den spherometer van het physisch kabinet der Utrechtsche hoogeschool gemeten, $d = 3{,}30$ mm. en den kromtestraal van voor– en achtervlakte 41 mm. Deze laatste werd door middel van stukjes papier gevonden, die uitgesneden waren langs cirkelbogen, waarvan de stralen met 1 millimeter opliepen en die aan de lens werden aangepast.

De afstand der hoofdpunten k kan wellicht het eenvoudigst aldus berekend worden. Stel de kromtestralen der vóór- en achtervlakten r en r', positief als het kromtemiddelpunt aan de zijde der lens ligt, waar het licht heen gaat, stel de dikte der lens $= d$, en stel nu

$$\left.\begin{array}{l} \delta = \dfrac{n-1}{n}\, d, \\ \text{dan is} \\ k = \delta - \dfrac{\delta^2}{(n-1)(r-r'-\delta)} = \delta + \dfrac{f\delta^2}{rr_\prime} \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Is nu de lens gelijkbol, zoo als de loupe was, dan is $r' = -r$, derhalve

$$k = \delta - \frac{\delta^2}{(n-1)(2r-\delta)} = \delta - \frac{f\delta^2}{r^2}$$

of voor de loupe, aannemende $n = 1{,}53$

$$\delta = 1{,}1764 \quad k = 1{,}142 - 0{,}030 = 1{,}11 \text{ mm. *)}$$

waarvoor werd aangenomen 1,1 mm.

Voor eene platbolle lens is r of $r' = \infty$, en $k = \delta$.

Aannemende voor den brekingscoëfficiënt der lens 1,53, vindt men voor den brandpuntsafstand

$$f = \frac{1{,}53}{0{,}53} \times \frac{41^2}{1{,}53 \times 82 - 0{,}53 \times 3{,}3} = 39{,}2.$$

De afstand der beide haren moet dus grooter dan $156{,}8 + 1{,}1 = 157{,}9$ mm. zijn.

Liever nog, dan door de beide haren in aanraking te brengen, bepaalde ik de correctie van nonius II door in verschil-

---

*) Bij gelijkbolle lenzen kan men ook de meting of berekening van den kromtestraal outgaan, mits de brandpuntsafstand van de achtervlakte of van het midden af gemeten is. Want men heeft ook

$$k = (n-1)\,\frac{d}{n} - \frac{1}{4f}\left(\frac{d}{n}\right)^2 + \frac{1}{8(n-1)f^2}\left(\frac{d}{n}\right)^3 - \frac{5}{64(n-1)^2 f^3}\left(\frac{d}{n}\right)^4 + \text{enz.}$$

of ook

$$\frac{k}{f} = (n-1)\,\frac{d}{fn} - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{fn}\right)^2 + \frac{1}{8\,(n-1)}\left(\frac{d}{fn}\right)^3 - \frac{5}{64\,(n-1)}\left(\frac{d}{fn}\right)^4 + \text{enz.}$$

Men kan dus eerst $k = (n-1)\,\frac{d}{n}$ nemen, daarmede eene verbeterde waarde van f afleiden, die dan weer eene verbeterde waarde van n geeft, enz.

lende standen den afstand der ringen, waarover de haren gespannen waren, tusschen een passer te nemen, den afstand der punten van dien passer op de schaal zelve te meten, en hem te vergelijken met de aanwijzing van den nonius.

De correctie van nonius I wordt geëlimineerd, daar men slechts de verplaatsing der lens noodig heeft, en deze gevonden wordt door het verschil van twee aanwijzingen van den nonius te nemen. Ik nam nu 10 bepalingen, telkens bij verschillende waarde van E; de plaatsing der lens werd telkens tweemaal gezocht, en bij mindere overeenkomst nog eene derde keer. Ziehier de gevondene aflezingen, allen in millimeters, en den berekenden brandpuntsafstand.

E = Afl. Nonius II + 0,3	Aflezing Nonius I. 1e Afl.	Aflezing Nonius I. 2e Afl.	*e*		*f*
240	189,7 189,8	49,4 49,3	140,3 140,5	140,4	39,10
230	179,2 179,15	50,1 50,1	129,1 129,05	129,075	39,03
220	168,12 168,16	51,0 51,0	117,12 117,16	117,14	39,05
210	157,1 157,0	51,9 52,0	105,2 105,0	105,1	39,01
200	145,3 145,2	53,26 53,25	92,04 91,95	92,0	39,09
190	134,0 133,7 134,0	55,35 54,7 55,5	78,65 79,0 78,5	78,7	39,03
180	121,7 121,5	57,6 57,45	64,1 64,05	64,075	38,99
170	108,2 108,0	61,73 61,45	46,47 46,55	46,51	39,02
160	92,5 89,4 90,55	68,9 68,75 68,0	23,6 20,65 22,55	22,3	38,94
150	84,8 84.8	73,2 73,05	11,6 11,75	11,675	39,01

Het gemiddelde der tien bepalingen is 39,03,
de waarschijnlijke fout van elke bepaling ± 0,03 mm.,
〃 〃 〃 〃 〃 〃 ± 0,01 〃 .

Als een tweede voorbeeld moge dienen het onderzoek der vier lenzen, waaruit eene aardsche oogbuis was zamengesteld. Voor elke lens nam ik twee afstanden E der haren; bij elke E werd de bepaling der twee standen, waarin het eene haar met het beeld van het andere zamenviel, twee malen verricht; de dikte der lenzen, respectivelijk 1,49; 3,12; 1,73 en 2,37 millimeters, was met den spherometer bepaald; en ter bepaling van de afstanden der hoofdpunten was weder als brekingscoëfficiënt aangenomen $n = 1,53$. Eenmaal voor den brandpuntsafstand eene benadering kennende, kan natuurlijk na meting van den kromtestraal der bolle oppervlakte eene nauwkeuriger bepaling van n plaats hebben. Op die wijze verkreeg ik, de lenzen van het oog af tellende:

	1e lens.		2e lens.		3e lens.		4e lens.	
	38,89 38,85	38,87	50,74 50,67	50,705	50,60 50,54	50.57	41,82 41,72	41,77
	38,91 38,79	38,85	50,63 50,55	50,59	50,71 50,76	50,735	41,75 41,78	41,765
gemiddeld		38,86		50,65		50,65		41,77

De aangehaalde voorbeelden zullen voldoende zijn, om de doelmatigheid van den toestel en van de methode aan te toonen. De aflezingen geschiedden tot tiende deelen van millimeters, en men ziet dat de brandpuntsafstanden, bij eenige malen herhaalde bepaling, tot binnen die limiet nauwkeurig kunnen gevonden worden. Eene grens wordt aan die nauwkeurigheid van zelve gesteld door de spherische aberratie der lenzen, die veroorzaakt, dat de randen een korteren brandpuntsafstand hebben, dan het midden der lens, en, wil men het hinderlijke hiervan ontgaan door voor de lens een scherm te plaatsen met eene ronde opening, die alleen het midden der lens vrij laat, dan wordt toch de lichtkegel zoo scherp, dat er in het stellen van de lens,

zoo dat de haren elkanders beeld dekken, dezelfde onzekerheid blijft heerschen.

Wanneer het te doen is om den equivalenten brandpuntsafstand van een lenzenstelsel, bijv. een oculair of een mikroskoop-objektief te bepalen, dan is het altijd eenigszins lastig, dat men voor de toepassing dezer methode den afstand der hoofdpunten van het stelsel bepalen moet. Laat het lenzenstelsel zich uit elkander nemen, zoodat men van elke lens de krommingen, dikten en brandpuntsafstanden en ook de onderlinge afstanden der lenzen kan uitmeten, dan is dit bezwaar niet onoverkomelijk, maar laat het zich niet uit elkander nemen, zoo als sommige mikroskoop-obiectieven, dan kan de methode slechts benaderde resultaten geven. Doch dan kan, met behulp van onzen toestel, met zeer goed gevolg worden toegepast de methode, door ons geacht medelid MAC GILLAVRY bedacht en in het *Maandblad voor Natuurwetenschappen*, 5e jaargang, N°. 5 (3 April 1875) bekend gemaakt. Bij deze methode worden door uitmeting de vergrootingen (of verkleiningen) bepaald, die de lens van een voorwerp bij twee verschillende afstanden geeft; zijn die twee vergrootingen verschillend, dan zijn ook verschillend: zoowel de afstand van voorwerp tot lens, als de afstand van lens tot beeld, en ook de afstand van voorwerp tot beeld.

Nu heeft de heer MAC GILLAVRY aangetoond, dat het slechts noodig is, behalve de vergrootingen, de *verandering* van één der drie even genoemde soorten van afstanden te meten, en dat dan de brandpuntsafstand berekend kan worden zonder dat daarbij de kennis der ligging der hoofdpunten, of die van hunnen afstand een vereischte is. Het bewijs der daarbij dienende formulen is licht te vinden en in zijne boven aangehaalde mededeeling gegeven. Die formulen zijn de volgende:

Noem den afstand van het voorwerp tot het voorste hoofdpunt a,

den afstand der hoofdpunten x,

den afstand van het 2e hoofdpunt tot het beeld b,

de vergrooting γ,

en geeft men deze letters voor eenen tweeden stand accenten, dan is de afstand van het voorwerp tot het beeld $a + x + b$,

en bij den tweeden stand $a' + x + b'$,
derhalve de vermeerdering van dezen afstand $a' - a + b' - b$, onafhankelijk van x.

Stelt men nu

$$a - a' = k$$
$$b' - b = l$$
$$a' - a + b' - b = h$$

zijnde $h = l - k$, dan heeft men deze drie formulen:

$$f = \frac{h\gamma'\gamma}{(\gamma' - \gamma)(\gamma'\gamma - 1)} = \frac{k\gamma'\gamma}{\gamma' - \gamma} = \frac{l}{\gamma' - \gamma}.$$

De heer MAC GILLAVRY merkt op, dat wanneer γ en $\gamma' > 1$ zijn en $\gamma\gamma'$ groot is, alsdan de 1e en 3e methode de beste is, doch als $\gamma\gamma' > 1$ maar < 2 is, dat dan de tweede aan te raden is. Ook voor de afstanden a en b geeft hij de formulen op, zoodat, wanneer men de afstanden van het voorwerp tot de voorvlakte en van het beeld tot de achtervlakte van het lenzenstelsel bepaald heeft, de ligging der hoofdpunten bekend wordt. Om onzen toestel voor de toepassing dezer methode geschikt te maken, heb ik bij den heer DUMOULIN te Parijs eén paar verdeelingen op glas laten maken, van halve millimeters, de eene komt in e, en wordt dus door het Ramsdensch oculair c onmiddellijk gezien, de andere komt in r, en wordt dus door de lens p vergroot, zoodat de vergrooting gemakkelijk kan worden waargenomen. Voor het geval, dat men die zeer groot wil nemen, heb ik van denzelfden kunstenaar ook eene verdeeling in tiende millimeters, welke dan in r moet komen, maar de strepen van die verdeeling zijn zoo fijn, dat hun beeld bij de thans aan den toestel aanwezige verlichting moeilijk zichtbaar is.

Na toepassing dezer methode op verschillende lenzen is het mij voorgekomen, dat het altijd zaak zal zijn, eene zoo groot mogelijke met eene zoo klein mogelijke vergrooting te vereenigen; men zou even goed eene zoo sterk mogelijke verkleining met eene zoo zwak mogelijke verkleining kunnen verbinden, indien de fijnheid der verdeelingen niet het gebruik van verkleiningen, althans van eenigszins sterke verkleiningen, uitsloot. Daar verder h, de afstand van voorwerp en beeld, het meest

verandert, d. i. meer dan k of l, heb ik eerst de eerste methode toegepast en de formule

$$f = \frac{h\gamma'\gamma}{(\gamma'-\gamma)(\gamma'\gamma-1)}$$

gebruikt. Bij eene vergrooting is $\gamma > 1$, bij eene verkleining < 1, het is dus geene zaak eene vergrooting met eene verkleining te verbinden, daar dan $\gamma'\gamma$ dicht bij de éénheid en $\gamma'\gamma - 1$ dus te klein wordt; ja, voor de verbinding eener vergrooting met eene even sterke verkleining d. i. voor $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$ zou men verkrijgen, zoowel $\gamma'\gamma - 1 = 0$ als $h = 0$, en dus

$$f = \frac{0}{0};$$

de lens neemt dan bij onveranderden afstand van voorwerp tot beeld, juist de twee standen in, bij de methode van BESSEL gebruikelijk.

Is daarentegen bijv. $\gamma = 7$ en $\gamma' = 1$, dan verkrijgt men $f = \frac{7}{36}\,h$, dus eene zeer gunstige bepaling.

Ik heb van verscheidene lenzen op beide wijzen brandpuntsafstanden herhaaldelijk bepaald; het is mij daarbij gebleken, dat voor lenzen met niet al te kleinen brandpuntsafstand, bijv. > 20 mm., mits men de ligging der hoofdpunten bepale, de methode van BESSEL nauwkeuriger is, daar bij de methode van MAC GILLAVRY het altijd moeilijk is, de vergrooting met hooge juistheid aan te geven; men kan die moeilijk nauwkeuriger dan tot tiende gedeelten van eenheden schatten. Daarentegen heeft de laatste het groote voordeel dat zij de bepaling van den afstand der hoofdpunten niet behoeft, en dus veel spoediger een resultaat geeft, terwijl zij ook voor lenzen met zeer korten brandpuntsafstand, bijv. < 10 mm., (objectieven van mikroskopen,) stellig de voorkeur wegdraagt.

De vraag verdient hier nog overweging, of bij aanwending der methode van BESSEL niet door het verbinden van meer dan ééne bepaling van E en b, ook de afstand der hoofdpunten k

als eene tweede onbekende kan ingevoerd worden; immers door een aantal bepalingen bij verschillende waarden van E te doen, zou men door de methode der kleinste kwadraten wellicht eene vrij nauwkeurige waarde van k kunnen verkrijgen en derhalve de berekening van dien afstand na uitmeting der krommingen, brandpuntsafstanden en onderlinge afstanden der lenzen kunnen ontgaan. Bij de proef blijkt echter, dat die methode veel bezwaar in heeft en althans geene *nauwkeurige* bepaling van k oplevert, een gevolg daarvan, dat de twee onbekenden in de vergelijkingen steeds factoren met hetzelfde teeken verkrijgen.

Ik zal ten slotte enkele voorbeelden geven van resultaten met beide methoden verkregen.

N°. 1. Een Ramsdensch oculair, behoorende bij den dradenmikrometer van den zesvoets kijkers van FRAUNHOFER der Utrechtsche sterrewacht.

De toepassing der methode MAC GILLAVRY gaf

(1)	$\gamma = 9$	schaal	223,6
(2)	4,5		141,6
(3)	2,6		108,7
(4)	2,0		99,2
(5)	1,0		90,0

Hieruit door verbinding

van	(1)	met	(3)	$f = 18,75$
"	(2)	"	(4)	18,82
"	(1)	"	(5)	18,77
"	(2)	"	(5)	18,95

Het gemiddelde dezer 4 bepalingen is 18,82. De *waarschijnlijkste* waarde is natuurlijk slechts door ingewikkelde berekeningen te vinden, waarbij de onzekerheid der γ's noodzakelijk bekend moet zijn.

Voor de toepassing der methode van BESSEL had ik gemeten

1e lens	$f = 27,0$	dikte = 1,00	mm.
2e "	35,0	3,00	"

afstand der naar elkander toegekeerde vlakten der lenzen 11,5 mm.

Hieruit vindt men voor het geheele oculair:

$$k = -\ 1{,}3$$
$$f = \ 18{,}72$$

doch de methode van BESSEL toepassende, vond ik, aannemende $k = -\ 1{,}3$:

E	e	f
118,8	73,05	18,93
110,0	63,35	18,81
100,0	51,05	18,89
90,0	38,1	18,85
80,0	22.8	18,73
74,9	10,1	18,71
	Gemiddeld	18,82,

komende dus in dit geval juist met de boven gevondene waarde overeen.

N°. 2. Een objectief van een mikroskoop van WEGENER te Berlijn, dienende voor een universaal-instrument.

Hier gaf de methode MAC GILLAVRY de volgende resultaten:

N°.	Aflezing der schaal	γ
1	381,4	10,4
2	362,9	9,45
3	330,0	8,7
4	300	7,7
5	270	6,7
6	240	5,6
7	210	4,5
8	180	3,4
9	150	2,25
10	140	1,775
11	135	1,475
12	134	1,4
13	133	1,3305
14	132	1,19
15	131	1,111
16	130	1,0

Hieruit vindt men voor den brandpuntsafstand:.

Uit	N°.	1	en	9	f =	29,66
"	"	2	"	10		29,50
"	"	3	"	11		29,27
"	"	4	"	12		29,04
"	"	5	"	13		28,73
"	"	6	"	16		28,81
"	"	7	"	15		29,07
"	"	8	"	16		29,52

Deze uitkomsten loopen meer uiteen dan de voorgaande, maar f is hier ook grooter. Het vraagstuk, uit al de bepalingen de waarschijnlijkste waarde te verkrijgen, wordt buitengewoon omslachtig; evenzoo de berekening der gewichten van de verschillende bepalingen van f, zoo even verkregen; stellen wij daarom die gewichten eenvoudigheidshalve gelijk, dan is het arithmetisch midden van allen 29,20 mm.

Het mikroskoop-objectief bestond uit twee achromatische lenzen, en kon uit elkander genomen worden. Voor de voorste lens gaf de methode van BESSEL, aannemende, zoo als door uitmeting en berekening gevonden was, $k = 0,85$:

E	e	f
260	101,9	54,77
240	70,2	54,64
	gemiddeld	54,70

voor de achterste lens, evenzoo $k = 0,60$ nemende,

E	e	f
240	42,0	58,01
235	23,3	58,02
	gemiddeld	58,015

Beide deze achromatische lenzen bestonden uit eene platholle flintglas- en eene gelijkbolle (equiconvexe) crownglaslens. De dikten, met een spherometer gemeten, waren

van de eerste achromatische lens 2,26 mm.,
" " tweede " " 1,61 " ,
en de tusschenruimte tusschen de lenzen 3,13 " .

Een vroeger onderzoek van dergelijke achromatische lenzen van denzelfden maker had mij geleerd, dat de beide hoofdpunten van eene dergelijke achromatische lens liggen, te rekenen van de platte voorvlakte af:

1e	hoofdpunt	op 0,70	der	dikte,
2e	〃	〃 1,075	〃	〃

dus op 0,075 vóór de bolle vlakte.

Hieruit vindt men: afstand tusschen het tweede hoofdpunt der eerste en het eerste hoofdpunt der tweede lens = 4,1 mm.

Afstand der hoofdpunten van het geheele stelsel:

$$k = 0{,}85 + 0{,}60 - \frac{4{,}1^2}{54{,}7 + 58{,}0 - 4{,}1} = 1{,}45 - 0{,}155 = 1{,}3.$$

Brandpuntsafstand van het geheele stelsel

$$f = \frac{54{,}7 \times 58{,}0}{54{,}7 + 58{,}0 - 4{,}1} = 29{,}21,$$

komende zeer goed uit met de vorige bepaling.

De methode van BESSEL op het geheele objectief toepassende, verkreeg ik, den afstand $k = 1{,}3$ aannemende:

E	e	f
160	80,2	29,54
155	74,0	29,52
150	67,4	29,54
145	60,5	29,56
140	53,3	29,56
135	45,3	29,59
130	37,2	29,49
125	26,9	29,46
120	8,5	29,52
	gemiddeld	29,53

Om in plaats van 29,53, 29,20 te verkrijgen, zou k in plaats van 1,3, 2,35 mm. moeten zijn; doch dit is niet wel mogelijk. Men ziet dat de *onderlinge* overeenkomst niets te wenschen overlaat, en dat het dus voornamelijk aankomt op het zorgvul-

dig bepalen van k, om eene daaraan evenredige nauwkeurigheid te bereiken.

Onder de resultaten door de methode MAC GILLAVRY verkregen zijn er drie, de 1e, 2e en laatste, die van dit resultaat niet veel afwijken; dat de anderen meer afwijken, moet zonder twijfel aan de moeilijke bepaling der vergrootingen worden toegeschreven, waardoor wellicht eene constante fout begaan werd.

Later heb ik meermalen de derde methode van den heer MAC GILLAVRY gebruikt, die eenige voordeelen boven de eerste twee aanbiedt. Vooreerst is de berekening volgens de formule

$$f = \frac{l}{\gamma' - \gamma}$$

eenvoudiger dan volgens de formule $\frac{h\,\gamma'\,\gamma}{(\gamma' - \gamma)\,(\gamma'\gamma - 1)}$, maar, wat van meer belang is, men kan het aantal aflezingen van den nonius en bepalingen der daarmede overeenstemmende vergrooting herhalen, zooveel men wil, en men zal daardoor een aantal lineaire vergelijkingen verkrijgen, die door de methode der kleinste kwadraten zijn op te lossen. Want men kan bovenstaande vergelijking schrijven onder den vorm

$$(\gamma' - \gamma)\, f = \mathrm{L}' - \mathrm{L}$$

waar L en L′ de aflezingen van nonius I beteekenen, bij de vergrootingen γ en γ'. Uit deze leidt men onmiddellijk af

$$\left.\begin{matrix} \gamma' f = \mathrm{L}' + \mathrm{C} \\ \gamma f = \mathrm{L} + \mathrm{C} \end{matrix}\right\} \text{ of wel } \left\{\begin{matrix} \gamma' f - \mathrm{C} = \mathrm{L}' \\ \gamma f - \mathrm{C} = \mathrm{L} \end{matrix}\right.$$

Zoovele bepalingen men derhalve genomen heeft, zoovele vergelijkingen met de beide onbekenden f en C heeft men ook, die men zeer licht door de methode der kleinste kwadraten kan oplossen. Het is echter doelmatiger de vergelijkingen aldus te schrijven

$$x + \mathrm{L}\, y = \gamma$$

zijnde dan

$$x = \frac{C}{f} \text{ en } y = \frac{1}{f};$$

daardoor is het mogelijk eerst eene benaderde oplossing uit te voeren, aan al de γ gelijk gewicht gevende, en later, zoo er verschil blijkt te bestaan, dit in rekening te brengen. Doch die hooge nauwkeurigheid zal wel nooit vereischt worden.

Als voorbeeld voor eene dergelijke toepassing strekke de bepaling van den brandpuntsafstand eener betrekkelijk zeer dikke lens, eene zoogenaamde cylindrische loupe. Deze lens bestaat uit eenen glascilinder van 14,0 mm. hoogte en 15,6 mm. dikte, waarvan boven- en ondervlakte nog een bolvormig segment dragen, zoodat de dikte der lens in de as 19,67 mm. bedraagt.

Deze lens werd zoo na mogelijk met hare as in de richting der verdeelde liniaal a gesteld en achtereenvolgens de onderstaande waarnemingen verricht. Beide de noniussen werden afgelezen, nonius I diende, om volgens de derde formule van den heer MAC GILLAVRY den brandpuntsafstand te bepalen, nonius II om daarna den afstand der knooppunten te vinden, immers deze gaf, na voor indexcorectie verbeterd te zijn, den afstand tusschen voorwerp en beeld, maar uit de vergelijkingen

$$\frac{a}{b} = \gamma \text{ en } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

volgt:

$$a = (\gamma + 1) f$$

$$b = \frac{\gamma + 1}{\gamma} f$$

$$a + b = \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} f.$$

Derhalve, de verbeterde aflezing van nonius II, II noemende:

$$k = \text{II} - (a + b)$$

$$= \text{II} - \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} f.$$

Zie hier nu het resultaat dezer metingen:

L	γ	ε Berekening — Waarneming	$\frac{(\gamma+1)^2}{\gamma} f$	II	k
280	17,0	+ 0,04	316,3	318,35	2,05
270	16,45	— 0,02	307,1	308,6	1,5
260	15,9	— 0,07	298,07	298,83	0,8
250	15,15	+ 0,08	285,70	288,87	3,2
240	14,7	— 0,07	278,25	278,8	0,6
230	14,0	+ 0,03	266,7	269,8	3,1
220	13,4	+ 0,02	257,4	259,8	2,4
210	12,8	+ 0,02	246,9	249,8	2,9
200	12,15	+ 0,07	236,2	239,45	3,25
190	11,7	— 0,08	228,7	229,45	0,75
180	11,0	+ 0,02	217,2	219,0	1,85
170	10,4	+ 0,01	207,3	209,2	1,9
160	9,85	— 0,04	198,3	199,3	1,0
150	9,2	0,00	187,6	189,4	1,8
140	8,6	0,00	177,8	179,5	1,7
130	8,0	0,00	168,0	169,6	1,6
120	7,4	0,00	158,2	159,75	1,55
110	6,8	— 0,01	148,5	149,9	1,4
100	6,2	— 0,01	138,7	140,2	1,5
90	5,6	— 0,01	129,0	130,55	1,55
80	5,0	— 0,01	119,5	121,0	1,5
70	4,37	+ 0,01	109,5	111,5	2,0
60	3,8	— 0,02	100,6	102,0	1,4
50	3,2	— 0,02	91,46	92,65	1,19
40	2,55	+ 0,02	82,0	83,75	1,75
30	1,98	— 0,01	74,4	75,65	1,25
20	1,32	+ 0,05	67,7	69,25	1,55
15	1,07	0,00	66,45	67,5	1,05
14	1,00	+ 0,01	66,36	67,9	1,55
				Gemiddeld:	1,71

De methode der kleinste kwadraten, op de verkregene vergelijkingen toegepast, gaf:

$$29\,x + 4079\,y = 250,59$$
$$4079\,x + 771721\,y = 47179,75$$

hieruit

$$x = 0,163$$
$$y = 0,060276$$

derhalve

$$f = 16,59.$$

De middelbare fout van elke bepaling van γ voor sterke en zwakke vergrootingen gelijk onderstellende, werd deze uit de ε's gevonden $= \pm$ 0,037, en derhalve de w. fout van y:

$$0,6745 \times \pm \frac{0,037}{\sqrt{197996}} = \pm\, 0,0000567$$

en aangezien

$$\partial f = - f^2 \partial y$$

is:

$$w \text{ fout van } f = \pm\, 0,02 \text{ mm.}$$

Voor eene dubbel-bolle lens in het algemeen is

$$f = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r\,r'}{n(r'-r) + (n-1)\,d}$$

dus als $r' = -r$ is

$$f = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r^2}{2\,n\,r - (n-1)\,d}$$

derhalve, als d, r, r' en f bekend zijn.

$$(r' - r + d)\,n^2 - \left(\frac{r\,r'}{f} - r + r' + 2\,d\right) n + d = 0$$

of als $r' = -r$ is:

$$(2\,r - d)\,n^2 - \left[\frac{r^2}{f} + 2\,(r-d)\right] n - d = 0.$$

Bij ons is $r = -r' = 12,125$, $d = 19,67$ $f = 16,59$, derhalve

$$4,58\,n^2 + 6,2284\,n - 19,67 = 0$$

waaruit

$$n = 1,501 \text{ of } -2,861,$$

waarvan de eerste wortel die is, welken wij zoeken.

De waarden van r, f en d nu substitueerende in de formule (3), hebben wij

$$k = 6{,}566 - \frac{6{,}566^2}{0{,}501 \times 17{,}684}$$
$$= 6{,}566 - 4{,}865 = 1{,}70,$$

gevende dus volkomene overeenkomst met de zoo even gevondene waarde.

De methode van BESSEL toepassende, verkreeg ik, $k = 1{,}70$ nemende,

E	e		f
110,0	67,65 67,30	67,48	16,56
100,0	55,9 55,8	55,85	16,65
90,0	44,3 44,35	44,325	16,51
80,0	30,7 30,9	30,8	16,55
70,0	12,7 12,6	12,65	16,49
		Gemiddeld	16,55

gevende dus een verschil van 0,04 met de door de methode MAC GILLAVRY gevondene waarde, een verschil, dat binnen de grenzen valt der waarnemingsfouten.

Utrecht, 28 Dec. 1877.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS DER KINAMINE.

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.

In het jaar 1872 werd door O. HESSE in den bast van eene te Darjeeling in Britsch Indië gekweekte Cinchona Succirubra een nieuw alkaloïde ontdekt, waaraan door hem de naam van kinamine werd gegeven. De eerste opgaven daaromtrent vindt men in het 5e deel van de *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft*, bl. 265—266.

Later werd door denzelfden scheikundige (*Ann. der Chem. u. Pharm.* 166, bl. 266 en verv.) een meer uitvoerig onderzoek omtrent kinamine in het licht gegeven, terwijl voor korten tijd (*Ber. d. d. chem. Gesellschaft* X, bl. 2157 en verv.) door hem eenige mededeelingen werden gedaan omtrent de thans bekende kina-alkaloïden en daarbij opnieuw de kinamine ter sprake werd gebracht, maar tevens ook de ontdekking van eene daarmede isomere basis, de conkinamine werd aangekondigd.

Het was te verwachten, dat het nieuwe alkaloïde niet uitsluitend aan den bast van de te Darjeeling gekweekte Cinchona Succirubra eigen zou zijn; inderdaad werd het dan ook door DE VRIJ (*Pharm. J. Trans.* [3] 4, p. 609) in een Succirubra-bast van Rungbee, door HOWARD (*Pharm. J. Trans.* [3] 5, p. 1) in den bast van eene uit C. Succirubra en C. Calisaya gewonnene bastaardsoort aangetroffen, en nu onlangs door HESSE (*Ber. der d. chem. Gesellsch.* X, 2157—2158) niet alleen in *alle* door hem onderzochte succirubra-basten van

Java en Britsch-Indië, maar ook in vele Zuid-Amerikaansche, van verschillende Cinchona-soorten afkomstige basten aangetoond, zoodat men het voor uitgemaakt kon houden, dat de kinamine, ofschoon in geringe hoeveelheid voorkomende, toch als een vrij standvastig bestanddeel der echte kinabasten moet worden beschouwd.

Nadat ik mij geruimen tijd onledig had gehouden met het onderzoek omtrent het soortelijk draaiingsvermogen van de voornaamste kina-alkaloïden in vrijen en gebonden toestand, werd bij mij de wensch levendig, ook de nieuw ontdekte kina-basis in dit opzicht na te gaan en zoo mogelijk onze kennis omtrent de eigenschappen van dit gewichtige lichaam aan te vullen. Spoediger dan ik gedacht had werd aan dezen wensch voldaan door de vrijgevigheid van onzen bekenden kinoloog Dr. J. E. DE VRIJ, die mij eene hoeveelheid van ongeveeer 600 gram *quinetum* afstond, te Darjeeling uit den bast van Cinchona Succirubra bereid.

Zooals bekend is wordt onder *quinetum* verstaan het ruwe mengsel van alkaloïden, dat uit eene of andere kina-bast wordt afgescheiden; meer bizonder in Engeland is het onder dien naam bekend. Het praeparaat wordt te Darjeeling bereid door den bast met koud verdund zoutzuur uit te trekken, aan het aftreksel eene zwakke overmaat van sodaloog toe te voegen, het ontstane neêrslag uit te spoelen en te drogen.

Het doet zich voor als een uiterst fijn, stuivend, licht geel gekleurd poeder. Het is betrekkelijk rijk aan cinchonine, cinchonidine en amorphe alkaloïden maar arm aan kinine, en bevat daarvan nauwelijks meer dan het bedrag aan kinamine, zooals uit het volgende blijken zal.

ANALYSE VAN HET QUINETUM.

Het kwam mij wenschelijk voor, alvorens uit de hoofdmassa de kinamine af te scheiden, eene quantitatieve analyse van het quinetum uit te voeren. Daarbij ging ik op de volgende wijze te werk:

Nadat een qualitatief onderzoek had bevestigd, wat mij door Dr. DE VRIJ was medegedeeld, namelijk dat het quinetum geene

merkbare hoeveelheid kinidine (conchinine van HESSE) bevatte, werd eene afgewogene hoeveelheid (5—10 gram) van het praeparaat onder zachte verwarming in zooveel verdund zoutzuur opgelost, dat de vloeistof slechts even zuur reageerde. De gefiltreerde oplossing werd met eene zwakke overmaat van kalium-natriumtartraat neêrgeslagen en gedurende een etmaal aan zich zelf overgelaten. Daarna werden de afgescheidene tartraten van kinine en cinchonidine afgefiltreerd, voorts met eene matige sterke oplossing van kalium-natriumtartraat en eindelijk met water uitgewasschen. In het luchtdroge mengsel van tartraten werd nu het gehalte aan kinine en cinchonidine bepaald volgens de methode, vroeger door mij (zie *Versl. en Meded.* der Kon. Akad. v. Wetensch 2e Serie, Deel IX, bl. 370 en verv.) beschreven.

De van de beide onoplosbare tartraten afgescheiden vloeistof werd met eene zwakke overmaat van natronloog neêrgeslagen, de neêrslag afgefiltreerd, met water uitgewasschen en op 100° C. gedroogd. De waschwaters werden met het filtraat uitgedampt, om sporen van alkaloïden, die nog opgelost konden gebleven zijn, af te scheiden; de hoeveelheid daarvan bleek echter zoo gering te zijn, dat ik meende die gerust te kunnen verwaarloozen.

Het gedroogde poeder, dat nu hoofdzakelijk cinchonine, kinamine en amorphe alkaloïden moest bevatten, werd gewogen en volledig met absoluten aether uitgetrokken. Toen de aetherische oplossingen zachtjes tot droogwordens verdampt waren en het terugblijvende op nieuw met absoluten aether werd uitgetrokken bleef eene geringe hoeveelheid cinchonine achter, die bij de hoofdmassa van het na uittrekking met aether overgeblevene werd gevoegd. Uit het verschil tusschen de som der met aether uitgetrokkene alkaloïden en de totale hoeveelheid verkregene cinchonine kon het gehalte aan amorphe alkaloïden en kinamine te samen worden opgemaakt.

Om nu de kinamine althans bij benadering te bepalen, trok ik partij van de eigenschap, die dit alkaloïde bezit, van wèl zeer goed bij kookhitte maar zeer weinig bij gewone temperatuur in spiritus van 50 pCt. oplosbaar te zijn. Ik trok alzoo het na verdamping van het aetherische extract overblijvende bij de kookhitte met de bedoelde vloeistof uit. De geheele massa loste op, maar bij bekoeling scheidde zich de kinamine voor

het grootste deel af, terwijl daarentegen hoofdzakelijk de amorphe alkaloïden in oplossing bleven. De afgescheidene kinamine werd nu door eenen BUNSEN'schen filtreertoestel afgescheiden, met een weinig slappen spiritus uitgespoeld, gedroogd en gewogen.

Hetgeen bij het verdampen van de zwak-alcoholische oplossing na afscheiding van de kinamine overbleef en zich na het drogen op 100° C. als eene doorschijnende harsachtige massa voordeed, werd als amorphe alkaloïden in rekening gebracht.

Deze ter afscheiding van kinamine gevolgde weg, hoe gebrekkig ook, komt mij, zelfs ter bereiding van kinamine op grootere schaal, verkieselijker voor dan de door HESSE in zijne eerste verhandeling (*Ann. der Ch. u. Ph.* 166) aangegevene methode, welke daarop heet te berusten, dat het kinamine-chloroplatinaat in water tamelijk oplosbaar is, terwijl daarentegen de chloro-platinaten der amorphe alkaloïden daarin nauwelijks worden opgenomen.

Het is mij gebleken, dat het bedoelde kinamine-chloroplatinaat *zeer weinig* in water oplosbaar is, zoodat het, eenmaal gevormd, met water kan worden uitgewasschen, zonder dat het merkbaar in hoeveelheid vermindert. Desniettemin is het waar, dat, wanneer men bij eene oplossing van kinamine-hydrochloraat, die vrij zoutzuur bevat, eene oplossing van het *zoogenaamde* platinachloried voegt, alleen bij groote concentratie een neerslag ontstaat.

Ook is het mij opgevallen, dat men, eene oplossing van geheel neutraal kinamine-hydrochloraat met eene overmaat van het onder den naam van platina-chloried doorgaande reactief vermengende, nooit de geheele hoeveelheid kinamine neerslaat, maar een aanzienlijk deel daarvan in het van het neerslag afgescheiden vocht terugvindt.

De verklaring daarvan meen ik te mogen zoeken in het feit, dat het door oplossing van platina in koningswater bereide, van zoutzuur zooveel mogelijk bevrijde reactief, zooals de onderzoekingen van WEBER en TOPSÖ en de laatste beslissende proeven van JÖRGENSEN (*J. f. pr. Chem. Neue Reihe* XVI, 345 en verv.) hebben aangetoond, niet uit waterhoudend *platinachloride*, maar uit waterhoudend *platinachloorwaterstofzuur* ($Pt\,Cl_6\,H_2 + 6\,H_2O$) bestaat.

Bij het toevoegen van eene oplossing dezer verbinding aan

eene oplossing van neutraal kinamine-hydrochloraat wordt zoutzuur vrij en dit laatste oefent, hetzij alleen, hetzij in vereeniging met de overmaat van toegevoegd reactief een oplossenden invloed op het kinamine-chloroplatinaat uit. Is dit laatste eenmaal met water uitgewasschen, zoo blijkt het slechts in zeer geringe mate daarin te worden opgelost.

Bij de quantitatieve analyse van het quinetum heb ik eindelijk nog eene bepaling uitgevoerd van de geringe hoeveelheid water, die het schijnbaar geheel droge poeder bevatte en van het natriumcarbonaat, dat daarin ten gevolge van de wijze van bereiding en onvolledig uitwasschen was teruggebleven.

De uitkomst van het onderzoek, als gemiddelde van drie tamelijk wel overeenkomende analysen was de volgende

Cinchonine.	37.0	pCt.
Kinine	6.1	〃
Cinchonidine.	22.9	〃
Kinamine	4.5	〃
Amorphe alkaloïden. .	21.1	〃
Natriumcarbonaat . .	2.9	〃
Water	2.7	〃
	97.2	pCt.

BEREIDING VAN KINAMINE UIT HET QUINETUM VAN DARJEELING.

Ter bereiding van kinamine uit de hoofdmassa van het ter mijner beschikking gestelde quinetum, werd dit praeparaat in zoo weinig mogelijk verdund zoutzuur opgelost en aan de oplossing eene meer dan toereikende hoeveelheid kaliumnatriumtartraat toegevoegd, om kinine en cinchonidine in tartraten om te zetten. Na eenige dagen rust werd de vloeistof van het gevormde bezinksel afgefiltreerd en met eene zwakke overmaat van natronloog neergeslagen.

Het uitgewasschen neerslag werd nu herhaaldelijk met spiritus van 60 Gew. Proc. uitgekookt; nadat de alcoholische vloeistoffen door bezinking eenigszins waren geklaard, werden zij voorzichtig afgegoten en afgefiltreerd. Zij bevatten hoofdzake-

lijk amorphe alkaloïden en kinamine nevens eene geringe hoeveelheid cinchonine. De beide laatste alkaloïden zetten zich bij bekoeling allengs in vlokken af, die door middel van een BUNSEN'schen filtreertoestel van de moederloog werden afgezonderd, verder met slappen spiritus werden afgewasschen en gedroogd. De zooeven beschrevene uittrekking met slappen spiritus werd met het teruggeblevene zoo lang voortgezet, totdat het afgefiltreerde vocht na verloop van een etmaal geene merkbare hoeveelheid kinamine meer afzette.

Om de onreine geelachtig gekleurde kinamine te zuiveren, werd zij eerst met absoluten aether uitgetrokken. Hierbij bleef eene niet onaanzienlijke hoeveelheid cinchonine terug. Het door verdamping van de aetherische vloeistof verkregen overschot werd nu bij de kookhitte in alcohol van 80 Gew. Proc. opgelost. Bij bekoeling scheidden zich witte op het gewone kininesulfaat gelijkende naalden van bijna zuivere kinamine af. Deze alweder door een BUNSEN'schen filtreertoestel afgezonderd en met slappen spiritus uitgespoeld, werden in een of ander goed kristalliseerbaar neutraal zout omgezet en uit de oplossing daarvan werd eindelijk het alkaloïde door ontleding met natron afgescheiden, en uit alcohol gekristalliseerd. HESSE vermeldt in zijne verhandeling over kinamine (*Ann. der Chem. u. Pharm.* 166) alleen het hydroiodraat als gemakkelijk kristalliseerbaar zout; zooals later blijken zal, zijn echter ook het nitraat, chloraat en perchloraat zeer goed in kristallen te verkrijgen. Het eerste der drie genoemde verbindingen, dat betrekkelijk het meest in water oplosbaar is, leent zich het best ter verkrijging van eene zuivere kinamine-verbinding.

Langs dezen vrij tijdroovenden en omslachtigen weg heb ik uit den ganschen beschikbaren voorraad aan quinetum slechts 20 gram zuivere kinamine kunnen bereiden. De slap alcoholische oplossingen bevatten nog eene zekere hoeveelheid van dit alkaloïde, waarvan de afscheiding met vele bezwaren gepaard ging en ten deele onmogelijk was. Een deel daarvan kon ik meester worden, door de alcoholische moederloogen langzaam te laten verdampen. Van lieverlede zette zich dan eene laag van amorph alkaloïde uit het vocht af, en daarin vormden zich allengs zeer net gevormde tetragonale zuiltjes van kinamine, die

soms eene lengte hadden van 2 à 3 millimeters en eene dikte van 1 millimeter. Goot men het bovenstaande vocht af en behandelde men de laag van gemengde alkaloïden met spiritus van 60 Gew. Proc., zoo losten de amorphe alkaloïden op, maar de kristalletjes van kinamine bleven nagenoeg ongedeerd achter.

SAMENSTELLING EN EIGENSCHAPPEN DER KINAMINE.

HESSE heeft in zijne verhandeling over kinamine (*Ann. der Chem. u. Pharm.* 166) aan dit lichaam de formule $C_{20}H_{26}N_2O_2$ toegekend en wel op grond van de resultaten, bij de elementair-analyse van het vrije alkaloide en bij de bepaling van het iodium-gehalte van het hydroiodaat verkregen. In het laatst van het voorgaande jaar echter (*Ber. der deutschen chemischen Gesellschaft,* deel X) neemt hij de formule $C_{19}H_{24}N_2O_2$ aan en wel, omdat bij de omzetting van kinamine in apokinamine (eene nieuwe basis, die volgens hem aan de formule $C_{19}H_{22}N_2O$ beantwoordt) onder den invloed van broomwaterstof geen methylbromied gevormd wordt; iets dat *wèl* en zelfs tot een bedrag van 25 pCt. van het gewicht der oorspronkelijke stof zou moeten geschieden, wanneer de eerst voor kinamine aangenomene formule de juiste was. ($C_{20}H_{26}N_2O_2 + BrH$ zouden dan namelijk geven: $C_{19}H_{22}N_2O + H_2O + CH_3Br$.)

Daar HESSE nog geene analysen van de door hem verkregene verbindingen heeft openbaar gemaakt en zich tot eene korte uiteenzetting van de door hem verkregene uitkomsten heeft bepaald, is het voor 's hands onmogelijk, om de wetenschappelijke waarde van de door hem bijgebrachte gronden te beoordeelen.

De analysen van kinamine, die door mij werden verricht, gaven de volgende uitkomsten:

1) 0.2246 gr. kinamine gaven bij verbranding 0.6045 gr. CO_2 en 0.1702 gr. H_2O.

2)	0.2088 gr.	kinamine	gaven	0.5613 gr.	CO_2	en	0.1297 gr.	H_2O.
3)	0.2382 〃	〃	〃	0.6413 〃	〃	〃	0.1746 〃	〃
4)	0.2206 〃	〃	〃	0.5913 〃	〃	〃	0.1607 〃	〃
5)	0.2356 〃	〃	〃	0.6348 〃	〃	〃	0.1758 〃	〃
6)	0.2124 〃	〃	〃	0.5708 〃	〃	〃	0.1628 〃	〃
7)	0.2166 〃	〃	〃	0.5840 〃	〃	〃	0.1518 〃	〃

De analysen 1—4 werden verricht met eene laag zilver, en de analysen 5 en 6 met eene rol kopergaas voor in de buis; van het begin der analyse werd langzaam zooveel zuurstof overgevoerd als noodig was om de stof te verbranden zonder het kopergaas aan te tasten. De laatste analyse werd verricht met kopergaas voor in de buis, maar vóór en gedurende de verbranding werd zuivere stikstof doorgevoerd, terwijl vooraf het kopergaas in datzelfde gas werd uitgegloeid; toen er slechts kool in het platinascheepje was overgebleven, werd de verbranding onder doorvoeren van zuurstof voleindigd.

Uit de resultaten van bovenstaande analysen worden de volgende procenten aan C en H berekend. (De bepaling der stikstof liet ik achterwege, omdat die mij na de proeven van HESSE onnoodig voorkwam.)

	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	$C_{19}H_{24}N_2O_2$	$C_{20}H_{26}N_2O_2$
C.	73.6	73.2	73.4	73.1	73.5	73.3	73.5	73.1	73.6
H.	8.4	7.4	8.1	8.1	8.3	8.5	7.8	7.7	8.0

Deze uitkomsten strooken beter met de vroeger dan met de later door HESSE gegevene formule.

Om ze te toetsen aan de grootte van het moleculairgewicht, heb ik eenige bepalingen verricht van het iodiumgehalte van zuiver goed gekristalliseerd kinamine-hydroiodaat.

De uitkomsten van eenige gewichtsanalysen waren deze:

1)	0.7804	gr.	hydroiodaat	gaven	0.4162	gr. AgI.
2)	0.7043	"	"	"	0.3763	" "
3)	1.0473	"	"	"	0.5553	" "
4)	1.0285	"	"	"	0.5439	" "

Hieruit berekent men voor het gehalte aan Iodium:

	$C_{19}H_{24}N_2O_2$	$C_{20}H_{26}N_2O_2$.
1) 28.8; 2) 28.9; 3) 28.6; 4) 28.8	28.8	28.0.

De bepaling van iodium volgens de titreermethode van VOLHARD, onder de noodige door hem vermelde voorzorgen verricht, leverde eenige moeilijkheden, omdat zelfs bij overmaat van zilver en vrij veel salpeterzuur zich de vloeistof moeilijk klaarde. Het

schijnt ook, dat het ioodzilver hardnekkig organische stof medesleept; althans menigmaal kon hij het verhitten van het ioodzilver de reuk van de distillatieproducten der kina-alkaloiden worden opgemerkt. Ziehier intusschen de uitkomst:

1.2610 gr. kinamine-hydroiodaat werden in 300 CC. water opgelost, en daarbij gevoegd 300 milligr. Ag in salpeterzure oplossing, eene hoeveelheid juist toereikend wanneer het zout aan de samenstelling $C_{20}H_{26}N_2O_2$, IH beantwoordde. Bij lang schudden bleef de vloeistof melkachtig. Nadat nog 15 milligr. Ag waren toegevoegd, klaarde zich na schudden de vloeistof en er was zilver te veel. Door terugtitreeren met rhodanammonium kwam ik tot het resultaat, dat juist 0.3077 gr. zilver voor het neêrslaan van het jodium noodig waren geweest, en hieruit vindt men weder 28.8 pCt. I.

Ik zou geneigd zijn, aan de resultaten van de jodiumbepalingen, die met de formule $C_{19}H_{24}N_2O_2$ voor kinamine overeenstemmen, meer waarde te hechten dan aan de uitkomsten der elementairanalysen, zoo niet het verschijnsel, dat men bij bijna *alle* analysen een te laag koolstofgehalte vond, mij daarvan terughield, te meer omdat bij andere vroeger door mij met denzelfden toestel geanalyseerde organische stoffen iets dergelijks niet is voorgekomen. Ik laat de zaak dus liever onbeslist en geloof, dat men eerst door vergelijkende analysen van andere zouten hieromtrent tot zekerheid zal kunnen geraken.

Wat nu de eigenschappen van de kinamine betreft, deze zijn reeds grootendeels door HESSE beschreven. Ik veroorloof mij, aan het door hem medegedeelde slechts datgene toe te voegen, wat door hem niet is opgemerkt of in een of ander opzicht van zijne uitkomsten afwijkt.

Reeds boven is medegedeeld, dat bij de langzame verdamping van slappe alcoholische oplossingen van de amorphe alkaloïden uit het quinetum, die nog eene geringe hoeveelheid kinamine bevatten, dit laatste alkaloïde zich in goed gevormde tamelijk aanzienlijke kristalletjes afzet. Deze behooren tot het tetragonale stelsel, toonen zeer duidelijk de combinatie $\infty P \infty . P$ *) en zijn daardoor gemakkelijk te onderscheiden van cinchonine.

*) Na de lezing van de laatste mededeeling van HESSE in de *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft* (Jahrgang X), ben ik eenigen tijd in twijfel ge-

Volgens HESSE lost kinamine in aether zeer gemakkelijk op. Bij een onderzoek daaromtrent kreeg ik uitkomsten, die van de zijne eenigszins afweken.

10.308 gram *zuivere* aether losten namelijk bij 16° C. niet meer dan 0.2128 gram kinamine op, dat is alzoo 2,06 deelen op 100 deelen aether. Wellicht is het verschil tusschen de waarnemingen van HESSE en van mij daaraan toe te schrijven, dat hij geen zuiveren aether bezigde.

Het soortelijk draaiingsvermogen van kinamine is door HESSE alleen bepaald voor oplossingen in sterken alcohol. Ik heb die bepaald voor oplossingen van het alkaloïde in absoluten alcohol, absoluten aether, alcohol van 90 Gew. Proc., zuiveren benzol en zuiveren chloroform. De uitkomsten van dit onderzoek vindt men in het volgende overzicht. Grootere concentraties dan de daarin aangegevene konden althans bij aether en alcohol niet worden bereikt †).

Aard van het oplosmiddel.	Aantal grammen der stof op 100 C.C.	l.	α_D §) waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend
		mm.		
Absolute alcohol	0.5020	303.8	1°35′5	
〃 〃	〃	〃	1°36′	104°.6
〃 〃	〃	〃	1°35′5	

weest, of de waargenomene kristallen wellicht uit het door HESSE ontdekte conkinamine bestonden. Ik geloof echter te mogen beweren, dat dit niet het geval is; de tetragonale kristallen toch, soms eene lengte hebbende van 2—3 millimeters gaven bij het omkristalliseeren uit alcohol weder fijne naaldjes van hetzelfde uiterlijk als men ze gewoonlijk bij kinamine waarneemt. Ongelukkig heb ik verzuimd, het S. D. V. er van te bepalen, waardoor aan allen twijfel een einde kon worden gemaakt. Later vind ik wellicht gelegenheid op dit punt terug te komen.

†) Alle in deze tabel en ook later voorkomende bepalingen van het soortelijk draaiingsvermogen zijn verricht op de vroeger door mij beschrevene wijze. Een zeker gewicht van de stof werd in het oplosmiddel in een klein maatkolfje tot een bepaald volumen van ongeveer 20 C.C. verdeeld en deze vloeistof met den polaristrobometer onderzocht. Het S. D. V. der zelfstandigheid werd dan berekend met behulp van de formule

$$(\alpha)_D = \frac{V\alpha}{lp}.$$

§) Elk van de in kolom IV onder de rubriek α_D opgenomen cijfers is het midden van eene serie van 4 waarnemingen, in de 4 quadranten met den polaristrobometer gedaan.

Aard van het oplosmiddel.	Aantal grammen der stof op 100 C.C.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
Absolute alcohol	1.0160	mm 303.8	$3^0 12'^5$	$103^0.9$
" "	"	"	$3^0 12'^5$	
" "	"	"	$3^0 12'^5$	
" "	"	"	$3^0 13'$	
" "	1.4940	"	$4^0 39'$	$102^0.8$
" "	"	"	$4^0 39'$	
" "	1.7735	"	$5^0 26'^5$	$100^0.7$
" "	"	"	$5^0 27'^5$	
Alcohol van 90 Gew. Proc.	1.6475	"	$5^0\ 5'$	$101^0.5$
Absolute aether	0.4583	"	$1^0 40'^5$	$121^0.4$
" "	"	"	$1^0 40'$	
" "	"	"	$1^0 41'^5$	
" "	1.0239	"	$3^0 45'$	$119^0.9$
" "	"	"	$3^0 43'$	
" "	"	"	$3^0 44'$	
Chloroform	0.7220	"	$2^0\ 9'^5$	$94^0.9$
"	"	"	$2^0\ 9'$	
"	"	"	$2^0\ 8'$	
"	"	"	$2^0\ 8'^5$	
"	1.5120	"	$4^0 18'^5$	$94^0.0$
"	"	"	$4^0 19'^5$	
"	"	"	$4^0 19'$	
"	2.2350	"	$6^0 29'$	$93^0.3$
"	"	"	$6^0 28'$	
"	"	"	$6^0 27'$	
Benzol	0.8560	"	$2^0 35'$	$99^0.3$
"	"	"	$2^0 36'$	
"	"	"	$2^0 33'$	
"	"	"	$2^0 35'$	
"	1.4890	"	$4^0 35'$	$100^0.9$
"	"	"	$4^0 33'$	
"	"	"	$4^0 32'^5$	
"	"	"	$4^0 34'$	

Uit bovenstaande uitkomsten blijkt, dat het soortelijk draaiingsvermogen van kinamine voor oplossingen in verschillende neutrale vloeistoffen niet hetzelfde is en voor alle onderzochte gevallen van den concentratiegraad afhankelijk is.

Met behulp van eene grafische voorstelling leidt men uit bovenstaande cijfers de volgende waarden van $(\alpha)_D$ voor oplossingen in absoluten alcohol en chloroform af

Absol. Alcohol.

$\frac{p}{100\ V}$	= 0.5	$(\alpha)_D$ =	$104^0.6$
〃	= 1	〃 =	$104^0.0$
〃	= 1.5	〃 =	$102^0.2$
〃	= 2	〃 =	$99^0.1$

Chloroform.

$\frac{p}{100\ V}$	= 0.5	$(\alpha)_D$ =	$95^0.2$
〃	= 1	〃 =	$94^0.6$
〃	= 1.5	〃 =	$94^0.0$
〃	= 2	〃 =	$93^0.4$
〃	= 2.5	〃 =	$92^0.8$

REACTIES OP KINAMINE.

HESSE heeft in zijne verhandeling in Bd. 166 van LIEBIG's Annalen opmerkzaam gemaakt op de kleursverandering, die oplossingen van kinaminezouten ondergaan, wanneer daaraan eene oplossing van goudchloried en platinachloried wordt toegevoegd. In verband met het onbestendig karakter van het alkaloïde liet zich verwachten, dat deze kleursveranderingen het gevolg moesten zijn van oxydatieverschijnsels en was het waarschijnlijk, dat ook de toepassing van andere oxydantia tot analoge verkleuringen aanleiding zouden geven.

Toen ik trachtte, daaromtrent een meer uitvoerig onderzoek in het werk te stellen, ondervond ik al spoedig het bezwaar, dat sommige der gebezigde reactieven, (zooals bijv. het chroomzuur), zelf gekleurd zijn of (zooals met het goudchloried het geval is) nederslagen vormen, en daardoor het verschijnsel min of meer onduidelijk maken.

Dit bracht mij op het denkbeeld, om nevens geheel kleur-

looze reactieven, ook de werking van gasvormige zelfstandigheden op kinaminezouten na te gaan, en zoo kwam ik tot de ontdekking, dat deze laatste zeer gevoelig zijn voor de dampen van het chloorperoxyde, en tevens dat de kleursveranderingen die zij ondergaan, afhankelijk zijn van onderscheidene omstandigheden, vooral van de af- of aanwezigheid van vrij zwavelzuur en van de concentratie der oplossingen. In het navolgende vermeld ik eenige reacties, waardoor zelfs kleine hoeveelheden kinamine (fracties van 1 milligram) gemakkelijk kunnen worden herkend.

1°. Wanneer men een druppel van eene oplossing van een kinaminezout voorzichtig laat vloeien op geconcentreerd zwavelzuur, dat eene kleine hoeveelheid salpeterzuur bevat, zoo neemt men op de plaats, waar de vloeistoffen zich met elkaar vermengen, bij groote concentratie van de kinaminezout-oplossing eene kastanjebruine bij grootere verdunning eene prachtige oranje kleur waar. Verdunt men nu het gezamenlijke vocht allengskens met water, zoo wordt dit meer purperkleurig en eindelijk zwak rozerood.

2°. Wanneer men een blad gewoon stevig schrijfpapier (met behulp van eene veeren pen) beschrijft met eene niet te sterke oplossing van kinamine in weinig zwavelzuur en op een horlogieglas legt, waarin men een weinig geconcentreed zwavelzuur en een paar korreltjes kaliumchloraat heeft gebracht, zoo wordt het schrift na eenige secunden bruinachtig of olijfkleurig. Laat men het papier nu aan de lucht liggen, zoo verkrijgen de letters na korteren of langeren tijd eene rozenroode kleur.

Wordt aan de oplossing van het kinaminezout, voordat het met het chloorperoxyd in aanraking komt, een tamelijk aanzienlijke hoeveelheid sterk zwavelzuur toegevoegd, zoo zijn de verschijnselen geheel anders. De boven beschrevene olijfgroene of bruine verkleuring wordt dan veel spoediger waargenomen. Laat men na eenige secunden het beschreven papier aan de lucht liggen, zoo gaat de vaalbruine tint allengs in een prachtig hemelsblauw en, zoo de oplossing betrekkelijk veel kinamine bevat, in een donker blauw-zwart over. Bevochtigt men de blauwe letters met water zoo worden ze rozenrood; en omgekeerd kan men soms door bedruppeling van rozerood gekleurde

karakters met tamelijk sterk zwavelzuur, vooral aan den rand, de vorming van eene blauwe zelfstandigheid waarnemen.

Deze verschijnselen leveren mijns inziens het bewijs, dat bij de oxydatie van kinamine door chloorperoxyd eene scheikundige verbinding gevormd wordt, die in watervrijen toestand blauw, maar in waterige oplossing rozerood is. De gedragingen van de bedoelde stof herinneren geheel aan die van het cobaltochloried, dat watervrij of bij groote concentratie eener oplossing en bij aanwezigheid van veel zoutzuur blauw, maar bij oplossing in water rozerood is.

Ten slotte zij hier vermeld, dat de beschrevene reactie tegenover chloorperoxyd niet plaats heeft met kinine, kinidine, cinchonine, cinchonidine, kinicine en cinchonicine.

ZOUTEN VAN KINAMINE.

HESSE heeft eenige zouten van kinamine nagegaan en vond, dat het neutrale hydroiodaat gemakkelijk te kristalliseeren was, maar daarentegen het neutrale hydrochloraat, het neutrale en zure tartraat amorph waren, het neutrale sulfaat slechts moeilijk in kristallen te verkrijgen was en het acetaat zich zeer gemakkelijk in oplossingen onder afzetting van vrije kinamine ontleedde.

Ik heb de uitkomsten van HESSE ten opzichte van de door hem onderzochte zouten geheel bevestigd gevonden. Te vergeefs heb ik ook getracht een gekristalliseerd *zuur sulfaat* ($C_{19}H_{24}N_2O_2, SH_2O_4 + x\,aq$), een neutraal *hydrobromaat* en een neutraal *oxalaat* te verkrijgen. De synthetisch vervaardigde oplossingen droogden onder den exsiccator tot gomachtige massaas op en het praeparaat, dat aan de samenstelling van een zuur sulfaat beantwoordde, werd allengs vrij donker bruin gekleurd. Ik vermoed, dat hierbij reeds te gelijkertijd eene omzetting van kinamine in kinamicine plaats greep.

De oplossing van het synthetisch bereide *formiaat* toonde bij langzaam verdampen meer neiging tot kristallisatie, en ik twijfel er niet aan of dit zout, op eenigszins grootere schaal bereid, zou gemakkelijk in kristallijnen vorm zijn te verkrijgen. Bij

de proeven op kleine schaal, met hoeveelheden kinamine van $^1/_2$—1 gram genomen, kreeg ik bij vrijwillige verdamping van de oplossing kristallen van een in water oplosbaar zout, maar tevens eene gomachtige massa.

Betrekkelijk gemakkelijk kristalliseeren het *chloraat, perchloraat* en *nitraat* en deze zouten, eens in drogen toestand verkregen, zijn zeer bestendig, althans zoo men ze niet onmiddellijk aan de werking van het zonlicht blootstelt.

Het *nitraat* ($C_{19}H_{24}N_2O_2$, NO_3H) is watervrij en zet zich hetzij bij langzame verdamping van eene verzadigde oplossing onder eenen exsiccator, hetzij bij bekoeling van eene warme geconcentreerde oplossing in kristallen af, die tot het monoklinische stelsel behooren. Bij verschillende kristallen werden de combinaties ∞ P. — P̶ ∞ en ∞ P . + P̶ ∞ . — P̶ ∞ waargenomen. Het droge zout wordt in het zonlicht allengskens bruingeel gekleurd en lost bij eene temp. van 15^0 C. in 16,^{53} deelen water op. In warm water en in alcohol wordt het veel gemakkelijker opgenomen.

De bepalingen van het soortelijk draaiingsvermogen gaven mij voor eene temperatuur van 16^0 C. en voor oplossingen in water en alcohol de volgende uitkomsten:

Aard van het oplosmiddel.	Aantal grammen op 100 C.C.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
Water	0.997	303.8	2^{0}55′	
"	"	"	2^{0}58′	96^0.8
"	"	"	2^{0}54′	
"	1.934	"	5^{0}50′	
"	"	"	5^{0}52′	97^0.0
"	"	"	5^{0}50′	
"	"	"	5^{0}51′	
Absolute alcohol	0.9945	"	3^{0}18′	109^0.2
" "	"	"	3^{0}18′	
" "	2.036	"	6^{0}46′	109^0.6
" "	"	"	6^{0}48′	

Uit deze gegevens berekent men voor het S. D. V. van kinamine in den vorm van nitraat *)

voor oplossingen in water $^1/_{100}$–$^2/_{100}$) $(\alpha)_D$ = ↗ 116°.3–116°.8
〃 〃 〃 alcohol ($^1/_{100}$–$^2/_{200}$) $(\alpha)_D$ = ↗ 131°.3–131°.8

Het *chloraat* is insgelijks watervij en kristalliseert in het rhombische stelstel. De meest waargenomene vormen waren de dubbelpyramide P, en de combinaties OP . ∞ P; OP . ∞ P . $\bar{P}$ ∞ en ∞ P . $\breve{P}$ ∞.

Het zout lost in 137 deelen water van 16° C. op, veel gemakkelijker echter in alcohol en in water van hoogere temperatuur. De waterige oplossing wordt vooral bij overmaat van chloorzuur in het zonlicht of bij verwarming allengskens bruinrood gekleurd.

Het *perchloraat* scheidt zich uit waterige oplossingen in den vorm van watervrije kristallen af, die waarschijnlijk tot het monoklinische stelsel behooren en tweelingen vertoonen welke veel overeenkomst hebben met die van gips. De kristallen zijn echter zeer onduidelijk. Oppervlakkig beschouwd komen zij met die van het kinamine-hydrojodaat zeer sterk overeen.

De bepaling van het soortelijk draaiingsvermogen leverde voor alcoholische oplossingen en voor eene temp. van 16° C. de volgende uitkomsten op:

Aard van het oplosmiddel.	Aantal grammen op 100 C.C	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
Absolute alcohol	0.709	mm. 303.8	2° 9′	
〃 〃	〃	〃	2° 8′	↗ 99°.3
〃 〃	〃	〃	2° 9′	
〃 〃	2.1335	〃	6°25′	
〃 〃	〃	〃	6°23′	↗ 101°.8
〃 〃	〃	〃	6°25′	

*) Bij deze en de volgende berekeningen van dien aard is de formule $C_{19}H_{24}N_2O_2$ voor kinamine als grondslag aangenomen.

Uit deze cijfers berekent men voor het S. D. V. van het alkaloïde in den vorm van perchloraat (bij eene concentratie van $^1/_{140}$—$^1/_{47}$) : $(\alpha)_D$ = ↗ 131°.2—134°.3.

Van het *hydroiodaat* kon de kristalvorm niet worden uitgemaakt. De oplosbaarheid van het zout in water is grooter dan die van het perchloraat. Ik vond namelijk dat bij 16° C. 1 deel hydroiodaat in 71 deelen water werd opgenomen. Bij hoogere temperaturen wordt veel meer van het zout opgelost en even als bij de vorige zouten wordt ook het hydroiodaat door alcohol veel gemakkelijker dan door water opgenomen.

De bepalingen van het soortelijk draaiingsvermogen leverden voor alcoholische oplossingen en voor eene temp. van 16° C. de volgende uitkomsten op.

Aard van het oplosmiddel.	Aantal grammen op 100 C.C.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
Absolute alcohol	1.068	303.8	2°59′	
"	"	"	3° 0′	↗ 92°.5
"	"	"	3° 2′	
"	"	"	3° 0′5	
"	1.644	"	4°41′	
"	"	"	4°44′	↗ 94°.4
"	"	"	4°43′	
"	2.310	"	6°42′	
"	"	"	6°43′	↗ 95°.8
"	"	"	6°44′	

Voor het soortelijk draaiingsvermogen van kinamine bij de aangegevene concentraties berekent men uit bovengenoemde cijfers de waarden ↗ 130°.3—133°.0—135°.0.

Omtrent het *chloroplatinaat* van kinamine zegt HESSE, dat het zich van de overeenkomstige zouten der overige kina-alkaloïden door zijne groote oplosbaarheid in water onderscheidt. Volgens hem zou platinachloried alleen in zeer gecòncentreerde oplossingen van het hydrochloraat een geel vlokkig neerslag doen ontstaan, dat bij toevoeging van weinig water weder

oplost. Daar het zout buitendien in zijne waterige oplossing gemakkelijk ontleed wordt, zoo moest hij van het bereiden van het droge chloroplatinaat en van de analyse der verbinding afzien.

Het groote belang, dat aan de kennis van de samenstelling van het kinamine-chloroplatinaat verbonden is, bracht er mij toe, om niettegenstaande de door HESSE verkregene ongunstige uitkomsten, de bereiding van het zout te beproeven. Daartoe maakte ik eerst synthetisch eene oplossing van het zure kinamine-hydrochloraat $C_{19}H_{24}N_2O_2$, $2\,HCl$ in weinig water, en voegde daaraan de ter vorming van een chloroplatinaat $PtCl_4(C_{19}H_{24}N_2O_2)$, $2\,HCl$ berekende hoeveelheid platinachloried toe. Het resultaat was negatief; er ontstond geen neêrslag en de oplossing, in het donker onder een exsiccator geplaatst, droogde allengs tot eene amorphe maar gedeeltelijk ontlede massa op.

Inmiddels kwam mij de reeds boven (zie blz. 261) aangehaalde mededeeling van JÖRGENSEN over de samenstelling van het *zoogenaamde* platinachloried onder de oogen en leerde ik daaruit, dat bij toevoeging van eene oplossing dezer stof tot eene oplossing van zuur kinamine-hydrochloraat 2 moleculen chloorwaterstof vrij moesten worden, wanneer het chloroplatinaat van kinamine eene samenstelling had, analoog aan die van de chloroplatinaten der andere meer bekende kina-alkaloïden ($PtCl_6H_2 + C_{19}H_{24}N_2O_2$, $2\,HCl = PtCl_6, C_{19}H_{24}N_2O_2 + 2\,HCl$), en daar het mij nu mogelijk scheen, dat verdund zoutzuur het kinamine-chloroplatinaat zou kunnen oplossen, beperkte ik bij eene tweede proef zooveel mogelijk de hoeveelheid zoutzuur, voegde bij eene oplossing van *neutraal* kinamine-hydrochloraat eene vrij geconcentreerde op lossing van platinachloorwaterstofzuur en verkreeg zóó werkelijk zonder eenig bezwaar het verlangde chloroplatinaat in den vorm van een amorph geel neerslag, dat, eenmaal door de BUNSEN'sche filtreerpomp afgescheiden, veilig met water kon worden uitgewasschen en slechts weinig daarin oploste.

Wordt het zout aan de lucht gedroogd, zoo doet het zich als een gele amorphe stof voor, die vrij bestendig is en zich althans binnen den tijd van eenige weken niet ontleedt. Het verdraagt eene temperatuur van 100° C. zonder eene diepingrijpende

scheikundige verandering te ondergaan en verliest daarbij slechts het scheikundig gebonden water, waarbij tevens de kleur der verbinding een weinig donkerder wordt. Bij iets hoogere temperatuur (120°—130° C.) schijnt reeds ontleding plaats te grijpen. De verbinding begint samen te bakken en wordt veel donkerder gekleurd.

In aanraking met water is het chloroplatinaat veel minder bestendig dan in volkomen drogen toestand. Laat men een weinig van de versch neergeslagene en uitgewasschene verbinding onder eene laag water in het donker staan, zoo wordt dit allengs lichtgeel gekleurd, maar uit de geringe vermindering van het niet opgeloste is gemakkelijk op te maken, dat de oplosbaarheid van het zout in *zuiver* water zeer gering is. Allengskens wordt na verloop van een paar weken het vaste zout, evenals de vloeistof, rozerood gekleurd en eindelijk blijft er nevens gereduceerd platina niet anders over dan eene in water en alcohol bijna onoplosbare rozeroode verbinding, die op een filtrum afgezonderd, door sterk zoutzuur blauw wordt gekleurd, in met zoutzuur bedeelden alcohol eenigermate onder vorming van eene lichtblauwe vloeistof wordt opgelost en over het geheel vrij bestendig schijnt te zijn. Waarschijnlijk is deze stof identiek met die, welke bij de werking van chloorperoxyd op kinamine wordt gevormd.

De zeer slappe oplossing van het kinamine-chloroplatinaat in filtreerpapier opgezogen, wordt daarin allengs tot dezelfde blauwe verbinding gereduceerd, die evenwel bij bevochtiging met water allengs rozerood wordt.

De uitkomsten der analysen van het kinamine-chloroplatinaat waren de volgende:

1) 0.4479 gram luchtdroog zout verloren bij drogen op 100° C. 0.0260 gram water.

2) 0.5087 gram luchtdroog zout verloren bij drogen op 100° C. 0.0299 gram. water.

3) 0.4300 gram op 100° C. gedroogd zout gaven bij verbranding met loodchromaat 0.6802 gram CO_2 en 0.2340 gram H_2O.

4) 0.2333 gram op 100° C. gedroogd zout gaven 0.3798 gram CO_2 en 0.1223 gram H_2O.

5) 0.4489 gram op 100° C. gedroogd zout lieten bij voorzichtig gloeien achter 0.0846 gram platina.

6) 0.2404 gram. op 100° C. gedroogd zout lieten na gloeiing achter 0.0472 gram platina.

7) 0.4880 gram *luchtdroog* zout gaven 0.0894 gram platina en 0.3802 gram. Ag. Cl.

Uit deze resultaten berekent men voor het watergehalte van het zout een bedrag van 5.85—5.9 pCt., beantwoordende aan ongeveer 3 H_2O op 1 molec. watervrij chloroplatinaat en verder voor de procenten aan C, H, Pt en Cl in de op 100° gedroogde stof het volgende:

	3)	4)	5)	6)	7)
C	43.1	44.2	—	—	—
H	6.0	5.8	—	—	—
Pt	—	—	18.8	19.6	19.5
Cl	—	—	—	—	20.5

Deze uitkomsten stemmen tamelijk wel overeen met de formule 2 (Ch, H Cl), Pt Cl_4 voor het droge zout, waarin Ch, hetzij door de formule $C_{19}\,H_{24}\,N_2\,O_2$, hetzij door $C_{20}\,H_{26}\,N_2\,O_2$ kan worden uitgedrukt. Immers voor de samenstelling van het droge chloroplatinaat berekent men, voor de beide zoo even aangevoerde formulen het volgende:

	$2(C_{19}H_{24}N_2O_2,HCl)PtCl_4$	$2(C_{20}H_{26}N_2O_2,HCl)PtCl_4$
C	43.0	44.9
H	4.8	5 1
Pt	19.1	18.5
Cl	20.5	20.0.

Het zou echter, in verband met het veel te hoog gevonden water-stofgehalte, de vraag kunnen zijn, of het chloroplatinaat op 100° C. gedroogd, wellicht nog scheikundig gebonden water bevat. In verband met de voor chloor en platina gevonden cijfers houd ik dit voor onwaarschijnlijk en geloof ik het te hoog gevonden waterstofgehalte te moeten toeschrijven aan eene font van de analyse, het gevolg van occlusie van

waterstof door het kopergaas, dat bij de analyse was gebezigd.

Ofschoon de verkregene cijfers overigens niet genoeg overeenstemming vertoonen, om, ten aanzien van de moleculairformule der kinamine tot eene beslissing te komen, zoo laten zij toch geen twijfel over omtrent het feit, dat kinamine eene eenzurige basis is, eene uitkomst, die, zooals blijken zal, geheel overeenstemt met de resultaten van het onderzoek omtrent den invloed van zuren in overmaat op het S. D. V. van de kinamine.

SOORTELIJK DRAAIINGSVERMOGEN VAN KINAMINE BIJ OPLOSSING IN EENE OVERMAAT VAN ZUREN.

In mijne verhandeling „Over het soortelijk draaiingsvermogen der voornaamste kina-alkaloïden in vrijen en gebonden toestand, (Natuurk. Verh. der Koninklijke Akademie Deel XVI. Ann. der Chem. in Pharm. 182. 33 en verv.), heb ik de uitkomsten medegedeeld van eenige onderzoekingen omtrent den invloed, dien verschillende hoeveelheden van sommige anorganische en organische zuren onder overigens gelijke omstandigheden op het soortelijk draaiingsvermogen van de vier meer algemeen bekende kina-alkaloïden uitoefenden. Eene hoeveelheid van ongeveer 316 milligr. alkaloïde werd onder toevoeging van de gewenschte hoeveelheid zuur en van de ter aanvulling noodige hoeveelheid water bij 17° C. op een volumen van 20 C.C. gebracht en de alzoo verkregen oplossing telkens onderzocht.

Ik heb ditzelfde onderzoek ook met kinamine bij eene temperatuur van 16° C. verricht en alzoo telkens ongeveer 0.326 gram kinamine, na toevoeging van de bepaalde hoeveelheid zuur door verdunning met water op 20 C. C. gebracht. De gebezigde zuren waren dezelfde als die, waarvan de invloed vroeger was nagegaan; alleen de proeven met overchloorzuur werden achterwege gelaten, omdat dit met kinamine een in water zeer moeilijk oplosbaar perchloraat vormt.

De uitkomsten van het onderzoek waren de volgende:

Chloorwaterstofzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen ClH op 1 mol. alkaloïde	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm		
0.3265 gr.	1 *)	303.8	$5^0 41'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 40'^5$	$114^0.4$
〃 〃	〃	〃	$5^0 40'$	
0.3334 〃	2	303.8	$5^0 56'$	$117^0.6$
〃 〃	〃	〃	$5^0 57'$	
0.3218 〃	3	303.8	$5^0 43'$	$116^0.9$
〃 〃	〃	〃	$5^0 43'^5$	
0.3224 〃	4	303.8	$5^0 45'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 44'^5$	$117^0.1$
〃 〃	〃	〃	$5^0 42'^5$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 46'$	
0.3249 〃	7	303.8	$5^0 47'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 49'$	$117^0.3$
〃 〃	〃	〃	$5^0 47'$	
0.3290 〃	10	303.8	$5^0 48'$	
〃 〃	〃		$5^0 53'$	$117^0.0$
〃 〃	〃		$5^0 51'$	
〃 〃	〃		$5^0 51'$	
0.3228 〃	20	303.8	$5^0 41'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 40'$	$115^0.9$
〃 〃	〃	〃	$5^0 41'$	
0.3270 〃	30	303.8	$5^0 38'^5$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 35'$	$112^0.8$
〃 〃	〃	〃	$5^0 35'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 36'$	
0.3266 〃	40	303.8	$5^0 22'$	$108^0.2$
〃 〃	〃	〃	$5^0 22'$	

*) Bij het toevoegen van één molec. van een eenbasisch of $^1/_2$ molec. van een tweebasisch zuur was het niet mogelijk, het alkaloïde geheel in oplossing te brengen, en moest iets meer zuur worden toegevoegd. Dit meerdere bedroeg echter gewoonlijk niet meer dan $^1/_{20}$, in een enkel geval $^1/_{10}$ molec. In verband met de geringe variatie van het S. D. V. der kinamine onder den invloed van zuren mogen deze kleine afwijkingen van de juist toereikende hoeveelheid zuur geacht worden van geen belang te zijn. De hoeveelheid van 0.326 gram kinamine is berekend naar de oude formule van Hesse ($C_{20}H_{26}N_2O_2$). Bij het aannemen van de

Salpeterzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen NO_3H op 1 mol. alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
*)	1	—	—	↗ $116^0.5$
0.3286 gr.	2	303.8	$5^0 50'$	↗ $116^0.8$
〃 〃	〃	〃	$5^0 50'$	
0.3272 〃	3	303.8	$5^0 49'$	↗ $117^0.7$
〃 〃	〃	〃	$5^0 51'$	
0.3281 〃	4	303.8	$5^0 50'$	↗ $117^0.0$
〃 〃	〃	〃	$5^0 50'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 50'5$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 50'$	
0.3273 〃	7	303.8	$5^0 48'5$	↗ $116^0.7$
〃 〃	〃	〃	$5^0 48'$	
0.3288 〃	12	303.8	$5^0 44'$	↗ $114^0.8$
〃 〃	〃	〃	$5^0 43'5$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 44'$	
0.3263 〃	20	303.8	$5^0 38'5$	↗ $114^0.4$
〃 〃	〃	〃	$5^0 41'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 41'$	

Chloorzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen ClO_3H op 1 mol. alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend
		mm.		
0.3250 gr.	1	303.8	$5^0 42'$	↗ $116^0.1$
〃 〃	〃	〃	$5^0 44'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 45'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 46'$	
0.3235 〃	2	303.8	$5^0 42'$	↗ $116^0.0$
〃 〃	〃	〃	$5^0 42'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 42'$	

---

nieuwe formule $C_{19} H_{24} N_2 O_2$ zou men 0.312 gram hebben moeten oplossen, maar ook deze afwijking oefent geen merkbaren invloed op het S. D. V. uit.

*) Afgeleid uit het draaiingsvermogen van het in water opgeloste neutrale nitraat.

Chloorzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen ClO_3H op 1 mol alkaloïde	l	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
0.3124 gr.	4	303.8	5°43′	
〃 〃	〃	〃	5°45′	117°.2
〃 〃	〃	〃	5°44′	
0.3266 〃	8	303.8	5°46′	
〃 〃	〃	〃	5°47′	116°.3
〃 〃	〃	〃	5°45′5	
0.3232 〃	15	303.8	5°45′	115°.2
〃 〃	〃	〃	5°44′	

Azijnzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen $C_2H_4O_2$ op 1 mol. alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
0.3258 gr.	1	303.8	5°44′	116°.2
〃 〃	〃	〃	5°46′	
0.3300 〃	2	303.8	5°49′	
〃 〃	〃	〃	5°52′	116°.6
〃 〃	〃	〃	5°52′5	
〃 〃	〃	〃	5°49′	
0.3218 〃	3	303.8	5°43′	116°.9
〃 〃	〃	〃	5°43′5	
0.3254 〃	4	303.8	5°48′	
〃 〃	〃	〃	5°49′5	117°.5
〃 〃	〃	〃	5°49′	
0.3253 〃	5	303.8	5°47′	
〃 〃	〃	〃	5°48′5	118°.0
〃 〃	〃	〃	5°49′	
0.3239 〃	10	303.8	5°50′	
〃 〃	〃	〃	5°49′5	118°.0
〃 〃	〃	〃	5°47′	
〃 〃	〃	〃	5°48′	
0.3255 〃	20	303.8	5°49′5	
〃 〃	〃	〃	5°49′	117°.9
〃 〃	〃	〃	5°49′	
0.3253 〃	40	303.8	5°49′5	117°.9
〃 〃	〃	〃	5°49′5	

Mierenzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen CH_2O_2 op 1 mol. alkaloïde	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3249 gr.	1	mm. 303.8	5°40′	→ 114°.7
〃 〃	〃	〃	5°40′	
0.3230 〃	2	303.8	5°45′	→ 117°.2
〃 〃	〃	〃	5°45′	
0.3278 〃	4	303.8	5°51′	→ 117°.5
〃 〃	〃	〃	5°51′	
0.3274 〃	10	303.8	5°52′	→ 116°.5
〃 〃			5°49′5	
0.3298 〃	20	303.8	5°51′	→ 116°.8
〃 〃	〃	〃	5°51′	
0.3295 〃	60	303.8	5°49′	→ 116°.6
〃 〃	〃	〃	5°51′	
〃 〃	〃	〃	5°51′	

Zwavelzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen SO_4H_2 op 1 mol. alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
0.3259 gr.	1/2	mm. 303.8	5°44′	→ 115°.8
〃 〃	〃	〃	5°43′	
〃 〃	〃	〃	5°44′	
0.3254 〃	1	303.8	5°47′5	→ 116°.4
〃 〃	〃	〃	5°44′5	
〃 〃	〃	〃	5°45′	
〃 〃	〃	〃	5°46′	
0.3279 〃	1 1/2	303.8	5°49′	→ 116°.8
〃 〃	〃	〃	5°49′	
〃 〃	〃	〃	5°49′	
0.3244 〃	2	303.8	5°42′5	→ 116°.4
〃 〃	〃	〃	5°43′	
〃 〃	〃	〃	5°45′	
〃 〃	〃	〃	5°45′	
0.3242 〃	3 1/2	303.8	5°43′	→ 116°.3
» 〃	〃	〃	5°44′	
〃 〃	〃	〃	5°43′	

Zwavelzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen SO_4H_2 op 1 mol. alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
0.3270 gr.	5	303.8	$5^0 50'$	↗ $116^0.5$
〃 〃	〃	〃	$5^0 50'^{5}$	
0.3292 〃	10	303.8	$5^0 50'$	↗ $116^0.6$
〃 〃	〃	〃	$5^0 50'^{5}$	
0.3266 〃	20	303.8	$5^0 41'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 42'$	↗ $114^0.9$
〃 〃	〃	〃	$5^0 43'$	
0.3267 〃	30	303.8	$5^0 30'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 32'$	↗ $111^0.3$
〃 〃	〃	〃	$5^0 32'$	

Zuringzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen $C_2H_2O_4$ op 1 mol. alkaloïde.	l.	α_D waargenomen.	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
0.3235 gr.	½	303.8	$5^0 44'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 44'$	↗ $116^0.8$
〃 〃	〃	〃	$5^0 45'$	
0.3272 〃	1	303.8	$5^0 52'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 50'$	↗ $118^0.1$
〃 〃	〃	〃	$5^0 53'$	
〃 〃	〃	〃	$5^0 52'$	
0.3305 〃	2	303.8	$5^0 54'$	↗ $117^0.5$
〃 〃	〃	〃	$5^0 54'$	
0.3231 〃	4	303.8	$5^0 45'$	↗ $117^0.2$
〃 〃	〃	〃	$5^0 45'$	
0.3269 〃	6	303.8	$5^0 49'$	↗ $117^0.2$
〃 〃	〃	〃	$5^0 49'$	
0.3264 〃	10	303.8	$5^0 48'$	↗ $116^0.8$
〃 〃	〃	〃	$5^0 47'$	

Phosphorzuur.

Gewicht aan kinamine op 20 C.C. van de oplossing.	Aantal moleculen PO_4H_3 op 1 mol. alkaloïde.	*l.*	α_D waargenomen	$(\alpha)_D$ berekend.
		mm.		
0.3273 gr.	1 *)	303.8	5°51′	
〃 〃	〃	〃	5°49′	117°.3
〃 〃	〃	〃	5°49′	
0.3272 〃	2	303.8	5°48′	
〃 〃	〃	〃	5°50′	117°.2
〃 〃	〃	〃	5°50′	
0.3266 〃	4	303.8	5°47′.5	
〃 〃	〃	〃	5°46′	116°.6
〃 〃	〃	〃	5°48′	
0.3252 〃	8	303.8	5°47′	
〃 〃	〃	〃	5°46′	116°.7
〃 〃	〃	〃	5°45′	
0.3267 〃	20	303.8	5°46′	
〃 〃	〃	〃	5°45′	116°.2
〃 〃	〃	〃	5°46′	

BESCHOUWINGEN OMTRENT EEN VERMOEDELIJK VERBAND TUSSCHEN CHEMISCH KARAKTER EN SOORTELIJK DRAAIINGSVERMOGEN NAAR AANLEIDING VAN DE BOVEN MEDEGEDEELDE UITKOMSTEN.

De uitkomsten, verkregen bij het onderzoek naar den invloed, dien zuren op het soortelijk draaiingsvermogen van kinamine uitoefenen, stemmen in vele opzichten overeen met die, welke ik vroeger bij een dergelijk onderzoek met de meer algemeen bekende kina-alkaloïden verkreeg.

Ook hier zien wij, dat het S. D. V. van het alkaloïde bij eene zekere hoeveelheid toegevoegd zuur een maximum bereikt, om bij verdere toename daarvan allengskens te dalen. De

---

*) Met $^1/_3$ en $^2/_3$ molecule phosphorzuur kon het alkaloide, zelfs bij zachte verwarming, niet in oplossing worden gebracht.

verklaring van dit verschijnsel vroeger gegeven, zal hier eveneens van toepassing kunnen zijn.

In menig opzicht zijn echter belangrijke verschillen met de vroeger verkregene uitkomsten aan te wijzen.

In de eerste plaats toch valt het in het oog, dat de maxima van S. D. V., voor de onderscheidene bij het onderzoek gebezigde zuren, bij kinamine veel meer met elkander overeenstemmen; zooals blijkt uit het volgende tafeltje, waarin die maxima zijn opgenomen. Ik verkreeg

Voor	het	Oxalzuur.	een	maximum	van	118⁰.1
〃	〃	Azijnzuur	〃	〃	〃	118⁰.0
〃	〃	Salpeterzuur	〃	〃	〃	117⁰.7
〃	〃	Chloorwaterstofzuur .	〃	〃	〃	117⁰.6
〃	〃	Mierenzuur	〃	〃	〃	117⁰.5
〃	〃	Phosphorzuur	〃	〃	〃	117⁰.3
〃	〃	Chloorzuur.	〃	〃	〃	117⁰.2
〃	〃	Zwavelzuur	〃	〃	〃	116⁰.8

Het grootste verschil bedraagt, zooals wij bemerken, hier nauwelijks 1 percent van het bedrag van het S. D. V.

Dit feit schijnt mij toe van beteekenis te zijn. De groote overeenkomst van deze maxima onder elkander schijnt er voor te pleiten, dat hier eene natuurwet ten grondslag ligt, die voorloopig zoodanig zoude kunnen worden uitgedrukt, dat het S. D. V. der alkaloïden door verschillende zuren op gelijke wijze wordt gewijzigd, mits de ontstane verbindingen ten opzichte van de verzadiging der organische basis door het zuur op gelijke lijn kunnen gesteld worden.

De vroeger met de vier voornaamste kina-alkaloïden verkregene uitkomsten zijn hiermede, althans schijnbaar, in strijd; want ik vond *toen*, dat de maxima bij kinine, kinidine, cinchonine en cinchonidine aanzienlijke onderlinge verschillen vertoonden, bedragende 5 à 6 percent van het geheele bedrag van het S. D. V.

Het is echter de vraag, of deze afwijkingen niet te verklaren zijn door den invloed, dien de concentratiegraad op het S. D. V. uitoefent. Indien men dezen kon ontgaan, en de zelfstandighe-

den, waarvan de oplossingen werden onderzocht, in geïsoleerden toestand ten opzichte van haar S. D. V. kon nagaan, zou wellicht blijken, dat die afwijkingen niet bestonden en dat de vier vroeger onderzochte kinabases in den vorm van zure zouten, steeds hetzelfde draaiingsvermogen zouden vertoonen, onverschillig welk zuur ter vorming van het zout was gebezigd.

Ik vind te meer reden, om dit mogelijk te achten, omdat het mij zeer onwaarschijnlijk voorkomt, dat lichamen van hetzelfde chemische karakter zich ten aanzien van de verandering van het S. D. V. onder den invloed van zuren anders zouden gedragen.

Er is nog een ander punt, dat opmerking verdient, namelijk dit, dat bij de toevoeging van 1 molecule van een éénbasisch of van $^1/_2$ molecule van een tweebasisch zuur aan 1 molecule kinamine het maximum van draaiingsvermogen reeds ten naastenbij is bereikt. In zooverre is er een belangrijk verschil te bespeuren tusschen kinamine en de vroeger door mij onderzochte kina-alkaloïden; en dit verschil springt vooral in het oog, wanneer men den invloed van betrekkelijk zwakke organische zuren (zooals azijnzuur en mierenzuur) op het S. D. V. nagaat. Bij kinine, cinchonine, kinidine en cinchonidine is het S. D. V. bij toevoeging van 2 molec. azijnzuur en 2 molec. mierenzuur tot 1 molec. van het alkaloïde aanzienlijk lager dan het te bereiken maximum, terwijl daarentegen bij kinamine, zoo slechts eene oplossing kan worden verkregen met het minimum van het daartoe noodige zuur, een bedrag voor het S. D. V. wordt waargenomen, dat onder den invloed van veel meer zuur als ter vorming van zure zouten noodig is, nagenoeg niet meer stijgt. Tot staving van het gezegde verwijs ik naar het volgende overzicht, dat geene verdere toelichting behoeft.

	Kinine.	Kinidine.	Cinchonine.	Cinchonidine.	Kinamine.
S. D. V. bij toevoeging van 1 mol. azijnzuur tot 1 mol. alkaloïde.	niet onderzocht	niet onderzocht	niet onderzocht	niet onderzocht	↗ 116°.2
S. D. V. bij toevoeging van 2 mol. azijnzuur tot 1 mol. alkaloïde.	↖ 191°.1	↗ 248°.6	↗ 217°.3	↖ 136°.1	↗ 116°.6
Maximum van S. D. V. onder den invloed van azijnzuur.	↖ 278°.9	↗ 318°.4	↗ 250°.5	↖ 173°.8	↗ 118°.0
S. D. V. bij toevoeging van 1 mol. mierenzuur tot 1 mol. alkaloïde.	niet onderzocht	236°.3	niet onderzocht	niet onderzocht	↗ 114°.7
S. D. V. bij toevoeging van 2 mol. mierenzuur tot 1 mol. alkaloïde.	↖ 172°.6	↗ 286°.2	↗ 242°.2	↖ 157°.0	↗ 117°.2
Maximum van S. D. V. onder den invloed van mierenzuur.	↗ 280°.6	↗ 325°.8	↗ 258°.9	↖ 177°.9	↗ 117°.5

Ik meen het verschil, dat ten aanzien van de verandering van het S. D. V. onder den invloed van zuren tusschen kinamine en de vier andere kinabasis wordt waargenomen, daaraan te mogen toeschrijven, dat de eerste eene eenzurige basis is, en de vier andere lichamen een tweezurig karakter bezitten. De samenstelling van het kinamine-chloroplatinaat en van de chloroplatinaten der andere kina-alkaloïden is daarmede ook geheel in overeenstemming; terwijl het kinamine-zout op één molec. $Pt\,Cl_4$ *twee* moleculen alkaloïde en *twee* moleculen $Cl\,H$ bevat, bevatten de andere genoemde chloroplatinaten op één molecule $Pt\,Cl_4$, slechts één molecule alkaloïde en twee moleculen $Cl\,H$.

Het komt mij niet onwaarschijnlijk voor, dat wat bij de kina-bases wordt waargenomen, zich ook bij andere alkaloïden zal voordoen, en dat alzoo *de bepaling van het S. D. V. van een alkaloïde bij toevoeging van verschillende hoeveelheden zuur een middel zal kunnen zijn om het chemisch karakter daarvan te beoordeelen en uit te maken, of het lichaam één-, twee of meerzurig is.*

Wanneer ik dit vermoeden uitspreek, dat door onderzoekingen op breeder schaal behoort te worden bevestigd, zoo mag ik niet verzuimen op te merken, dat er al aanstonds een feit kan worden aangevoerd, dat met de gemaakte hypothese in strijd schijnt. Het is dit, dat het overzure sulfaat $C_{20}\,H_{24}\,N_2\,O_2, 2\,S\,H_2\,O_4 + 5\,H_2\,O$ onder sommige omstandigheden, naar de proeven van HESSE, een eigen S. D. V. bezit, dat, op kinine berekend, grooter is dan dat, hetwelk uit het S. D. V. van het zure sulfaat $C_{20}\,H_{24}\,N_2\,O_2,\ S\,H_2\,O_4 + 7\,H_2\,O$ wordt afgeleid.

De uitkomsten van HESSE hebben mij, dadelijk nadat ik er kennis van genomen had, zeer verrast, omdat ze mij lijnrecht in strijd schenen te zijn met hetgeen ik vroeger ten aanzien van den invloed van overmaat van zwavelzuur op het S. D. V. van kinine had waargenomen. Immers ik vond voor kinine ($p = 1,6$ naar de uitdrukkingswijze van HESSE) en twee molec. $S\,H_2\,O_4\ \alpha)_D = \nwarrow 277^0.5$ en bij vermeerdering van de hoeveelheid zuur *daalde* het S. D. V.

In het denkbeeld verkeerende, dat de voorafgaande vorming

van eene vaste verbinding wellicht iets tot de zaak zou *kunnen* afdoen, en wenschende in elk geval de uitkomsten van HESSE te toetsen, heb ik het overzure sulfaat bereid en daarvoor na oplossing in water, een S. D. V. gevonden, dat op kinine berekend, inderdaad eenigszins afwijkt van dat, hetwelk ik vroeger voor dit alkaloïde bij oplossing in eene groote overmaat van zwavelzuur had gevonden (zie de Bijlage).

Terwijl nu in dit opzicht mijne waarnemingen die van HESSE niet bepaald tegenspreken, komt het mij toch voor, dat het onbestendige karakter der besprokene verbinding, en de omstandigheid, dat het naar mijne vroegere proeven niet gevormd wordt, wanneer men bij eene *oplossing* van het zout $C_{20} H_{24} N_2 O_2, S H_2 O_4$ meer zwavelzuur voegt, niet als een krachtig bewijs tegen de boven geuite stelling mogen gelden. Het komt mij waarschijnlijk voor, dat het overzure kinine-sulfaat behoort tot de zoogenaamde moleculaire verbindingen, en met het zure kalium-acetaat en dergelijke zouten op ééne lijn behoort te worden gesteld.

Uit het op blz. 278—283 gegeven overzicht van het S. D.V. van kinamine blijkt, dat dit alkaloïde in den vorm van neutrale zouten nagenoeg hetzelfde soortelijk draaiingsvermogen vertoont. Het was de vraag, of dit verschijnsel zich ook zou voordoen voor oplossingen in andere vloeistoffen als water. Boven vermeldde ik eenige kristallijne zouten, waarvan het S. D. V. in absoluten alcohol werd bepaald. Berekent men de gevondene waarden op vrije kinamine, dan verkrijgt men, voor de aangegevene grenzen van concentratie, het volgende:

S. D. V. van kinamine in alkoholische oplossingen

berekend uit het nitraat	131°.3—131°.8
„ „ „ hydroiodant	130°.0—135°.0
„ „ „ perchloraat	131°.2—134°.3

Ook hier zien wij dus eene vrij groote overeenstemming.

Bij de vroeger door mij verrichte onderzoekingen omtrent de vier voornaamste kina-alkaloïden werd zoodanige overeenstemming tusschen het S. D. V. zoogenaamde normale zouten niet gevonden. Wellicht is dit juist aan het tweezurige karakter

dier bases toe te schrijven. Immers het is mogelijk, dat bij de vorming van een zout van 1 molec. kinine, cinchonine enz. met 1 molec. van een éénbasisch zuur de invloed van dit laatste op het S. D. V. nog niet is uitgeput en dat onderscheidene zuren zich te dien opzichte verschillend gedragen. Wellicht moet hier ook rekening worden gehouden met den invloed der concentratie.

Nadere onderzoekingen zouden hieromtrent vermoedelijk een helderder licht verspreiden.

B IJ L A G E.

OVER HET SOORTELIJK DRAAIINGSVERMOGEN VAN HET OVERZURE KININE-SULFAAT.

$C_{20} H_{24} N_2 O_2, 2 H_2 SO_4 + 5 H_2 O.$

Het zout werd bereid door het zure sulfaat $C_{20} H_{24} N_2 O_2$, $H_2 SO_4 + 7 H_2 O$ in water op te lossen en de oplossing, met eene overmaat van zuur gemengd, in een exsiccator boven geconcentreerd zwavelzuur te plaatsen. Na eenigen tijd vormden zich witte zijdeachtige kristallen, die op een BUNSEN'sch filtrum van de moerloog gescheiden, met weinig water uitgespoeld, tusschen filtreerpapier geperst en aan de lucht gedroogd werden.

0.6175 gram van het zout gaven 0.4915 gram $Ba SO_4$.

0.3945 gram van het zout verloren bij drogen op 120° C. 0.0574 gram water.

Hieruit vindt men:

		$C_{20} H_{24} N_2 O_2, 2 SH_2 O_4 + 5 H_2O$
$SO_4 H_2$	33.4	32.0
kristalwater . . .	14.5	14.8

Van dit zout werden 0.6064 gr. in water tot een volumen van 20° C.C. opgelost. Bij eene lengte der buis van 303°.9^{mm} vond ik het volgende voor de waarden van α

13°26′	13°22′	13°23′
13°53′	13°56′	13°54′
13°58′	13°57′	13°56′
13°43′	13°56′	13°53′
13°45′	13°48′	13°46′5

Midden: α = ↖ 13°46′5

$(\alpha)_D$ berekend op het zout ↖ 149°.4.

" " kinine ↖ 281°.6.

INHOUD

VAN

DEEL XII. — STUK 2.

---

bladz.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Twaalfde Deel. — Derde Stuk.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

DE MAGNETISCHE COËFFICIËNTEN

VAN EEN

IJZEREN SCHIP AAN WAARNEMINGEN GETOETST,

DOOR

W. VAN HASSELT,
Luitenant ter zee der 2de klasse, gedetacheerd bij het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut.

De formule:

$$\sin\varphi = A\cos\varphi + B\sin a + C\cos a + D\sin(2a+\varphi) + E\cos(2a+\varphi). \quad (I)$$

of, wanneer de afwijkingen minder dan 20^0 bedragen:

$$\varphi = A + B\sin a + C\cos a + D\sin 2a + E\cos 2a \quad . \quad (I_a)\ *)$$

leert ons de afwijking uit den magnetischen meridiaan van den magneet, van 't kompas aan boord, kennen.

Hierin is φ de gevraagde afwijking en a de koers van het schip op het miswijzende kompas.

Deze formule geldt echter slechts voor eene bepaalde plaats op aarde — verandert het schip in breedte en lengte, dan wordt ook de formule gewijzigd, aangezien B en C grootheden zijn, die afhangen van de Horizontale intensiteit van het aardmagnetismus en van de inclinatie.

*) A, B, C, D, E uit (I) zijn nagenoeg de sinussen dier coëfficiënten (in bogenmaat uitgedrukt) uit (I_a).

A, D en E zijn constant zoo lang in de plaatsing der ijzermassa's aan boord geene verandering voorvalt.

B en C worden voorgesteld door de onderstaande functiën:

$$B = \frac{B_1}{i} + B_2 \, tang \, \delta \; \ldots\ldots\ldots \; (II)$$

$$C = \frac{C_1}{i} + C_2 \, tang \, \delta \; \ldots\ldots\ldots \; (III)$$

waarin:

i de Horizontale intensiteit en

δ de inclinatie.

Verder zijn nu B_1 en B_2, C_1 en C_2 constante grootheden evenals A, D en E.

Zijn nu inclinatie en Hor. intensiteit bekend voor de plaats der waarneming, dan zal men A, B_1, B_2, C_1, C_2, D en E kunnen vinden indien men formule (I*a*) aldus schrijft: —

$$\varphi = A + B_1 \frac{sin\, a}{i} + B_2 \, sin\, a \, tang\, \delta + C_1 \frac{cos\, a}{i} + C_2 \, cos\, a \, tang\, \delta$$
$$+ D \, sin\, 2\, a + E \, cos\, 2\, a \quad .$$

Neemt men dan op de 32 kompasstreken afwijkingen waar, dan verkrijgt men 32 vergelijkingen met 7 onbekenden, en kunnen daaruit de coëfficiënten worden gevonden.

Hoewel nu voor een aantal plaatsen op aarde de elementen van het aardmagnetismus door waarneming zijn gevonden, zoo is dat aantal betrekkelijk nog gering, en moeten wij in vele gevallen ons bedienen van den Atlas des Erdmagnetismus von GAUSS und WEBER *).

Men kan ook, nadat een schip eene of meer reizen heeft gedaan, en op eenige plaatsen gedurende de reis, door rondpeilingen, de afwijkingen voor verschillende koersen heeft bepaald, de coëfficiënten vinden.

Het hierna volgende voorbeeld zal ons doen zien dat de naauwkeurigheid vrij voldoende is.

---

*) Wel geeft de „Admiralty-manuel" magnetische kaartjes voor 1874, doch het bestek komt ons wat klein voor.

Zijn nu gedurende de reis op onderscheidene plaatsen door rondpeiling, op de gewone wijze, de afwijkingen bepaald, dan kan men met behulp van formule (I) de waarde van A, B, C, D en E vinden.

Daar A, D en E constant zijn, zal het rekenkunstig gemiddelde van al de voor die grootheden gevondene waarden de waarschijnlijkste waarde geven.

B en C verschillen voor iedere plaats.

Zoekt men nu in de tafels van GAUSS de Hor. intensiteit en de inclinatie van elke waarnemingsplaats op, en stelt men daarmede en met de voor B en C gevondene waarden de formulen (II) en (III) zamen, dan kan men door middel van de methode der kleinste quadraten de waarschijnlijkste waarden van B_1, B_2, C_1 en C_2 vinden.

Wij weten nu wanneer

$$\frac{A + D \sin 2a + E \cos 2a}{1 + D \cos 2a - E \sin 2a} = \tang \alpha$$

wordt gesteld *), dat:

$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{B \sin a + C \cos a}{1 + D \cos 2a - E \sin 2a} \cos \alpha$$

Substitueren wij hierin de waarden van B en C uit form. (II) en (III), dan komt er:

$$\sin(\varphi-\alpha) = \frac{(B_1 \sin a + C_1 \cos a) \cos \alpha}{1 + D\cos 2a - E\sin 2a} \times \frac{1}{i} + \frac{(B_2 \sin a + C_2 \cos a) \cos \alpha}{1 + D\cos 2a - E\sin 2a} \tang \delta.$$

Stellende nu:

$$\frac{(B_1 \sin a + C_1 \cos a) \cos \alpha}{1 + D \cos 2a - E \sin 2a} = M$$

en

$$\frac{(B_2 \sin a + C_2 \cos a) \cos \alpha}{1 + D \cos 2a - E \sin 2a} = N,$$

*) Zie STAMKART „Regeling van kompassen" bladz. 144 waarin a in plaats van a' en A, B, C, D, E, in plaats van r, m, n, p, q; zoo ook BROUWER, „Zeevaartkunde" 2de deel bladz. 372.

dan verkrijgt men:

$$\sin(\varphi-\alpha)=\frac{M}{i}+N\,tg\,\delta\,,$$

of, als wij in plaats van de sinus den boog schrijven:

$$\varphi=\alpha+\frac{M}{i}+N\,tg\,\delta$$

Zijn alzoo A, B_1, B_2, C_1, C_2, D, E berekend, dan kan men voor iedere kompasstreek, of van 10° tot 10^0, het kompas rond, de waarden van α, M en N vinden, en met behulp van deze waarden en de elementen van het aardmagnetismus φ berekenen.

Zoowel voor de practijk als voor de wetenschap, hebben wij het van belang geacht deze formule aan de waarnemingen te toetsen.

Het materiaal daartoe aan het koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut voorhanden is nog zeer schaarsch, en hoewel in de meteorologische journalen voor stoomschepen eene kolom voorkomt voor afwijkingen, en tevens de gelegenheid gegeven is om gedane rondpeilingen aan te teekenen, zoo vindt men slechts zelden alles volledig ingevuld.

Wij hopen dat de vrij gunstige uitslag van het hier volgend onderzoek de zeevarenden zal aanmoedigen al hunne waarnemingen met juistheid te boeken, en ten .minste hun de overtuiging zal geven dat zij niet ongebruikt blijven liggen.

Eenige jaren geleden werd door den Hoogleeraar HOEK een kompas-journaal ontworpen voor de stoomschepen der Maatschappij Nederland. Tijdens zijn leven werden die journalen aan het Meteorologisch Instituut gezonden. Uit den zeer kleinen voorraad hebben wij het beste genomen, en wel een stel van drie journalen van het stoomschip Prins Hendrik, dat in 1873 in de Roode zee is gezonken.

Uit deze journalen werden nog maar alleen genomen de reizen van Batavia naar Nederland, aangezien het schip dan niet met ijzer was geladen.

Ter bepaling van A, B_1, B_2, C_1, C_2, D, E werd gebruik gemaakt van de volgende waarnemingen: —

Plaats der Waarneming.		Afwijking, toen het schip miswijzend voorlag							
reedte.	Lengte.	N.	N.O.	O.	Z.O.	Z.	Z.W.	W.	N.W.
0 N.	2⁰W.	+4.5	+18.5	+15.5	+6.5	—0.5	—3.5	—12.5	—10.5
0 〃	9⁰ O.	—3.0	+11.0	+13.0	+9.0	+6.5	—1.0	—10.0	—11.0
0 〃	6⁰ 〃	—5.0	+ 9.5	+14.0	+8.5	+5.0	—1.0	— 9.5	—12 0
0 〃	7⁰W.	—6.0	+ 9.0	+13.0	+9.0	+3.0	—1.0	— 5.0	—13.0
0 〃	7⁰ 〃	—8.0	+ 9.0	+12.0	+8.0	+4 0	—3.0	—12.0	—12.0
0 〃	31⁰ O.	+2.0	+10.0	+ 9.0	+4.0	+2.0	—0.5	— 5.0	— 8.0
0 〃	34⁰ 〃	—4.7	+ 4.3	+ 4.3	—1.2	+2.3	—2.7	—10.7	—14.7
0 〃	38⁰ 〃	—5.0	+ 5.0	+ 6.0	+4.0	+2.5	0	— 7.0	—10.5
0 〃	39⁰ 〃	—5.3	+ 5.2	+ 4.7	+0.7	—1.3	—2.8	— 7.3	—11.3
0 〃	41⁰ 〃	—4.0	+ 5.0	+ 5.0	+1.0	+2.0	0	— 8.0	—11.0
0 〃	53⁰ 〃	—5.8	+ 5.2	+ 5.7	+2.2	+2.7	+0.7	— 7.3	—12.3
0 〃	100⁰ 〃	—2.0	+ 7.0	+ 7.0	+1.0	—2.0	+2.0	— 4 0	— 9.0
0 Z.	63⁰ 〃	—6.0	+ 5.0	+ 3.0	+1.0	+1.0	—1.0	— 4.0	— 9.0
0 〃	98⁰ 〃	—3.0	+ 6.5	+ 7.0	+5.5	+3.5	+3.5	— 5.5	—10.0

Noemen wij nu de afwijkingen bij N, NO, O, ZO, Z, ZW, W, en NW respectievelijk φ_0, φ_4, φ_8, φ_{12}, φ_{16}, φ_{20}, φ_{24}, φ_{28}, φ_{32} dan is *):

$$A = \frac{1}{8}(sin\varphi_4 + sin\varphi_{20} + sin\varphi_{12} + sin\varphi_{28} + sin\varphi_0 + sin\varphi_{16} + sin\varphi_8 + sin\varphi_{24}),$$

$$D = \frac{1}{4}\left\{(sin\,\varphi_4 + sin\,\varphi_{20}) - (sin\,\varphi_{12} + sin\,\varphi_{28})\right\},$$

$$E = \frac{1}{4}\left\{(sin\,\varphi_0 + sin\,\varphi_{16}) - (sin\,\varphi_0 + sin\,\varphi_{24})\right\},$$

$$B = \frac{1}{2}\Big[sin\,45_0 \left\{\frac{1}{2}(sin\,\varphi_4 - sin\,\varphi_{20}) + \frac{1}{2}(sin\,\varphi_{12} - sin\,\varphi_{28})\right\}$$
$$+ (1 - D)\,\frac{1}{2}(sin\,\varphi_8 - sin\,\varphi_{24})\Big],$$

*) Zie Admiralty Manual for the deviations of the compass, page 131.

$$C = \frac{1}{2}\left[\sin 45_0 \left\{\frac{1}{2}(\sin\varphi_4 - \sin\varphi_{20}) - \frac{1}{2}(\sin\varphi_{12} - \sin\varphi_{28})\right\} + \right.$$

$$\left. + (1 - D)\frac{1}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_{16})\right].$$

Wij vonden voor A, B, C, D, E, de volgende waarden:

Plaats der Waarneming		Waarde der coëfficiënten.				
Breedte.	Lengte.	A *r*	B *m*	C *n*	D *p*	E *q*
50° N.	2° W.	+0.038	+0.250	+0.035	+0.081	+0.005
37° 〃	9° O.	+0.031	+0.199	—0.049	+0.052	+0.003
36° 〃	6° 〃	+0.025	+0.202	—0.064	+0.052	—0.011
36° 〃	7° W.	+0.020	+0.180	—0.075	+0.052	—0.048
36° 〃	7° 〃	+0.007	+0.207	—0.054	+0.043	+0.005
32° 〃	31° O.	+0.029	+0.134	—0.005	+0.059	+0.000
28° 〃	34° 〃	—0.050	+0.134	—0.048	+0.076	+0.017
21° 〃	38° 〃	—0.011	+0.120	—0.061	+0.050	—0.006
19° 〃	39° 〃	—0.033	+0.117	—0.020	+0.057	—0.009
16° 〃	41° 〃	—0.022	+0.113	—0.047	+0.065	+0.004
13° 〃	53° 〃	—0.019	+0.119	—0.065	+0.069	—0.007
3° 〃	100° 〃	0.000	+0.097	—0.015	+0.074	—0.031
1° Z.	63° 〃	—0.022	+0.081	—0.042	+0.052	—0.017
1° 〃	98° 〃	+0.016	+0.115	—0.065	+0.063	—0.004

De hierbij gevoegde letters *r*, *m*, *n*, *p* en *q* zijn die welke door den Hoogleeraar STAMKART worden gebruikt.

Het rekenkunstig gemiddelde, de waarschijnlijkste waarden voor A D en E geeft:

A = + 0.001 met eene waarschijnlijke fout van 0.005,
D = + 0.060 〃 〃 〃 〃 〃 0.002,
E = — 0.007 〃 〃 〃 〃 〃 0.003.

Om nu uit B en C de waarschijnlijkste waarden van B_1,

B_2 en C_1, C^2 te vinden, hebben wij uit de vergelijkingen (II en III):

$$
\begin{array}{ll}
+0.250=1.934B_1+2.529B_2 & +0.035=1.934C_1+2.529C_2 \\
+0.199=1.308B_1+1.397B_2 & -0.049=1.308C_1+1.397C_2 \\
+0.202=1.390B_1+1.411B_2 & -0.064=1.390C_1+1.411C_2 \\
+0.180+1.517B_1+1.734B_2 & -0.075=1.517C_1+1.734C_2 \\
+0.207=1.517B_1+1.734B_2 & -0.054=1.517C_1+1.734C_2 \\
+0.134=1.146B_1+0.813B_2 & -0.005=1.146C_1+0.813C_2 \\
+0.134=1.093B_1+0.613B_2 & -0.048=1.093C_1+0.613C_2 \\
+0.120=1.047B_1+0.296B_2 & -0.061=1.047C_1+0.296C_2 \\
+0.117=1.068B_1+0.210B_2 & -0.020=1.068C_1+0.210C_2 \\
+0.113=1.044B_1+0.082B_2 & -0.047=1.044C_1+0.082C_2 \\
+0.119=1.030B_1+0.063B_2 & -0.065=1.030C_1+0.063C_2 \\
+0.097=0.979B_1-0.196B_2 & -0.015=0.979C_1-0.196C_2 \\
+0.081=1.156B_1-0.613B_2 & -0.042=1.156C_1-0.613C_2 \\
+0.115=1.009B_1-0.362B_2 & -0.065=1.009C_1-0.362C_2
\end{array}
$$

Volgens de methode der kleinste quadraten is:

$B_1 = +\ 0.104$ met eene waarschijnlijke fout van 0.006,
$B_2 = +\ 0.026$ 〃 〃 〃 〃 〃 0.006,
$C_1 = -\ 0.042$ 〃 〃 〃 〃 〃 0.007,
$C_2 = +\ 0.018$ 〃 〃 〃 〃 〃 0.008.

Derhalve:

$$
\begin{aligned}
A &= +\ 0.001 \\
B_1 &= +\ 0.104 \\
B_2 &= +\ 0.026 \\
C_1 &= -\ 0.042 \\
C_2 &= +\ 0.018 \\
D &= +\ 0.060 \\
E &= -\ 0.007
\end{aligned}
$$

zoodat

$$tg\ \alpha = \frac{0.001 + 0.060 \sin 2a - 0.007 \cos 2a}{1 \quad + 0.060 \cos 2a - 0.007 \sin 2a},$$

$$M = \frac{(0.104 \sin a - 0.042 \cos a) \cos \alpha}{1 \quad + 0.060 \cos 2a - 0.007 \sin 2a},$$

$$N = \frac{(0.026 \sin a + 0.018 \cos a) \cos \alpha}{1 + 0.060 \cos 2a - 0.007 \sin 2a}$$

In onderstaande tabel zijn α, M en N berekend uitgedrukt in graden, voor opvolgende waarden van a van 10^0 tot 10^0 tusschen 0^0 en 180^0. Tusschen 180^0 en 360^0 behoudt α geheel dezelfde waarde, doch veranderen M en N van teeken.

a	α	M	N	a	α	M	N	a	α	M	N
0	—0.3	—2.3	+1.0	60	+3.3	+4.0	+1.8	120	—2.8	+6.6	+0.8
10	+0.8	—1.3	+1.2	70	+2.7	+4.9	+1.8	130	—3.3	+6.1	+0.5
20	+1.9	—0.2	+1.4	80	+1.7	+5.7	+1.7	140	—3.4	+5.6	+0.2
30	+2.7	+0.9	+1.6	90	+0.5	+6.3	+1.6	150	—3.0	+4.9	—0.1
40	+3.3	+1.9	+1.7	100	—0.8	+6.6	+1.4	160	—2.4	+4.0	—0.4
50	+3.5	+3.0	+1.8	110	—1.9	+6.7	+1.1	170	—0.4	+3.2	—0.7

Met behulp van deze tabel, van meergenoemde tafels van GAUSS en WEBÈR en de formule:

$$\varphi = \alpha + \frac{M}{i} + N \, tg \, \delta \ ,$$

kan dus voor iedere plaats op aarde de afwijking gevonden worden.

Hieronder volgt eene lange reeks van waarnemingen gedaan op drie reizen van de Prins Hendrik van Batavia naar Nederland, benevens eene kolom voor de op voormelde wijze berekende afwijkingen en de verschillen tusschen de waargenomene en de berekende.

In onderstaande tabellen is:

N. Br. +, en Z. Br. —;
de lengte van Greenwich van 0^0-360^0 door 't Oosten;
de koers miswijzend van 0^0-360^0 door 't Oosten.

Datum.	Breedte.	Lengte.	Koers.	Hor. intensiteit.	Inclinatie.	M	N	α	Berekende afwijking.	Waargenomene afwijking.	Verschil.
II 72	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o
16	— 6	104	313	0,972	—28.2	— 5.9	— 0.4	— 3 3	— 9.2	—10.0	—0.8
17	5	102	315	975	—26.8	— 5.8	— 0.4	— 3.4	— 9.1	— 9.0	+0.1
18	3	100	326	984	—23.2	— 5.2	0.0	— 3.2	— 8.5	— 7.0	+1.5
19	1	97	325	990	—20.2	— 5.3	0.0	— 3.2	— 8.6	— 9.0	—0.4
20	+ 2	94	322	1.008	—14.9	— 5.5	— 0.1	— 3.1	— 8.6	— 9.0	—0.4
21	4	92	303	011	—11.3	— 6.4	— 0.7	— 3.0	— 9.4	—10.0	—0.6
22	5	89	287	001	—10.2	— 6.7	— 1.2	— 1.5	— 7.9	— 8.0	—0.1
23	5	85	288	0.997	—11.7	— 6.7	— 1.1	— 1.7	— 8.0	— 8.0	0
24	6	81	302	990	—10.2	— 6.5	— 0.8	— 2.9	— 9.3	— 8.0	+1.5
25	7	78	309	990	—10.—	— 6.1	— 0.5	— 3.3	— 9.4	—11.0	—1.6
26	8	75	310	990	—10.—	— 6.1	— 0.5	— 3.3	— 9.4	—11.5	—2.1
26	8	74	305	990	—10.—	— 6.3	— 0.7	— 3.0	— 9.3	—11.5	—2.2
27	9	72	307	1.—	— 8.—	— 6.3	— 0.6	— 3.1	— 9.4	—11.1	—1.7
27	10	71	306	1.—	— 6.—	— 6.4	— 0.6	— 3.1	— 9.4	—11.9	—2.5
28	11	68	306	1.—	— 5.—	— 6.4	— 0.6	— 3.1	— 9.4	—12.—	—2.6
28	11	66	291	0.990	— 6.—	— 6.7	— 1.1	— 2.0	— 8.7	—11.2	—2.5
29	11	65	299	987	— 6.—	— 6.6	— 0.8	— 2.7	— 9.3	—11.—	—1.7
III 72											
2	12	58	276	975	— 4.5	— 6.5	— 1.5	— 0.1	— 6.6	— 8.8	—2.2
7	14	53	254	970	0.0	— 5.2	— 1.8	+ 2.3	— 3.1	— 3.0	+0.1
8	15	53	257	970	+ 2.—	— 5.4	— 1.7	+ 2.0	— 3.7	— 5.0	—1.3
9	15	52	248	970	+ 2.—	— 4.7	— 1.8	+ 2.9	— 2.1	— 1.7	+0.4
11	15	52	206	970	+ 2.—	— 0.4	— 1.5	+ 2.4	+ 1.9	+ 1.0	—0.9
30	19	39	352	960	+12.7	— 3.0	+ 0.7	— 0.4	— 3.4	— 6.0	—2.6
31	22	37	345	950	+20.—	— 3.4	+ 0.5	— 1.4	— 4.8	— 8.0	—3.2
31	23	37	346	950	+22.—	— 3.4	+ 0.6	— 1.2	— 4.6	— 8.0	—3.4
IV 72											
1	24	34	333	947	+24.5	— 4.6	+ 0.2	— 2.8	— 7.6	—10.—	—2.4
2	27	34	304	927	+30.—	— 6.4	— 0.7	— 3.—	—10.3	—14.7	—4.4
7	33	29	315	855	+42.2	— 5.9	— 0.3	— 3.4	—10.6	—11.5	—0.9
8	34	25	323	832	+45.—	— 5.4	— 0.1	— 3.3	— 9.9	—12.0	—2.1
9	35	21	306	804	+46.6	— 6.3	— 0.6	— 3.—	—11.4	—11.0	+0.4
12	38	12	308	717	+54.3	— 6.2	— 0.6	— 3.2	—12.7	—13.0	—0.3
13	39	8	295	690	+57.—	— 6.6	— 0.9	— 2.3	—12.6	—12.0	+0.6
13	39	4	295	680	+57.—	— 6.6	— 0.9	— 2.3	—13.4	—13.0	+0.4
14	38	4	290	680	+57.—	— 6.7	— 1.1	— 1.9	—13.7	—11.0	+2.7
14	38	3	291	675	+57.5	— 6.7	— 1.1	— 2.—	—13.5	—11.0	+2.5
14	38	2	289	665	+58.—	— 6.7	— 1.1	— 1.7	—13.6	—11.0	+2.6

Datum.	Breedte.	Lengte.	Koers.	Hor. intensiteit.	Inclinatie.	M	N	α	Berekende afwijking.	Waargenomene afwijking.	Verschil.
IV 72	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o
14	+38	2	289	0.665	+58.—	— 6.7	— 1.1	— 1.7	—13,6	—12.0	+1.6
14	38	1	270	663	+58.5	— 6.3	— 1.6	+ 0.5	—11.6	—10.0	+1.6
15	37	359	275	674	+59.—	— 6.5	— 1.5	— 0.2	—12.5	—10.0	+2.5
15	37	358	282	668	+59.5	— 6.6	— 1.3	— 1.0	—13.1	—12.0	+1.1
15	36	357	276	674	+59.—	— 6.5	— 1.5	— 0.2	—12.5	—12.0	+0.5
16	35	356	320	679	+58.5	— 5.6	— 0.2	— 3.4	—11.9	—13.0	—1.1
16	36	354	320	658	+60'6	— 5.6	— 0.2	— 3.4	—12.3	—14.0	—1.7
19	42	350	22	576	+65.0	+ 0.1	+ 1.4	+ 2.1	+ 5.3	+ 8.0	+2.7
20	43	350	30	559	+65.6	+ 0.9	+ 1.6	+ 2.7	+ 7.8	+10.0	+2.2
21	46	353	42	536	+66.6	+ 2.1	+ 1.7	+ 3.3	+10.9	+12.0	+1.1
VIII72											
26	— 6	102	270	961	—28.—	— 6.3	— 1.6	+ 0.5	— 5.2	— 3.8	+1.4
27	7	98	266	948	—30.—	— 6.0	— 1.7	+ 1.1	— 4.2	— 2.9	+1.3
28	7	93	268	927	—31.7	— 6.2	— 1.6	+ 0.7	— 5.—	— 4.1	+0.9
29	8	88	265	900	—34.2	— 6.0	— 1.7	+ 1.1	— 4.4	— 4.5	—0.1
30	8	85	275	882	—35.8	— 6.4	— 1.5	— 0.2	— 6.4	— 7.8	—1.4
31	8	81	277	865	—38.—	— 6.5	— 1.4	— 0.4	— 6.8	— 6.5	+0.3
IX 72											
1	8	77	274	844	—40	— 6.4	— 1.5	— 0.1	— 6.4	— 6.2	+0.2
2	8	73	316	825	—42	— 5.8	— 0.3	— 3.4	—10.2	—10.5	—0.3
3	6	69	316	831	—37.5	— 5.8	— 0.3	— 3.4	—10.2	—10.8	—0.6
4	3	66	323	850	—34.2	— 5.4	— 0.1	— 3.3	— 9.6	— 9.5	+0.1
5	1	63	323	863	—32.3	— 5.4	— 0.1	— 3.3	— 9.5	— 8.9	+0.6
6	+ 2	61	327	894	—26.6	— 5.1	0.—	— 3.1	— 8.8	— 7.5	+1.8
6	3	60	325	905	—24.—	— 5.2	— 0.1	— 3.2	— 8.8	—10.1	—1.3
7	4	58	324	913	—22.—	— 5.3	— 0.1	— 3.3	— 9.0	— 8.4	+0.6
8	7	56	329	928	—18.—	— 5.0	— 0.1	— 3.—	— 8.4	— 8.—	+0.4
9	10	53	320	943	—10.—	— 5.6	— 0.2	— 3.4	— 9.3	— 8.9	+0.4
9	10	52	320	939	—10	— 5.6	— 0.2	— 3.4	— 9.4	— 8.1	+1.3
10	12	51	283	952	— 7.5	— 6.6	— 1.3	— 1.2	— 7.9	— 6.3	+1.6
10	12	50	288	947	— 7.5	— 6.7	— 1.1	— 1.6	— 8.6	— 7.8	+0.8
10	12	49	285	942	— 7.5	— 6.7	— 1.2	— 1.3	— 8.2	— 9.—	+0.8
11	12	48	287	942	— 6.2	— 6.7	— 1.2	— 1.5	— 8.5	— 9.—	+0.5
11	12	47	281	945	— 6.2	— 6.6	— 1.4	— 0.9	— 7.7	— 7.7	0.—
13	13	43	352	952	— 2.5	— 3.0	+ 0.7	— 0.4	— 3.6	— 4.8	—1.2
13	13	43	345	958	— 2.5	— 3.6	+ 0.5	— 1.4	— 5.2	— 5.—	+0.2
13	14	42	343	963	0.—	— 3.7	+ 0.5	— 1.7	— 5.5	— 3.5	+2.—
14	16	41	341	966	+ 6.—	— 3.9	+ 0.4	— 2.2	— 6.2	— 5.2	+1.—

Datum.	Breedte.	Lengte.	Koers.	Hor. intensiteit.	Inclinatie.	M	N	α	Berekende afwijking.	Waargenomene afwijking.	Verschil.
IX 72	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o
14	+16	41	340	0.966	+ 6.—	— 4.—	+ 0.4	— 2.4	— 6.5	— 5.5	+1.—
15	19	39	341	984	+12.7	— 3.9	+ 0.4	— 2.2	— 6.1	— 6.6	—0.5
15	19	39	341	984	+12.7	— 3.9	+ 0.4	— 2.2	— 6.1	— 5.9	+0.2
15	20	38	340	953	+15.—	— 4.—	+ 0.4	— 2.4	— 6.5	— 7.4	—0.9
16	22	38	343	952	+19.—	— 3.7	+ 0.5	— 1.7	— 5.4	— 6.—	—0.6
16	22	37	342	952	+20.—	— 3.9	+ 0.4	— 2.0	— 6.0	— 4.3	+1.7
17	25	36	342	933	+25.—	— 3.9	+ 0.4	— 2.0	— 6.0	— 7.6	—1.6
17	25	36	342	933	+25.—	— 3.9	+ 0.4	— 2.—	— 6.0	— 6.4	—0.4
17	25	35	341	933	+26.—	— 3.9	+ 0.4	— 2.2	— 6.2	— 6.4	—0.2
17	26	34	341	933	+28.—	— 3.9	+ 0.4	— 2.2	— 6.2	— 7.4	—1.2
18	28	33	326	912	+31.7	— 5.2	— 0.—	— 3.1	— 8.9	— 9.—	—0.1
22	32	32	316	876	+40.6	— 5.8	— 0.3	— 3.4	—10.2	— 7.4	+2.8
22	32	31	321	873	+40.9	— 5.5	— 0.2	— 3.4	— 9.9	— 6.6	+3.3
22	32	30	305	864	+41.7	— 6.3	— 0.6	— 3.—	—10.8	— 7.5	+3.3
23	33	27	300	845	+43.9	— 6.6	— 0.8	— 2.8	—11.4	— 9.8	+1.6
23	33	26	304	839	+44.4	— 6.4	— 0.7	— 3.—	—11.3	—11.—	+0.3
24	34	24	307	830	+45.5	— 6.3	— 0.6	— 3.1	—11.3	—11.—	+0.3
24	34	23	298	817	+45.7	— 6.7	— 1.1	— 1.7	—11.—	—10.4	+0.6
24	34	21	307	808	+46.1	— 6.3	— 0.6	— 3.1	—11.5	—11.—	+0.5
25	34	19	306	804	+46.6	— 6.3	— 0.6	— 3.1	—11.5	—10.2	+1.3
25	34	19	305	804	+46.6	— 6.4	— 0.7	— 3.—	—11.7	— 9.8	+1.9
26	36	15	317	761	+50.9	— 5.8	0.—	— 3.4	—11.—	— 9.3	+1.7
27	37	12	320	744	+53.3	— 5.6	— 0.2	— 3.4	—11.2	— 9.2	+2.0
27	37	11	322	733	+53.6	— 5.4	— 0.2	— 3.3	—10.9	— 9.1	+1.8
27	37	9	298	705	+54.—	— 6.7	— 0.9	— 2.6	—13.3	—10.—	+3.3
28	38	8	290	700	+55.5	— 6.7	— 1.1	— 1.9	—13.1	— 9.9	+3.2
28	38	7	289	695	+56.—	— 6.7	— 1.1	— 1.8	—13.—	— 9.9	+3.1
29	37	3	285	674	+57.—	— 6.6	— 1.3	— 1.3	—13.1	—10.—	+3.1
29	37	2	289	668	+57.5	— 6.7	— 1.1	— 1.8	—13.5	—10.1	+2.6
X											
1	36	355	259	663	+60.3	— 5.6	— 1.7	+ 1.8	— 9.5	— 7.9	+1.6
1	36	354	317	658	+60.6	— 5.8	0.—	— 3.4	—12.2	—12.9	—0.7
1	36	353	316	658	+61.2	— 5.8	— 0.3	— 3.4	—12.7	—12.7	0
2	37	351	5	637	+61.7	— 1.8	+ 1.1	+ 1.3	+ 0.5	— 1.—	+1.5
3	40	350	18	595	+63.5	— 0.4	+ 1.4	+ 1.7	+ 3.8	+ 4.5	+0.7
4	43	351	40	567	+65.—	+ 1.9	+ 1.7	+ 3.3	+10.4	+12.6	+2.2
6	49	355	60	518	+68.3	+ 4.—	+ 1.8	+ 3.3	+15.5	+17.—	+1.5
6	49	358	60	530	+67.7	+ 4.—	+ 1.8	+ 3.3	+15.3	+17.6	+2.3

Datum.	Breedte.	Lengte	Koers.	Hor. intensiteit.	Inclinatie.	M	N	α	Berekende afwijking.	Waargenomene afwijking.	Verschil.
X	o	o	o		o	o	o	o	o	o	o
6	+50	0	46	0.533	+67.2	+ 2.5	+ 1.8	+ 3.5	+12.5	+16.—	+3.5
7	51	2	79	525	+67.7	+ 5.6	+ 1.7	+ 1.8	+16.6	+16.2	—0.4
7	51	3	79	520	+67.2	+ 5.6	+ 1 7	+ 1.8	+16.6	+16.5	—0.1
II 73											
20	— 5	104	320	983	—25.5	— 5.6	— 0.2	— 3.4	— 9.—	— 6.7	+2.3
21	4	102	304	970	—22.—	— 6.4	— 0.7	— 3.—	— 9.3	— 6.7	+2.6
22	3	100	322	974	—22.—	— 5.4	— 0.2	— 3.3	— 8.7	— 8.—	+0.7
23	1	98	323	990	—20.—	— 5.4	— 0.1	— 3.1	— 8.8	— 7.7	+1.1
24	+ 1	96	324	1.000	—14.—	— 5.3	— 0.1	— 3.1	— 8.4	— 7.4	+1.—
25	4	93	323	008	—10.—	— 5.4	— 0.1	— 3.1	— 8.5	— 7.7	+0.8
26	6	91	323	011	— 5.—	— 5.4	— 0.1	— 3.1	— 8.4	— 8.7	—0.3
27	6	88	273	007	— 7.—	— 6.4	— 1.6	+ 0.1	— 6.1	— 5.1	+1.—
28	6	84	268	002	— 8.—	— 6.2	— 1.6	+ 0.7	— 5.3	— 4.2	+1.1
III 73											
6	6	79	297	0.990	—10.—	— 6.6	— 0.9	— 2.5	— 9.—	— 8.5	+0.5
6	7	78	295	1.000	— 8 —	— 6.6	— 0.9	— 2.3	— 8.8	— 9.2	—0.4
7	7	77	297	0.995	— 8.—	— 6.6	— 0.9	— 2.5	— 9.1	— 8.7	+0.4
8	8	74	292	990	— 8.—	— 6.7	— 1.1	— 2.1	— 8.7	— 8.9	—0.2
8	8	72	304	990	— 8.—	— 6.4	— 0.7	— 3.0	— 9.4	— 7.—	—2.4
8	8	72	302	990	— 8.—	— 6.5	— 0.8	— 2.9	— 9.4	— 9.1	+0.3
9	8	71	302	975	— 9.—	— 6.5	— 0.8	— 2.9	— 9.5	—10.9	—1.4
9	8	70	305	975	— 9.—	— 6.8	— 0.7	— 3.—	— 9.9	— 9.8	+0.1
9	9	69	296	990	— 8.—	— 6.6	— 0.9	— 2.4	— 9.—	—10.—	—1.—
10	10	67	295	986	— 8.—	— 6.7	— 1.—	— 2.3	— 9.—	— 9.—	0.—
10	10	67	298	986	— 8.—	— 6.6	— 0.8	— 2.7	— 9.3	—10.6	—1.3
11	11	64	294	986	— 5.6	— 6.7	— 1.0	— 2.3	— 9.—	— 8.—	+1.—
11	11	63	295	986	— 6.3	— 6.7	— 1.0	— 2.4	— 9.1	— 8.1	+1.—
12	11	63	294	986	— 2.5	— 6.7	— 1.0	— 2.3	— 9.1	—11.—	—1.9
12	12	62	294	986	— 2.5	— 6.7	— 1.0	— 2.3	— 9.1	— 8.7	+0.4
13	13	57	297	980	— 1.3	— 6.6	— 0.9	— 2.5	— 9.2	— 9.3	—0.1
14	13	53	270	963	— 1.3	— 6.3	— 1.6	+ 0.5	— 6.1	— 6.7	—0.6
14	13	52	276	959	— 1.3	— 6.5	— 1.5	— 0.1	— 7.—	— 7 1	—0.1
IV 72											
13	38	351	8	610	+62.4	— 1.5	+ 1.2	+ 0.6	+ 1.—	+ 2.—	+1.—
16	47	355	53	527	+66.9	+ 3.3	+ 1.8	+ 3.5	+14.—	+17.—	+3.—
16	47	356	51	533	+66.6	+ 3.1	+ 1.8	+ 3.5	+13.4	+15.—	+1.6
17	49	359	100	532	+66.6	+ 6.6	+ 1.4	— 0.8	+14.8	+15.—	+0.2

Het verschil tusschen de berekende en de waargenomene afwijkingen is over de 140 waarnemingen aldus verdeeld:

63	malen is	het kleiner	dan	1^0	derhalve	45.—	pCt.
45	〃 〃	〃 〃	〃	2^0	〃	32.1	〃
21	〃 〃	〃 〃	〃	3^0	〃	15.—	〃
10	〃 〃	〃 〃	〃	4^0	〃	7.1	〃
1	maal is	het meer	dan	4^0	〃	0.8	〃

In verreweg de meeste gevallen bedraagt het verschil nog geen $^1/_4$ streek.

Wij mogen den uitslag zeker vrij gunstig noemen en er uit afleiden dat voor schepen waarvan de ijzermassa's onveranderd blijven, eene formule kan worden opgemaakt die voldoende waarborgen geeft, zoodra men buiten de mogelijkheid is door waarneming de afwijking te vinden.

Utrecht, 22 Februari 1878.

RAPPORT

VAN DE HEEREN

N. W. P. RAUWENHOFF en Th. W. ENGELMANN.

Uitgebracht in de Zitting van 30 Maart 1878.

De ondergeteekenden, uitgenoodigd om der Afdeeling voor Wis- en Natuurkunde der Koninklijke Akademie v. Wetenschappen van advies te dienen ten opzichte van een voor de Verhandelingen in 4°. aangeboden opstel van den heer M. TREUB, getiteld: *Quelques recherches sur le rôle du noyau dans la division des cellules végétales*, hebben de eer, hierover het volgend verslag uit te brengen:

Het onderwerp der verhandeling behoort tot een der belangrijkste in de plantenkunde. Nadat algemeen erkend was, dat alle levende organismen uit cellen zijn opgebouwd, en de groote overeenkomst dezer elementairorganen in het planten- en dierenrijk door de onderzoekingen van SCHWANN, KÖLLIKER en anderen was aangetoond, werd de leer der cel de hoeksteen van het gebouw der physiologie en vergelijkende morphologie. De grootste mannen op het gebied der botanie NÄGELI, UNGER, V. MOHL, HOFMEISTER, PRINGSHEIM en anderen hebben in de laatste 40 jaren daaraan gearbeid. Kon in 1827 ALPHONSE PYRAMUS DE CANDOLLE nog van het ontstaan der cellen getuigen „qu'il fallait se garder de prendre un avis décidé sur des matières aussi obscures'', thans is het proces der celvorming in zijne verschillende stadiën bij zeer verschillende planten nauwkeurig onderzocht.

Intusschen zijn de voorstellingen daarvan nog niet in alle bijzonderheden gelijkluidend. Bepaaldelijk geldt dit van de rol en de beteekenis der door ROB. BROWN ontdekte celkern.

SCHLEIDEN had aan deze de vorming van nieuwe cellen toegeschreven en daaruit verschillende onjuiste gevolgtrekkingen afgeleid, welke door NÄGELI en UNGER grondig wederlegd werden. Hoewel desniettegenstaande aanvankelijk aan de kern een gewichtig deel bij het ontstaan van nieuwe cellen werd toegekend, zoo leidden echter de onderzoekingen van V. MOHL en PRINGSHEIM over de deeling der Algen meer de aandacht op het protoplasma, en allengs won de meening veld, dat aan de celkern slechts eene secundaire rol toekwam, totdat in 1875 het belangrijke werk van STRASBURGER: *Ueber Zellbildung und Zelltheilung* verscheen, dat door eene reeks van nieuwe onderzoekingen de groote beteekenis der celkern voor de vorming van nieuwe cellen in het licht stelde, en tevens meer nog dan vroeger de analogie met hetzelfde proces in het dierenrijk aantoonde.

Dit werk nu is de basis, waarop de heer TREUB voortbouwt en waarvan hij den inhoud bij zijne lezers als bekend onderstelt.

Na een goed geschreven historisch overzicht der questie, waarin echter de voorstellingen van HARTIG en KARSTEN, vooral die van den eerstgenoemde, (welke, hoewel met vele vreemde en onjuiste zaken vermengd, toch aan de beteekenis der celkern behoorlijk recht liet wedervaren) wel met een enkel woord vermeld hadden mogen worden, sluit de heer TREUB zijn onderzoek terstond aan dat van STRASBURGER aan.

STRASBURGER had het deelingsproces bij Algen op levende, maar bij Phanerogamen alleen op doode cellen onderzocht. Aan den bewijsgrond dezer laatste was getwijfeld; men had ze zelfs, zoo als o. a. op het voorleden jaar ter dezer stede gehouden botanisch Congres, kunstproducten genoemd. Het was dus van belang, ook *levende* in deeling verkeerende cellen van Phanerogamen te onderzoeken. Hierbij stonden twee wegen open: òf de verschillende stadiën van ontwikkeling in verschillende cellen op te sporen, de weg dien men bij het onderzoek van doode cellen gevolgd was; òf, om *dezelfde* cel in hare opvolgende toestanden van deeling te bestudeeren, en alzoo stap voor stap de veranderingen van kern en protoplasma na te gaan, gelijk dit vroeger bij levende Algen geschied was.

De heer TREUB nu heeft met gelukkig gevolg den tweeden

weg bewandeld, en daarbij gebruik gemaakt van de proembryonaire draden en de ovula van Orchideeën, welke hij in eene waterige oplossing van salpeter van ± $1^1/_4$ pCt. gelegd, bij eene vergrooting van 730 maal heeft bestudeerd.

Hij vond daaronder de beide hoofdvormen van zich deelende cellen, namelijk die met dicht protoplasma en kleine vacuolen, en die met weinig protoplasma, in den vorm van een dun wandbekleedsel, vertegenwoordigd. Zijne onderzoekingen van den tweeden vorm zijn echter vollediger dan die van den eersten.

Dat genoemde voorwerpen van deze veranderde omgeving geen schade ondervonden, bleek hem hieruit, dat niet alleen het proces der deeling regelmatig voortging en ten einde gebracht werd, maar dat zelfs de tijd, waarin elk waarneembaar stadium der deeling in normalen staat wordt doorloopen, zoo als opzettelijke vergelijking leerde, niet merkbaar werd verlengd.

Bij onderscheiden cellen van Orchis latifolia, Epipactis palustris en E. latifolia is op de beschreven wijze door den Heer TREUB de deeling in bijzonderheden onderzocht, en eenige seriën van ontwikkelingstoestanden zijn in keurige teekeningen door hem afgebeeld; teekeningen, des te meer te waardeeren, omdat, gelijk uit de opgegeven tijdruimten blijkt, vaak slechts weinige minuten beschikbaar waren, om het stadium met de chambre claire te schetsen.

De gevonden resultaten komen in het kort hierop neêr: In de cel, die zich gaat deelen, vindt men eene groote kern, die met dunne draden of pseudopodiën verbonden is met de dunne laag protoplasma, welke den wand der cel bekleedt. De kern zelve, die gedurende het deelingsproces steeds van vorm verandert, en van spherisch allengs spoelvormig wordt, bevat een tal van grove korreltjes, welke langzamerhand zich ophoopen in haar midden tot eene soort van plaat, die, zonder homogeen te worden, eindelijk geen afzonderlijke korrels meer laat herkennen. Deze wordt de *kernplaat* genoemd. Men ziet nu veelal eenige dunne, veranderlijke draden of strepen van de kernplaat loopen naar de polen der spoelvormige, doch overigens niet scherp begrensde kern.

Weldra ontstaat eene deeling der dikker geworden kernplaat, het eerst zichtbaar door eene dunne donkere streep in het mid-

den van deze. De beide helften der kernplaat wijken uiteen naar de polen der kern, beginnende in het midden, terwijl aanvankelijk de beide randen, of eene van deze, nog samenhangen. De twee gescheiden helften der kernplaat worden breeder, minder scherp begrensd en door onregelmatige draden onderling verbonden. Zijn zij eindelijk aan de polen der kern gekomen, zoo zijn zij somwijlen zelfs moeilijk van het omringende protoplasma te onderscheiden. Allengs ronden zij zich af en worden dan tot twee nieuwe of secundaire kernen.

In de middellijn tusschen deze nieuwe kernen nam nu de Heer TREUB een aantal kleine korreltjes waar, die in levendige beweging verkeerden en langzamerhand zich in eene dwarse laag plaatsten. Dit is het begin der zoogenaamde *celplaat*. De elementen van deze worden dichter en scherper begrensd, terwijl de plaat zelve in grootte toeneemt en het spoelvormig lichaam der beide kernen aan zijn evenaar verwijdt. Allengs scheidt zich in deze celplaat een cellulosemembraan af, dat zich aansluit aan den celwand der moedercel.

Deze resultaten komen in hoofdzaak overeen met die van STRASBURGER, zoodat hierdoor het bewijs geleverd is, dat de gevolgtrekkingen ten opzichte der celdeeling door laatstgenoemden geleerde uit het onderzoek van doode cellen afgeleid, in het algemeen juist zijn. In de typische gevallen der celdeeling bestaat ook groote overeenkomst tusschen het planten- en het dierenrijk, zooals blijkt bij vergelijking van dit onderzoek met de uitkomsten door BÜTSCHLI, AUERBACH en anderen bij dierlijke cellen verkregen.

Intusschen heeft de Heer TREUB bij de levende cellen ook verschijnselen ontdekt, welke aan STRASBURGER ontsnapt waren, en ten opzichte van enkele punten wijken zijne uitkomsten van die van STRASBURGER af. In deze gevallen heeft de heer TREUB zijne waarnemingen ook op doode cellen uitgebreid, en daarbij gedeeltelijk dezelfde reactieven als STRASBURGER gebruikt, gedeeltelijk de op dierlijk gebied vaak aangewende kleuring met picrin-carmijnzure ammoniak met goed gevolg toegepast.

Zoo komt hij o. a. tot het besluit, dat de homogene, heldere toestand der celkern vóór de vorming der kernplaat gansch niet algemeen is, dat integendeel bij hoogere planten zeer dik-

wijls duidelijke korrels op dat stadium daarin voorkomen. Hij verzuimt niet, hierbij op te merken, dat STRASBURGER in zijn nieuwste werk: *Ueber Befruchtung und Zellbildung*, voor weinige maanden verschenen (waarvan onze schrijver in het laatste deel van zijn onderzoek nog gebruik heeft kunnen maken), ook meer tot deze voorstelling schijnt over te hellen.

Van meer gewicht is echter het verschil van meening tusschen STRASBURGER en TREUB ten opzichte der vorming van celwand en celplaat.

STRASBURGER laat de vorming van den celwand van de peripherie uitgaan, nog vóór het ontstaan van de celplaat. In het binnenste van de celplaat wordt daarna het ontbrekende deel van den celwand gevormd. Met andere woorden, het tusschenschot in de zich deelende cel ontstaat bij Phanerogamen niet simultaan, maar volgens een gemengd type; een deel van den wand groeit van den omtrek naar het midden en een ander deel ontstaat plotseling. Want, volgens STRASBURGER, groeit de eens gevormde celplaat niet meer; hoogstens wordt zij eenigermate uitgerekt door de zijdelingsche uitzetting van het spoelvormig lichaam. Raakt zij dan den wand der moedercel nog niet, zoo completeert het wandprotoplasma de plaat door het celvocht heen. Volgens deze voorstelling zou dus de kern een deel van het tusschenschot vormen, maar ten opzichte van het overige gedeelte slechts eene zeer ondergeschikte beteekenis hebben.

Hiertegen nu komt de heer TREUB op. Zijne onderzoekingen op levende en op doode cellen leerden hem, dat de celplaat tusschen de beide kernen aan hare randen voortgroeit, totdat zij aan alle zijden den celwand raakt. Nooit zag hij de celplaat gecompleteerd door een van den celwand uitgaanden ring; nooit ook zag hij een ringvormig cellulosevlies van den celwand naar de plaat groeien.

De Heer TREUB onderscheidt hierbij twee gevallen: òf het paar celkernen ligt midden in de cel, in welk geval de celplaat aan alle zijden aan den rand groeit en bijna gelijktijdig overal aan den celwand raakt. Het bleef hem daarbij onzeker, of na die aanraking de celwand zich in eens vormt, dan wel of er reeds vóór dien tijd eene samenhangende schijf van cel-

lulose in de celplaat is, die zich dan overal aan den celwand zou vasthechten.

In het tweede geval liggen de celkernen ergens dicht bij den wand der moedercel. Dan raakt de celplaat dadelijk op één punt aan den celwand en groeit aan dezen vast; maar nu zag de Schrijver het geheele spoelvormige lichaam zich langzaam naar den tegenovergestelden celwand bewegen, terwijl intusschen de celplaat in diezelfde richting voortgroeide. Hij nam daarbij duidelijk waar, dat, te beginnen met het punt waar zij aan den celwand raakt, de celplaat zich splijt, naarmate zij aangroeit. In deze spleet vormt zich een cellulosemembraan, aansluitende aan den celwand der moedercel, zoodat hier het membraan successievelijk groeit en van nabij den groei der celplaat volgt.

Volgens deze voorstelling is de beteekenis van de kern bij de deeling veel belangrijker dan STRASBURGER aanneemt. Het eindresultaat van den Heer TREUB is dan ook, dat door directe tusschenkomst der jonge kernen zich de *geheele* celplaat en dus ook de *geheele* celwand vormt, zoodat de rol, welke de kern bij het proces der celdeeling vervult, door velen van secundairen rang geacht, meer op den voorgrond moet geplaatst worden

---

Uit het gegeven overzicht blijkt, dat de Heer TREUB een hoogst gewichtig onderwerp op grondige en wetenschappelijke wijze heeft behandeld. De Schrijver is helder en nauwkeurig in zijne uiteenzetting, voorzichtig en conscientieus in zijne conclusiën. Zijne waarnemingen zijn door voortreffelijke figuren toegelicht.

Al zullen nu ook de geschilpunten door latere onderzoekingen moeten worden uitgemaakt, de ondergeteekenden beschouwen de in hunne handen gestelde verhandeling als eene belangrijke bijdrage tot onze kennis van het proces der celvorming, en zij aarzelen niet, aan de Afdeeling voor te stellen, haar in de werken in 4°. der Koninklijke Akademie van Wetenschappen op te nemen.

Utrecht, 27 Maart 1878.

N. W. P. RAUWENHOFF.
TH. W. ENGELMANN.

B IJ D R A G E

TOT DE

EXPERIMENTEELE BEANTWOORDING DER VRAAG:

BESTAAT ER BIJ DE LAGERE ZWAMMEN EEN ANAËROBIË LEVENSVORM?

DOOR

J. W. G U N N I N G.

Gelijk bekend is, zoekt PASTEUR het wezen der gisting, rotting en van alle fermentatieprocessen, die van levende organismen afhangen, daarin, dat deze de voor hunne functiën noodige zuurstof aan de ontleed wordende stoffen zelve, niet aan de lucht ontnemen. De aërobi n hebben tweederlei medium noodig, het eene dat hun vrije zuurstof aanbrengt, het andere bestemd om ontleed, resp. geoxydeerd te worden. Bij de anaërobiën worden die twee mediën één. Daarom wordt in dezen toestand een met het ligchaamsgewicht niet te vergelijken hoeveelheid stof omgezet, een zeer groot aantal molekulen wordt ontleed om een welligt slechts uiterst kleine hoeveelheid zuurstof aan het levend organisme te verschaffen en voor de rest in andere producten te vervallen.

De theorie is ontstaan uit de waarneming, dat de bedoelde omzettingen bij spaarzamen luchttoevoer plaats hebben, ja dien schijnen te verkiezen boven eene zuurstofrijke atmosfeer. De proef scheen dit te bevestigen en leerde dat bepaaldelijk de alcoholische gisting ten einde kon loopen in ruimten, die met alle bekende middelen zuurstofvrij waren gemaakt. Aanvankelijk

werd dit door O. BREFELD en M. TRAUBE tegengesproken — door eerstgenoemde op grond van het dogma: omnis vita ex oxygenio — daarna echter bevestigd gevonden. Na het ophouden van dien pennestrijd zag men straks deze theorie der fermentatie en de anaërobiose als empirisch feit algemeen door de natuurkundigen aangenomen.

Den opmerkzamen beschouwer van dezen ideëngang kan het niet ontgaan, dat daarin één punt uiterst oppervlakkig is behandeld. Ik wensch hier niet te herhalen, wat ik daarover in *Journ. für prakt. Chemie*, Bd. 16 (1877), bl. 314 heb opgemerkt; met verwijzing daarheen en naar eene mededeeling in de *Kon. Akad. v. Wetensch.* zitting van den 29 April 1877, in eenigzins uitvoeriger vorm ook opgenomen in *Maandblad voor Natuurwet.* 7e Jaarg. blz. 88, mag ik herinneren:

1⁰. dat er geen middel bekend is om te constateeren, dat eene ruimte vrij is van zuurstofgas;

2⁰. dat het tot dusverre als gevoeligst reactief op vrije zuurstof aangenomen lichten van phosphorus ten dezen aanzien verre overtroffen wordt door de blaauwkleuring van versch gepraecipiteerd ferroso-ferrocyaan;

3⁰. dat laatstgenoemd reactief zuurstof aantoont in ruimten die op de gebruikelijke manieren zoo gezegd zuurstofvrij zijn gemaakt, ook nog nadat in die ruimten sterk reduceerende stoffen en absorbtiemiddelen voor zuurstof dagen, ja soms weken lang hebben vertoefd.

Sedert die mededeelingen heb ik nog proeven genomen met glazen toestellen, die op een of twee plaatsen door glazen stoppen, met groote zorg ingeslepen en met vaselin aangesmeerd, of door eene kolom (niet uitgekookt) kwik gesloten waren. Als absorbtiemiddel voor zuurstof gebruikte ik eene oplossing van glucose in natronloog, vermengd met een weinig indigocarmijn. De toestellen waren aanvankelijk met lucht gevuld, zoodat de spanning daar binnen spoedig geringer was, dan die daar buiten. Terwijl een dergelijk toestel, maar aan alle zijden toegesmolten, na twee of drie weken ophoudt blaauwkleuring van daarin gepraecipiteerd wordend ferroso-ferrocyaan te vertoonen, kon dit bij de door glazen stoppen of eene kwikkolom afgesloten ruimten in nog zoo langen tijd niet bereikt worden.

Er bestaat derhalve grond om te betwijfelen of men met recht de tot dusver gebezigde kultuurruimten als werkelijk zuurstofvrij mag aanmerken, en dit gaf mij aanleiding tot de volgende proeven. Het daaraan ten grondslag liggende denkbeeld is het volgende: de bacteriën zelve als middelen te gebruiken om in toegesmolten glazen, luchthoudende ruimten de zuurstof te absorbeeren en na te gaan of zij, terwijl alle overige bekende levensvoorwaarden vervuld waren, al of niet bleven voortleven; of anders uitgedrukt: er werd onderzocht of de beweering: dat in zoogenaamd afgesloten ruimten fermentatieprocessen door bacteriën voleindigd kunnen worden, ook waar is, wanneer die ruimten hermetisch afgesloten zijn. Daartoe werden de stoffen, voor de ontleding bestemd, na behoorlijk geïnfecteerd te zijn, in glazen toestellen zoodanig besloten dat zooveel mogelijk organische stof met zoo weinig mogelijk gasvormige zuurstof in aanraking was. Op verschillende wijzen werd daarnaar gestreefd, gelijk straks blijken zal en daarbij trachtte men tevens zoo goed mogelijk te gemoet te komen aan de bedenkingen, aan welke deze methode van proefneming a priori onderhevig is. In de eerste plaats behoort daartoe deze, dat de vlugtige producten der omzetting niet kunnen ontwijken. Ik moet opmerken, dat gasdrukking op zichzelve als schadelijk moment niet zeer te vreezen scheen. Het is toch reeds verscheidene malen gebleken, dat bacteriën onder zeer uiteenloopende drukkingen kunnen leven. In een geïmproviseerden barometer en in een op de gewone wijze gemaakten waterhamer *) is bacteriënontwikkeling waargenomen; de alcoholische gisting heeft nog onder aanzienlijke drukkingen plaats †) en COHN vond §) in blikjes met geconserveerde erwten, die echter niet lang genoeg gestoomd waren, nadat de sedert ingetreden rotting het vat had doen bersten, levende bacteriën. Veeleer moet bij mijne methode gedacht worden aan een specifiek schadelijken invloed dien de vlugtige omzettingsproducten zelve konden uitoefenen. Om deze bedenking zooveel mogelijk te ontgaan werden vooreerst alleen rottingsverschijnselen bestudeerd en wel van stoffen die daarbij weinig en absorbeerbare vlugtige

---

*) HÜFNER, *Journ. für prakt. Ch.* 13, blz. 475.

†) MELSENS, *Comptres rendus* 70, blz. 629.

§) In de *Beiträge*, ik heb de plaats niet genoteerd.

producten (CO^2 en vlugtige vetzuren) doen ontstaan. Ook werd er op gelet alleen zoodanige stoffen te kiezen, die onder gewone omstandigheden en bepaaldelijk bij geringen luchttoevoer zeer gemakkelijk niet alleen aanvangen te rotten, maar ook daarmede voortgaan. Voorts werd voor uitstekende infectie gezorgd; doorgaans werd daartoe gebezigd een droppel van een mengsel van water, dat met erwten, en water dat met stukken gekookt eiwit stond te rotten, zoodat de verschillende bacteriënvormen behoorlijk waren vertegenwoordigd. Eene groote broeistoof waar de temperatuur dag en nacht tusschen 30 en 40° bleef, diende in den regel tot verblijfplaats der proeftoestellen. Daar het onderzoek echter over meer dan een jaar loopt, was een streng vasthouden daaraan onmogelijk en ook overbodig.

Gelijk men zien zal, werd de uitkomst der proeven in den regel alleen afgeleid uit het uiterlijk voorkomen der stoffen, die zich trouwens dan ook bizonder daartoe leenden. Vooral geldt dit voor het gistafkooksel. Men kan dit als eene gele of lichtbruine, volkomen heldere vloeistof verkrijgen, die in sterielen toestand haar uiterlijk in maanden nagenoeg niet verandert en voor alle bacteriënvormen een volkomen voldoend voedsel schijnt te zijn, zoodat zij als een zeer gemakkelijk en uiterst gevoelig reactief daarop mag worden aangemerkt.

Thans laat ik de beschrijving der proeven zelve volgen.

Eerste Reeks. Proeven in het luchtledige.

Deze proeven dagteekenen van October en November 1876. In kolfjes van ongeveer 100 C.C. inhoud werden gebracht: ongekookte erwten, stukjes raauw vleesch, beide met water overgoten, bouillon, gistafkooksel, elk afzonderlijk, behoorlijk geinfecteerd en tot zoodanige hoeveelheid, dat slechts ongeveer de helft der kolfjes gevuld was. Deze werden daarop aan eene GEISSLER'sche kwik-luchtpomp zoo volkomen mogelijk geëvacueerd en daarna toegesmolten.

Thans (Maart 1878) is het voorkomen als volgt:

De bouillon en het gistafkooksel zijn in kleur en helderheid volkomen onveranderd gebleven. Het vleesch is bleekrood geworden en maar voor een klein gedeelte gedesagregeerd, het overige heeft zijn zamenhang behouden en ziet er uit als niet

volkomen uitgewasschen versch vleesch. De met bouillon gevulde kolf heeft, blijkens den aanslag van het water tegen den wand, de luchtledigheid behouden. Niet alzoo de kolf met erwten, die is geopend; er stroomde gas uit, dat bleek CO^2 te bevatten. De inhoud was zuur: de erwten zelve waren nog in haar geheel, maar geel van kleur, de schil had losgelaten en de inhoud was murw, de reuk die naar vlugtige vetzuren met een onbeduidend spoor van zwavelwaterstof. Het vocht gaf geene reactie op legumine. Door een misverstand werd de observatie onder het mikroskoop verzuimd. De kolf had ongeveer 5 gram gedroogde erwten bevat. Het vocht leverde nu bij destillatie met magnesia 20 milligram ammonia, en bij daarop volgende destillatie met verdund zwavelzuur eene hoeveelheid vlugtige zuren die als boterzuur berekend 264 milligram bedroeg.

Ik merk nog op dat de waargenomen veranderingen spoedig na den aanvang der proef zijn waargenomen en dat de toestand waarin de inhoud zich thans bevindt, een toestand van volkomen rust is, die reeds meer dan een jaar duurt.

Dat de rotting in de kolf met erwten zooveel sterker is geweest dan in de overige, schrijf ik daaraan toe, dat de drooge erwten onder de gerimpelde schil eene belangrijke hoeveelheid niet gemakkelijk te verwijderen lucht bevatten.

Tweede Reeks. Proeven in waterstof- en in stikstofgas.

Fig. 1.

Deze proeven werden genomen in glazen buizen van bijgaanden vorm : de inhoud was ± 90 C.C., de bovenste verwijding diende als veiligheidsruimte bij het heftig opkoken der vloeistoffen gedurende het evacueeren.

De gassen werden op de gewone wijzen bereid en met alle bekende hulpmiddelen gezuiverd. Om er de zuurstof zoo volledig mogelijk aan te ontnemen, werden zij eenige dagen voor het gebruik in een BUNSEN'schen kwikgashouder gebracht, die door middel van ingeslepen en met glazen kranen voorziene glasbuizen, met vermijding van alle caoutchouc, aan de

luchtpomp verbonden was. De kwikoppervlakte in den gashouder was met kleine stukken kleurloozen en bevochtigden phosphorus bedekt. Na aanraking gedurende eenige dagen, zoo noodig in een verwarmd vertrek, en nadat het lichten volkomen had opgehouden, werd het gas door eene buis, glaskoralen bevattende die met chroomzuur-oplossing waren bevochtigd en waardoor phosphordampen en phosphorigzuur werden teruggehouden, geleid in de luchtpomp, aan welke de te vullen buis bevestigd was door aansmelting aan een ingeslepen glasstuk. De buis was vooraf geëvacueerd. Na met het gas gevuld te zijn werd de evacueering en wedervulling nog drie- of viermaal herhaald en daarna de buis afgesmolten.

Sedert Maart 1877 worden aldus in stikstof- en in waterstofatmospheeren bewaard: gedroogde, ongekookte erwten, raauw vleesch, stukjes hard gekookt eiwit, alle drie onder water, voorts urine, bouillon en gistafkooksel, alles vooraf geïnfecteerd.

Deze voorwerpen hebben zich tot dusver slechts uiterst weinig veranderd. Gistafkooksel en urine hebben een weinig bezinksel afgezet, maar zijn wederom volkomen helder geworden. Het vleesch is behalve de kleur die paarsch geworden is en eene geringe desagregatie, onveranderd, desgelijks de erwten. Deze laatsten hebben zelfs in waterstof hare oorspronkelijke groene kleur behouden *).

Derde Reeks. Proeven met zeer kleine hoeveelheid lucht.

In de maanden Juli en Augustus 1877 werden een aantal deels aan de eene zijde toegesmolten buizen, deels kolfjes, nadat de opening was vernaauwd, met verschillende geïnfecteerde organische stoffen gevuld en daarna met insluiting van zoo weinig mogelijk lucht toegeblazen. De ruimte boven de stoffen vrijgelaten, bedroeg in maat hoogstens één duizendste van de

*) Alle voorwerpen in waterstof hebben een iets frischer voorkomen dan die in stikstof. Ik onderstel, dat eene waterstofatmosfeer verder van zuurstof kan worden beroofd, dan een ander gas, omdat het in tegenwoordigheid van een sterk reduceerend ligchaam (phosphorus) zelf tot verbinding met zuurstof wordt gedreven, en herinner om dit aannemelijk te maken aan de welbekende proeven van DE SAUSSURE (*Journ. für prakt. Chemie* 14, 162), over de verandering van knalgas in water, bij aanwezigheid van rottende stoffen.

hoeveelheid organische stof en deze ruimte werd natuurlijk bij het toesmelten sterk verwarmd, zoodat de opgesloten lucht in evenredig verijlden toestand verkeerde.

De gekozen stoffen waren ook thans weder: versch vleesch, stukjes hard gekookt eiwit (beide met water overgoten), bloed, deels gedefibrineerd deels met geleiachtig afgescheiden fibrine, melk (bij uitzondering met een droppel zure melk zelf geïnfecteerd), urine en faecaalstoffen uit de Liernurtoestellen alhier. Deze laatsten wemelden van spirillen en werden alzoo niet opzettelijk geïnfecteerd.

Al deze toebereide buizen zijn tot op den huidigen dag in nagenoeg onveranderden staat aanwezig. Eene buis met urine heeft langs de wanden groote kristallen, denkelijk van tripelphosphaat afgezet, wat dan tevens bewijst dat de oorspronkelijk geconstateerde zure reactie in eene alcalische is overgegaan en dus de rotting is aangevangen. Maar behalve een gering bezinksel op den bodem is het vocht volmaakt helder en van de oorspronkelijke kleur.

De buizen met melk hebben een bizonder karakteristiek voorkomen. Zij hebben steeds vertikaal gestaan: boven heeft zich eene geele laag boter afgescheiden, daaronder is de caseïne van boven tot beneden in de buis tot eene zamenhangende sneeuwwitte massa gestremd, die hier en daar scheuren en afbrekingen vertoont welke met volkomen helder serum opgevuld zijn. Men kan zich moeielijk fraaijer praeparaten denken om de scheiding der melk in hare naaste bestanddeelen te demonstreeren.

Eiwit en vleesch hebben, behoudens eene uiterst geringe verkleuring, hun uiterlijk voorkomen onveranderd behouden.

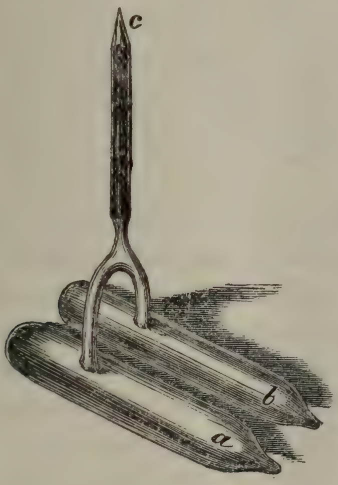
Van eene 5 decimeter lange, op 1 Augustus 1877 met raauw vleesch en een weinig water gevulde en toegesmolten buis, werd op 28 September de uitgetrokken punt afgebroken, waarbij zich eene geringe ontwikkeling van stinkend H^2S en CO^2 houdend gas openbaarde. Men liet de buis open staan en reeds na 24 uur was aan de oppervlakte de groengraauwe verkleuring bemerkbaar, die voor rottend vleesch zoo kenmerkend is. Die verkleuring verspreidde zich in weinige dagen over de volgende lagen tot 4 à 5 centimeter diep. Alstoen werd de buis weder toegeblazen en sedert is de inhoud onveranderd gebleven en nog

altijd hebben de onderste lagen vleesch haar oorspronkelijk voorkomen behouden.

Aan deze proeven werden eenige mikroskopische waarnemingen verbonden. De met uiterst levendige spirillen vervulde faecaalmassa werd gebezigd om er eenige glaskamers, waarvan het eene einde reeds toegesmolten was, mede te vullen en dan ook het andere uiteinde, dat vooraf was uitgetrokken, met insluiting van zoo weinig mogelijk lucht toe te blazen. De toestellen werden in eene warme atmosfeer bewaard. De daarin bevatte stof begon weldra, even als in de makroskopische proeven met hetzelfde materiaal, grove, gemakkelijk bezinkende vlokken af te zetten. In het betrekkelijk heldere vocht dat in de capillaire ruimte aanwezig was, konden na twee of drie dagen geene spirillen meer gevonden worden. Hunne plaats werd ingenomen door kleine bacillen wier contouren en bewegingen flaauwer en flaauwer werden, zoodat er na eenigen tijd geene erkenbare mikro-organismen meer te bespeuren waren.

Vierde reeks. Proeven met absorbeermiddelen voor de ingesloten zuurstof.

Fig. 2.



Daarvoor werden gebezigd toestellen van nevensgaanden vorm; in de eene der 7 à 8 centimeter lange buizen werd de zuurstofabsorbeerende stof gebragt. Daartoe werden bij verschillende proeven gebezigd: eene solutie van glucose in natronloog met een weinig indigocarmijn, een mengsel van een ferrozout met overvloedige natronloog, eene dunne brij van ferrosum-ferrocyanuur met water. Dit laatste is het slechtste — d. i. hier het langzaamste — absorbens, het eerste voldoet verreweg het best, vooral wanneer eenigzins verhoogde temperatuur wordt aangewend.

De organische stoffen die in de tweede buis werden gebragt,

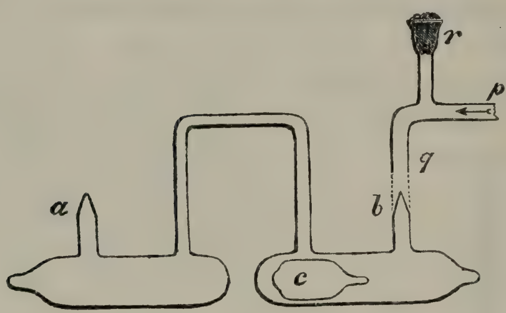
waren in verschillende proeven: stukken hard gekookt eiwit met water, gistafkooksel, urine, allen behoorlijk geïnfecteerd. Nadat de uiteinden *a* en *b* waren toegesmolten werd het uiteinde *c* aan de luchtpomp bevestigd en òf geëvacueerd òf met stikstofgas gevuld.

Zoodanige toestellen zijn in Mei en in Juli 1877 gesloten en sedert bij temperaturen tusschen 15° en 40° bewaard. De inhoud heeft in de eerste dagen onbeduidende kleursverandering of geringe troebeling vertoond, maar is sedert overanderd gebleven.

De vertikale buizen dezer toestellen waren opzettelijk eenigzins lang genomen en met watten gevuld, ten einde te kunnen beproeven of de stoffen, als zij na eenigen tijd geene verdere verandering ondergingen, door toelating van gesteriliseerde lucht weder in rotting zouden geraken.

Dit is echter niet geschied omdat het later doelmatiger scheen, het antwoord op deze vraag langs een anderen weg te zoeken.

Fig. 3.



Twee toestellen nl. van nevensgaanden vorm werden in Juli 1877 met stikstof gevuld door het gas gedurende een geruimen tijd bij *a* in, bij *b* uit te laten stroomen. Vooraf was in de eene buis een mengsel van ferrosum-chloruur en natronloog, in de andere organische stof (in één toestel gistafkooksel, in een ander urine) gebracht, maar niet opzettelijk geïnfecteerd. Om de infectie te kunnen aanbrengen was in elke der buizen met organische stof eene toegesmolten dunne glazen ampul *c* aangebracht, gevuld met rottend gistafkooksel, gemengd met een weinig ferrosumferrocyanuur. De toestellen werden dadelijk na het toeblazen in

een ijskelder geplaatst, waar zij vier weken verbleven, ten einde aan het ferrohydroxyde de gelegenheid te geven om zoo mogelijk alle zuurstof uit de afgesloten ruimte weg te nemen. Na dien tijd bevond men de vloeistoffen volkomen helder en het ferrosum-ferrocyanuur in de ampullen geheel ontkleurd. Die toestand bleef onveranderd toen de apparaten daarna eenigen tijd aan eene temp. van 40° werden blootgesteld. Door eene stootende beweging werden alsnu de ampullen verbroken en hun inhoud door de organische vloeistoffen verspreid, waarbij — gelijk te voorzien was — geen blaauwkleuring van het reactief werd waargenomen. Maar evenmin bleek iets van rotting toen de toestellen daarna in broeitemperatuur werden gebracht. Het gesuspendeerde ferrosum-ferrocyanuur bezonk en liet de vloeistoffen volkomen helder terug *).

In October 1877 werd alsnu door middel van eene in de figuur tevens aangegeven inrichting gefiltreerde lucht gelaten tot de organische stoffen. De glazen buis *p q r*, bij *q* van een caoutchoucbuis voorzien, werd door een krachtigen stoomstraal, die bij *p* intrad, gedesinfecteerd en terwijl de stoom doorging werd de caoutchoucbuis over de punt *b* geschoven en door omwinding met een koperdraad bevestigd, zoodat de stoom nu door *r* ontweek. Na eenigen tijd werd deze opening met watten gesloten en de buis bij *p* afgeblazen. Na bekoeling werd nu de punt *b* in de caoutchoucbuis afgebroken en het toestel wederom een geruimen tijd aan broeiwarmte blootgesteld zonder dat echter tot heden het geringste teeken van rotting in den inhoud waar te nemen is geweest.

Deze uitkomst leidde tot eene

Vijfde Reeks van proeven, bij welke men zich dezelfde vraag n l. of de rotting, die in de hermetisch gesloten toestellen aangevangen, maar spoedig tot staan gekomen was, door lateren toevoer van gedesinfecteerde lucht weder kan worden opgewekt, ter beantwoording stelde.

Deze proeven werden genomen in buizen van nevensgaanden

*) Controleproeven hadden bewezen, dat bedoeld reactief in vloeistoffen, die aan de lucht zijn blootgesteld, de rotting in 't minst niet belemmert.

Fig. 4.

vorm en van een inhoud van 25 tot 70 à 80 C.C. Het gekronkelde gedeelte was aan het uiteinde toegeblazen, de buizen werden door het andere uiteinde gevuld dat daarop insgelijks werd toegesmolten met insluiting van zoo weinig mogelijk lucht. De vullingen bestonden uit stukjes raauw vleesch, gedroogde erwten, ongekookte rijstkorrels, alle drie met water overgoten, voorts uit gistafkooksel, bloed, melk, alles behoorlijk geïnfecteerd.

Zoodanige proeven werden het eerst in September 1877 genomen. Van een stel buizen werd de inhoud door afbreking van de punt van het gekronkelde uiteinde, dadelijk met de lucht in aanraking gebracht, waarvan het gevolg was dat de verschijnselen der rotting zich bij alle stoffen openbaarde door verkleuring, desagregatie en troebeling. Zeer duidelijk bleek echter de belemmering van den luchttoevoer in den vertraagden gang dier verschijnselen. Inzonderheid bij het gistafkooksel deed zij zich op eene eigenaardige wijze kennen. Het weldra troebel geworden vocht werd namelijk na eenigen tijd weder volmaakt helder, om later op nieuw troebel en daarna nogmaals helder te worden. Deze periodiciteit mag een gevolg geacht worden van de snelheid waarmede de bacteriën zich in dit vocht ontwikkelen. Daarbij wordt de voorhanden zuurstof zoo snel verbruikt, dat de diffusie haar niet spoedig genoeg van buiten weder kan aanvoeren, waarvan eene interruptie in het rottingsproces het gevolg moet zijn *).

Een tweede en derde stel dier proeven werden gesloten tot Jan. 1878 op eene warme plaats bewaard, zonder dat aan de

*) Een met bacteriën vervuld gistafkooksel is waarschijnlijk wel het snelste zuurstof absorbeerend middel en daar de rotting van dit vocht tot nagenoeg geen stank aanleiding geeft, heb ik houtzaagsel, met eene zoodanige vloeistof doortrokken, met het beste gevolg gebezigd om stukjes vleesch en hard gekookt eiwit in dichtgesoldeerde blikken bussen tegen bederf te bewaren. Na zes weken op eene warme plaats te hebben gestaan, bleek bij het openen, dat het vleesch wel zijn kleur en geur had verloren, en dat het eiwit tot eene witte zeepachtige massa was geworden (welke echter nog alle reactiën van eiwit vertoonde) maar van rotting en van bacteriën was geen spoor te bespeuren.

inhoud iets anders te zien was, dan de vroeger reeds beschreven onbeduidende veranderingen. Ook de melk gedroeg zich op dezelfde wijze.

Op 19 Jan. 1878 werd de punt van al deze buizen afgebroken, waardoor de inhoud, na vier maanden van de lucht afgesloten geweest te zijn, weder met haar in gemeenschap werd gesteld, maar op zoodanige wijze dat met haar geene bacteriën of kiemen daarvan konden binnendringen.

Bij het openen bleek dat de erwten weder eene belangrijke ontwikkeling van CO^2 en H^2S houdend gas gaven. Een deel van het uitgespoten zure vocht liet onder het mikroskoop ongeschonden amylumkorrels en spiraaldraden erkennen nevens celweefsel-detritus en zwak gecontoureerde en volkomen bewegingloze bacteriën. Ook rijst en vleesch gaven eene, schoon onbeduidende gasontwikkeling. De geopende buizen werden nu 11 etmalen in eene broeistoof bij 40° bewaard, gedurende welken tijd de vloeistoffen tot bezinking kwamen en sedert staan deze buizen door haar gekronkeld uiteinde in voortdurende aanraking met de lucht zonder dat aan haar inhoud het geringste uitwendige teeken van rotting bespeurd kan worden, hetgeen vooral opvalt bij vergelijking met den inhoud van het eerste stel buizen, die van meet af geopend zijn geweest, en die bij allen zich in zeer kennelijken staat van rotting bevindt *).

Tot zoover louter mededeeling van waargenomen feiten; welke gevolgtrekkingen mogen nu daaruit worden afgeleid?

*) Alleen het bloed toont eene zonderlinge afwijking. Het geïnfecteerde bloed, dat steeds met de lucht in aanraking is geweest, bevindt zich wel in kennelijken staat van langzame rotting, maar de roode kleur en het haemoglobinespectrum zijn nog weinig verzwakt. Trouwens de groote bestendigheid van deze kleurstof tegenover rottingsbacteriën is reeds meermalen opgemerkt (HOPPE SEYLER *Zeitschr.* I. Heft 2, KAUFFMANN, *Journ. für prakt. Ch.* 1878, XVII, 79). Maar het bloed dat vier maanden lang opgesloten was geweest en gedurende dien tijd zijn haemoglobinespectrum volkomen onverzwakt had behouden, verloor zeer snel zijne kleur en, gelijk bij het verbreken van eene zoodanige buis bleek, bijna geheel zijn eiwitgehalte terwijl een aanzienlijk bruinzwart haematine houdend bezinksel zich afzette en de wanden der buis bekleedde. Rottingsbacteriën schijnen hierbij niet in het spel te zijn, te oordeelen naar den zeer onbeduidenden stank der vloeistof en de volkomen absentie van bewegelijke bacteriën. PASTEUR vermeldt (*Etudes sur la bière* bladz 49 noot) eene dergelijke verandering van hondenbloed in sterile lucht, maar vond daarbij kristallen, die in mijne praeparaten — want ik heb de proef meermalen herhaald — steeds ontbraken.

Mij dunkt, in elk geval dit algemeene feit: de beweering, zoo dikwijls herhaald, dat fermentatieprocessen die van levende organismen afhankelijk zijn en bepaaldelijk de rotting, in zoogenaamd volkomen van de lucht afgesloten ruimten geheel ten einde kunnen loopen, geldt niet voor ruimten die hermetisch zijn afgesloten.

Immers zal niemand, die deze proeven uit aanschouwing kent, nog vergen dat de absentie van een ontwikkelde rottingproces door analyse werd bewezen. Ten overvloede mag worden herinnerd dat in 15 maanden tijds van de eiwitstof der ingesloten erwten — die van alle gebezigde organische stoffen het minst van lucht konden worden bevrijd — slechts 24 percent boterzuur en 1,8 percent ammonia werd verkregen (zie bldz. 312), terwijl JEANNERET in zijne proeven (*Journ. für prakt. Chemie* 1877, XV 353) bij afsluiting der lucht, uit rottende gelatine en eiwit in 11 tot 29 dagen van 28 tot 35 percent boterzuur en van 5,7 tot 10,7 percent ammonia zag ontstaan.

Kan beweerd worden, dat mijne proeven voorbeelden zijn van een nog veel langzamer verloop der rotting, dan JEANNERET waarnam, ten gevolge van mijne zooveel volkomener afsluiting? Wil men dus, dat de zuurstof der lucht niets anders doet dan het proces bespoedigen? Hiertegen pleiten ten sterkste de proeven der vijfde reeks, waaruit duidelijk blijkt, dat de organische vloeistoffen, na eenigen tijd opgesloten te zijn geweest, door vernieuwde toetreding van bacteriënvrije lucht niet weder tot rotting kunnen worden gebracht *).

De onderstelling dat de zuurstof eene bespoedigende werking zou hebben is in zich zelf irrationeel en strijdig met de theorie der anaërobiose. Immers volgens deze is ontrekking van zuurstofgas het middel om de aërobiën in anaërobiën te veranderen en fermentatie te doen ontstaan. Hoe zoude dan zuurstoftoevoer

---

*) Ik kan niet nalaten er in het voorbijgaan op te merken, dat de methode van deze proeven der vijfde reeks een nieuw middel aan de hand geeft tot bestrijding der archebiose; wij hebben hier organische stoffen, eerst geïnfecteerd en na eenigen tijd in rotting verkeerd te hebben, gesteriliseerd zonder koking, en die noch bij afsluiting noch bij toetreding van (sterile) lucht bacteriën ontwikkelen, al zijn zij aan de gunstigste omstandigheden daartoe blootgesteld. Tegenover de telkens weder optredende en niet altijd gemakkelijk te wederleggen beweeringen van de voorstanders der archebiose (zie BASTIAN, *Journ. of the Linnean Society Zoölogy*, Vol. XIV. N°. 73, bldz. 1) zijn nieuwe experimenteer-methoden niet te versmaden.

datgene bespoedigen kunnen, waarvan zuurstof-onttrekking de conditie is?

Er blijft niet anders over dan aan te nemen, dat de zuurstof-onttrekking in mijne proeven de oorzaak is geweest van den dood der bacteriën en daardoor de rotting heeft doen ophouden niet alleen, maar ook voor het vervolg onmogelijk heeft gemaakt, zelfs bij luchttoevoer, mits deze slechts geene kiemen of bacteriën medebrengt.

Tegen deze voorstelling kan alleen de bedenking worden gemaakt, dat het niet bewezen is dat geene andere oorzaken dan zuurstof-ontrekking bij mijne proeven den dood der bacteriën hebben bewerkt.

Welke zouden die andere oorzaken wezen?

Hooge zuurstofdrukkingen, gelijk in de proeven van P. BERT, zijn hier, gelijk wij reeds in den aanhef opmerkten, onaannemelijk.

VON NÄGELI somt in zijn bekend werk bld. 27 de factoren op van welke de ontwikkeling der bacteriën afhangt: 1^0. de voedingstof, 2^0. de zuurstof, 3^0. het water, 4^0. de in water oplosbare stoffen die geene voedingstoffen zijn, 5^0. de temperatuur, 6^0. mikro-organismen, die tot andere groepen behooren.

Aangezien door mij alleen stoffen zijn gebruikt, die aan de lucht gemakkelijk niet alleen aanvangen te rotten, maar ook tot volledige desorganisatie en totale scheikundige verandering doorrotten en zij steeds geïnfecteerd zijn met bacteriën, uit krachtig rottende stoffen van overeenkomstigen aard genomen, zoo mag veilig worden aangenomen dat de momenten sub 1, 3 en 6 genoemd, even als dat sub 5 in mijne proeven niet de oorzaak van den dood der bacteriën geweest kunnen zijn.

Blijft derhalve, behalve de zuurstof, alleen over: de in water oplosbare stoffen, die geene voedingstoffen zijn. VON NÄGELI merkt daaromtrent het volgende op: de gewone voedingstoffen kunnen voor de bacteriën schadelijk worden 1^0. wanneer de concentratie toeneemt, 2^0. wanneer de omzettingsproducten zich kunnen ophoopen. Mijne wijze van proefneming sloot het eerste geval uit. Overweegt men verder, dat alleen de hermetische sluiting den voortgang der rotting verhindert (waar die sluiting verbroken was ging zij voort, (zie de proef met de vleeschbuis

van de derde reeks, blz. 316 en de contrôle-proeven der vijfde reeks, blz. 320), zoo kan het tweede geval alleen hier in aanmerking komen voor zooverre betreft de vluchtige omzettingsproducten. Van CO^2 kan hier natuurlijk geene sprake zijn, daar dit in vele proeven zich in het geheel niet ontwikkelde, in andere overvloedige gelegenheid vond om door de natronloog, in de toestellen bevat, geabsorbeerd te worden. De voorname vraag blijft deze, of er onder de vluchtige omzettingsproducten zijn, die reeds in kleine hoeveelheid voor de bacteriën vergif zijn en die dus moeten kunnen ontwijken, zal haar leven geen gevaar loopen.

Zoolang men zich over den mogelijken aard van zoodanige stoffen niet eene eenigzins bepaalde voorstelling maken kan, is het niet mogelijk aan deze bedenking door het experiment te gemoet te komen. Wellicht zouden echter vergelijkende proeven met gelijke hoeveelheden van dezelfde organische stof in cultuurruimten van gelijke capaciteit, maar verschillende hoeveelheden zuurstof bevattende, hierover nog eenig meerder licht verspreiden kunnen. Indien de rotting bij meer zuurstof verder gaat, dan bij minder zuurstof, dan kan zij in dit laatste geval niet zijn opgehouden tengevolge van ophooping van schadelijke omzettingsproducten. Om velerlei reden zijn echter zulke proeven uiterst bezwaarlijk, en ik heb dan ook tot dusver niet den moed gehad daaraan te beginnen.

Tot zoolang wensch ik zelf mijne proeven niet als volkomen afdoende aan te merken. Slechts dit schijnt mij zeker toe: in hermetisch gesloten ruimten gaat bij minimale hoeveelheden zuurstof de rotting *niet* tot het einde door, en de voorstanders der anaërobiose en der daarop gegronde fermentatieleer zullen — ten minste als zij zich overtuigd hebben, dat bij deze proeven geen van de bekende sluitingsmiddelen voldoende waarborgen geeft tegen de toetreding van zuurstof uit de lucht dan de hermetische sluiting alleen — naar nieuwe middelen moeten omzien om hunne stelling te bewijzen.

Aan het einde van dit opstel betuig ik mijnen dank aan de Heeren SCHWAB en LIBOSAN, assistenten aan het Laboratorium alhier, voor de hulp mij bij dezen experimenteelen arbeid bewezen.

BIJDRAGEN

TOT DE

THEORIE DER BEPAALDE INTEGRALEN N°. XIV.

OVER INTEGRALEN VAN DEN VORM

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\,sin^2 x.cos^2 x} \text{ en } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,F(x)\,dx}{1+p\,sin^2 x.cos^2 x},$$

WAARIN F EENE GONIOMETRISCHE FUNCTIE IS.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Door de substitutie $2x = y$ herleidt men allengs

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+p\,sin^2x.cos^2x} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dy}{1+\frac{1}{4}p\,sin^2y} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy}{1+\frac{1}{4}p\,sin^2y} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy}{cos^2 y} \frac{1}{sec^2 y + \frac{1}{4}p\,tg^2 y};$$

en hierin $tg\,y = u$ stellende, verder

$$= \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2+\frac{1}{4}pu^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+(1+\frac{1}{4}p)u^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}p}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{4+p}}, \quad (1)$$

naar de bekende waarde der onbepaalde integraal

$$\int \frac{dz}{1+q\,z^2} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,Bg\,tg\,\frac{z}{\sqrt{q}}.$$

Ter wille van de doorloopendheid dezer integraal, is noodzakelijk $4+p>0$, dus $p>-4$.

En dit zal hier voortdurend worden aangenomen, indien niet het tegendeel uitdrukkelijk wordt aangegeven.

Om de integralen

$$K=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \quad \text{en} \quad L=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2 x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}$$

te vinden, heeft men

$$K+L=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{\pi}{\sqrt{4+p}};$$

en verder, met behulp derzelfde substitutie $2x=y$, als boven,

$$L-K=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos y\,dy}{1+\frac{1}{4}p\sin^2 y}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\right]\frac{\cos y\,dy}{1+\frac{1}{4}p\sin^2 y}.$$

Brengt men in de laatste integraal tusschen de haakjes $y=\pi-z$, zoo wordt $dy=-dz$, $\cos y=-\cos z$, $\sin y=\sin z$, met de grenzen $\frac{1}{2}\pi$ en 0; dus verder

$$L-K=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\tfrac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0}\right]\frac{\cos y\,dy}{1+\frac{1}{4}p\sin^2 y}=0. \quad (2)$$

Daaruit volgt $L=K$, en dus

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{4+p}}, \quad \ldots\ldots (3)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2 x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}. \quad \ldots\ldots (4)$$

Verder is, bij dezelfde beteekenis van y,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin x.\cos x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\tfrac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{\sin y\,dy}{1+\frac{1}{4}p\sin^2 y}=\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin y\,dy}{1+\frac{1}{4}p\sin^2 y}=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin y\,dy}{(4+p)-p\cos^2 y}.$$

Door de substitutie $\cos y = z$ wordt dit

$$= 2\int_0^1 \frac{dz}{(4+p) - p z^2} = \frac{2}{4+p}\int_0^1 \frac{dz}{1 - \frac{p}{4+p} z^2}.$$

Bij deze integraal moet men onderscheid maken of $\frac{p}{4+p}$ positief is, dus $p > 0$; dan wel $\frac{p}{4+p}$ negatief, dus $0 > p > -4$, dat is, de volstrekte waarde van $p < 4$. Men verkrijgt in beide gevallen afzonderlijk

$$= \frac{1}{\sqrt{p(4+p)}}\, l \left. \frac{1 + z\sqrt{\frac{p}{4+p}}}{1 - z\sqrt{\frac{p}{4+p}}} \right|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{p(4+p)}} \frac{\sqrt{4+p} + \sqrt{p}}{\sqrt{4+p} - \sqrt{p}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{p(4+p)}}\, l \left\{ \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4+p} - \sqrt{p}\right)\right\}, (p > 0), \quad \ldots \ldots (5)$$

of

$$= \frac{2}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\,tg\, z \left. \sqrt{\frac{-p}{4+p}} \right|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\,tg \sqrt{\frac{-p}{4+p}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\,sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}\right), (0 > p > -4). \quad \ldots (5^a)$$

Door eenvoudige herleiding volgt verder

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\, dx}{1 + p\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \left(1 - \frac{1}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\right) = \frac{\pi}{2p}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}}\right), \quad \ldots \ldots (6)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x\, dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} = (3)-(6) = \frac{\pi}{2p}\left(\frac{2+p}{\sqrt{4+p}} - 1\right), \quad \ldots (7)$$

$$= (4)-(6) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^4 x\, dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x}, \quad \ldots \ldots (8)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^2x.cos^2x.cos2xdx}{1+p\,sin^2x.cos^2x}=\frac{1}{p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}cos2xdx\left(1-\frac{1}{1+psin^2x.cos^2x}\right)=0,\,.\,(9)$$

dus ook

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,4\,x.sin\,2\,x\,d\,x}{1+p\,sin^2x.cos^2x}=0.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(10)$$

Verder volgt, door de substitutie $x=\frac{\pi}{2}-z$,

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^3x.cos\,x\,d\,x}{1+p\,sin^2x.cos^2x}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,x.cos^3x\,d\,x}{1+p\,sin^2x.cos^2x};$$

haar verschil geeft

$$4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,x.cos\,x.cos2\,xdx}{1+p\,sin^2x.cos^2x}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,4\,x\,d\,x}{1+p\,sin^2x.cos^2x}=0,\;.\;(11)$$

die ook rechtstreeks uit (10) te vinden ware; maar hare som geeft daarop

$$2\,I=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,x.cos\,x\,d\,x}{1+p\,sin^2x.cos^2x}.$$

Derhalve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^3x.cos\,x\,d\,x}{1+psin^2x.cos^2x}=\frac{1}{\sqrt{p(4+p)}}l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right\},(p>0),\,.\,(12)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-p(4+p)}}Bg\,sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}\right),\,(0>p>-4),\,.\;(12^a)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,x.cos^3x\,d\,x}{1+p\,sin^2x.cos^2x}.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(13)$$

Bij de vorige integralen is overal de teller van een even graad. Ten einde de integralen te vinden, waarbij die teller van een oneven graad is, zoude men moeten beginnen met de integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x\, d x}{1+p \sin^2 x . \cos^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x\, d x}{1+p \sin^2 x . \cos^2 x},$$

die wel te bepalen is door de eenvoudige onbepaalde integraal, maar waarvan de waarde niet tot eene eenvoudige te herleiden is.

Het bovenstaande moge dus hier volstaan; en met dit materiaal kan men vele andere nieuwe bepaalde integralen afleiden.

2. Vooreerst differentieere men ze naar de standvastige p; zoo geven zij achtereenvolgens

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x . \cos^2 x\, d x}{(1+p \sin^2 x . \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{4+p}^3} \text{ *)}, \quad \ldots (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x . \cos^2 x\, d x}{(1+p \sin^2 x . \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{4+p}^3}, \quad \ldots (3)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x . \cos^4 x\, d x}{(1+p \sin^2 x . \cos^2 x)^2}; \quad \ldots (4)$$

en daarmede

$$4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x . \cos^2 x . \cos 2x dx}{(1+p \sin^2 x . \cos^2 x)^2} = 0, \quad \ldots (2)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin 4 x . \sin 2 x\, d x}{(1+p \sin^2 x . \cos^2 x)^2} \quad \ldots (2^a)$$

Verder

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x . \cos^2 x\, d x}{(1+p \sin^2 x . \cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{1}{p(4+p)} \left[-1+2 \frac{2+p}{\sqrt{p(4+p)}} l \tfrac{1}{2} (\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right], (p>0), (5$$

$$= \frac{1}{p(4+p)} \left[-1+ \frac{2\,(2+p)}{\sqrt{-p(4+p)}} Bgsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right], (0>p>-4), . (5^a)$$

*) Hier en overal verder, zullen wij in de verschillende paragrafen aan de afgeleide integralen hetzelfde nummer geven, als de integraal, waarvan zij zijn afgeleid. Deze wijze van noteeren heeft alleen het bezwaar, dat men, bij de aanhaling eener gevonden uitkomst, niet alleen het nummer, maar ook de paragraaf zelve moet aanhalen.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^4 x . cos^4 x\, d\, x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2p}\left\{\frac{1}{p} - \frac{2}{\sqrt{4+p}} - \frac{1}{\sqrt{4+p}^3}\right\}, \dots (6)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^6 x . cos^2 x\, d\, x}{(1+p sin^2 x . cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2p}\left(-\frac{1}{p} + \frac{2}{p\sqrt{4+p}} + \frac{2+p}{2\sqrt{4+p}^3}\right), . (7)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2 x . cos^6 x\, d\, x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2}, \dots \dots \dots (8)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^4 x . cos^4 x . cos\, 2\, x\, d\, x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} = 0, \dots \dots (9)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2 x . cos^2 x . sin 4\, x . sin\, 2\, x\, d\, x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} = 0, \dots (10)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2 x . cos^2 x . sin 4\, x\, d\, x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} = 0, \dots \dots (11)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^5 x . cos^3 x\, d\, x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2p(4+p)}\left[-1 + \frac{2(2+p)}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\, \tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\right], (p > 0), . (12)$$

$$= \frac{1}{2p(4+p)}\left[-1 + \frac{2(2+p)}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bgsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right], (0 > p > -4), . (12^a)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^3 x . cos^5 x\, d\, x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2}. \dots (13)$$

3. Vermenigvuldigt men de uitkomsten van § 2 met p, en trekt men die produkten af van de overeenkomstige integralen in § 1, dan verkrijgt iedere integraal den factor

$$\frac{1}{1+p sin^2 x . cos^2 x} - \frac{p\, sin^2 x . cos^2 x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} = \frac{1}{(1+p sin^2 x . cos^2 x)^2}; . (\alpha)$$

zoodat men nu verkrijgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{8+p}{2\sqrt{4+p}^3}\pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{8+p}{4\sqrt{4+p}^3}\pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x.\cos x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{1}{4+p}\left[1+\frac{4}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right\}\right], (p>0), . (5)$$

$$= \frac{1}{4+p}\left[1+\frac{4}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}\right)\right], (0>p>-4), . (5^a)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{4+p}^3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{6+p}{4\sqrt{4+p}^3}\pi, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^4 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x.\cos 2x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin 4x.\sin 2x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

De integralen (6), (9) en (10) zijn dezelfde als de integra-

len (1), (2), (2^a) van § 2, die aldaar op andere wijze werden gevonden.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin 4x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^3 x.\cos x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2(4+p)}\left[1+\frac{4}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\right], (p>0), \ldots (12)$$

$$= \frac{1}{2(4+p)}\left[1+\frac{4}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right], (0>p>-4), \ldots (12^a)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x.\cos^3 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Daar $2\sin 4x.\sin 2x = \cos 2x - \cos 6x$ is, volgt nog uit (10) in verband met (2)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 6x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

4. De methode, gebezigd in de beide vorige paragrafen, geeft gereedelijk aanleiding tot de volgende uitbreiding.

Noemt men $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} = I_a$, en beschouwt men deze I_a als eene functie van de standvastige p, die niet in de functie F voorkomt, zoo volgt, door haar naar p te differentieeren,

$$\frac{dI_a}{dp} = -a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\sin^2 x.\cos^2 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}};$$

en hieruit leidt men af, even als in het begin van § 3, naar de herleidingsformule (α),

$$I_a + \frac{p}{a}\frac{dI_a}{dp} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = I_{a+1},$$

of symbolisch

$$\left(1+\frac{p}{a}\frac{d}{dp}\right)I_a = I_{a+1} \dots\dots\dots (a)$$

Voor het eenvoudigste geval, van $a = 1$, heeft men

$$I_2 = \left(1+p\frac{d}{dp}\right)I_1,$$

juist de methode van de paragrafen 2 en 3.

Algemeen is dus

$$I_a = \left(1+\frac{p}{a-1}\frac{d}{dp}\right)\left(1+\frac{p}{a-2}\frac{d}{dp}\right)\cdot\cdot\left(1+\frac{p}{2}\frac{d}{dp}\right)\left(1+p\frac{d}{dp}\right)I_1; \;. (b)$$

zoodat de I_a steeds uit de I_1 is af te leiden naar de volgende formulen, waarbij de waarde der integraal I_1, als functie van p, door $f(p)$, korter door f, worde voorgesteld.

$$I_2 = f + p\frac{df}{dp};$$

$$I_3 = \left(f+p\frac{df}{dp}\right)+\frac{p}{2}\left(2\frac{df}{dp}+p\frac{d^2f}{dp^2}\right) = f + 2p\frac{df}{dp}+\frac{1}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2};$$

$$I_4 = \left(f+2p\frac{df}{dp}+\frac{1}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2}\right)+\frac{p}{3}\left(3\frac{df}{dp}+3p\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{1}{2}p^2\frac{d^3f}{dp^3}\right)=$$
$$= f+3p\frac{df}{dp}+\frac{3}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{1}{2.3}p^3\frac{d^3f}{dp^3};$$

$$I_5 = \left(f+3p\frac{df}{dp}+\frac{3}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{1}{2.3}p^3\frac{d^3f}{dp^3}\right)+\frac{p}{4}\left(4\frac{df}{dp}+6p\frac{d^2f}{dp^2}+2p^2\frac{d^3f}{dp^3}+\frac{1}{2.3}p^3\frac{d^4f}{dp^4}\right)=$$
$$= f+4p\frac{df}{dp}+3p^2\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{2}{3}p^3\frac{d^3f}{dp^3}+\frac{1}{2.3.4}p^4\frac{d^4f}{dp^4};$$

$$I_6 = \left(f+4p\frac{df}{dp}+3p^2\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{2}{3}p^3\frac{d^3f}{dp^3}+\frac{1}{2.3.4}p^4\frac{d^4f}{dp^4}\right)+$$
$$+\frac{p}{5}\left(5\frac{df}{dp}+10p\frac{d^2f}{dp^2}+5p^2\frac{d^3f}{dp^3}+\frac{5}{6}p^3\frac{d^4f}{dp^4}+\frac{1}{2.3.4}p^4\frac{d^5f}{dp^5}\right)=$$
$$= f+5p\frac{df}{dp}+5p^2\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{5}{3}p^3\frac{d^3f}{dp^3}+\frac{5}{2.3.4}p^4\frac{d^4f}{dp^3}+\frac{1}{2.3.4.5}p^5\frac{d^5f}{dp^5}.$$

De coëfficiënten dezer achtereenvolgende uitkomsten schijnen te voldoen aan de volgende wet voor I_{n+1}

$$1,\ \binom{n}{1},\ \frac{1}{2}\binom{n}{2},\ \frac{1}{2.\,3}\binom{n}{3},\ \frac{1}{2.\,3.\,4}\binom{n}{4},\ \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5}\binom{n}{5},$$

dus in het algemeen $\frac{1}{1^{k/1}}\binom{n}{k}$, waarbij $\binom{n}{k}$ de uitdrukking is voor den k^{den} binomiaalcoëfficiënt der n^{de} macht. Men kan ze dan ook aldus voorstellen

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n^{2/-1}}{(1.2)^2},\ \frac{n^{3/-1}}{(1.\,2.\,3)^2},\ \frac{n^{4/-1}}{(1.\,2.\,3.\,4)^2},\ \frac{n^{5/-1}}{(1.\,2.\,3.\,4.\,5)^2}.\ .\ .\ \frac{n^{k/-1}}{(1^{k/1})^2}.$$

Om dit te beproeven onderstellen wij

$$I_{a+1}=f+\frac{a}{1}p\,\frac{df}{dp}+\frac{a^{2/-1}}{(1.\,2)^2}p^2\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{a^{3/-1}}{(1.\,2.\,3)^2}p^3\frac{d^3f}{dp^3}+\,.\,.$$
$$+\frac{a^{k/-1}}{(1^{k/1})^2}p^k\frac{d^kf}{dp^k}+\frac{a^{k+1/-1}}{(1^{k+1/1})^2}p^{k+1}\frac{d^{k+1}f}{dp^{k+1}}+\,.\,.+\frac{1}{1^{a/1}}p^a\frac{d^af}{dp^a}.\ (c)$$

Hieruit volgt vooreerst

$$\frac{p}{a+1}\frac{d.I_{a+1}}{dp}=\frac{p}{a+1}\Big[\frac{df}{dp}+\frac{a}{1}p\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{a^{2/-1}}{(1.\,2)^2}p^2\frac{d^3f}{dp^3}+\,.\,.+\frac{a^{k/-1}}{(1^{k/1})^2}p^k\frac{d^{k+1}f}{dp^{k+1}}+\,.\,.$$
$$+\frac{a}{1}\frac{df}{dp}+\frac{a^{2/-1}}{1.\,2}p\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{a^{3/-1}}{(1.\,2.)^2\,3}p^2\frac{d^3f}{dp^3}+\,.\,.\,.\,.$$
$$+\frac{a^{k+1/-1}}{(1^{k/1})^2(k+1)}p^k\frac{d^{k+1}f}{dp^{k+1}}+\,.\,.+\frac{1}{1^{a/1}}p^a\frac{d^{a+1}f}{dp^{a+1}}\Big]=$$

$$=\frac{p}{a+1}\Big[\frac{a+1}{1}\frac{df}{dp}+\frac{a.a+1}{1.\,2}p\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{a^{2/-1}(a+1)}{(1.\,2)^2.\,3}p^2\frac{d^3f}{dp^3}+\,.\,.$$
$$+\frac{a^{k/-1}(a+1)}{(1^{k/1})^2(k+1)}p^k\frac{d^{k+1}f}{dp^{k+1}}+\,.\,.+\frac{1}{1^{a/1}}p^a\frac{d^{a+1}f}{dp^{a+1}}\Big]=$$

$$=p\frac{df}{dp}+\frac{a}{1.\,2}p^2\frac{d^2f}{dp^2}+\frac{a^{2/-1}}{(1.\,2)^2\,3}p^3\frac{d^3f}{dp^3}+\,.\,.\,.$$
$$+\frac{a^{k/-1}}{(1^{k/1})^2(k+1)}p^{k+1}\frac{d^{k+1}f}{dp^{k+1}}+\,.\,.+\frac{1}{1^{a+1/1}}p^{a+1}\frac{d^{a+1}f}{dp^{a+1}},$$

en dus, volgens de symbolische formule (a),

$$I_{a+2} = \left(1 + \frac{p}{a+1}\frac{d}{dp}\right) I_{a+1} =$$

$$= f + \frac{a+1}{1} p \frac{df}{dp} + \frac{a(a-1+2)}{(1.2)^2} p^2 \frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{a^{2/-1}(a-2+3)}{(1.2.3)^2} p^3 \frac{d^3 f}{dp^3} + \ldots$$

$$+ \frac{a^{k/-1}(a-k+k+1)}{(1^{k+1/1})^2} p^{k+1} \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a+1/1}} p^{a+1} \frac{d^{a+1} f}{dp^{a+1}} =$$

$$= f + \frac{a+1}{1} p \frac{df}{dp} + \frac{(a+1)^{2/-1}}{(1.2)^2} p^2 \frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{(a+1)^{3/-1}}{(1.2.3)^2} p^3 \frac{d^3 f}{dp^3} + \ldots$$

$$+ \frac{(a+1)^{k+1/-1}}{(1^{k+1/1})^2} p^{k+1} \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a+1/1}} p^{a+1} \frac{d^{a+1} f}{dp^{a+1}} =$$

$= I_{a+2}$, volgens de onderstelling (c).

En hieruit blijkt, dat werkelijk de vergelijking (c) de wet der coëfficiënten aangeeft, die in wederkeerigen vorm door (a), en in symbolischen vorm door (b) werd uitgedrukt. Men kan deze wet (c) aldus voorstellen

$$I_{a+1} = \sum_{k=0}^{k=a} \frac{a^{k/-1}}{(1^{k/1})^2} p^k \frac{d^k f}{dp^k} = \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k} \frac{1}{1^{k/1}} p^k \frac{d^k f}{dp^k}. \quad . \quad (c_1)$$

Wil men deze herleidingsformule toepassen op de integralen, die wij in § 1 gevonden hebben, dan zal men zich bij de eenvoudigste moeten bepalen, omdat anders de uitkomsten te zamengesteld zouden worden, en toch niet bruikbaar zouden zijn; in deze laatste gevallen immers doet men beter met het toepassen der symbolische formule (b), en de uitvoering der daarin aangegeven differentiatiën en optelling, even als wij zulks in § 2 en 3 hebben gedaan.

Zij dan vooreerst $f = \dfrac{1}{\sqrt{4+p}}$: dan is (zie mijn Overzicht van de Differentiaal-rekening, 1865, bladz. 33)

$$\frac{d^k f}{dp^k} = \frac{(-1)^k 1^{k/2}}{2^k (4+p)^{k+\frac{1}{2}}},$$

dus $$\binom{a}{k} \frac{1}{1^{k/1}} p^k \frac{d^k f}{dp^k} = (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k \frac{1}{\sqrt{4+p}};$$

en daarmede naar (1) van § 1

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k . . (1)$$

Verder is

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = 0, \quad . . . . (2)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k , . (3)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} . \quad . . . . (4)$$

Zij vervolgens

$$f_1 = \frac{\pi}{2p}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}}\right) = \frac{\pi}{2p} - \frac{\pi}{p\sqrt{4+p}},$$

dan is, ten deele op dezelfde wijze, ten deele naar het theorema van LEIBNITZ,

$$\frac{d^k}{dp^k} \cdot \frac{\pi}{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^k 1^{k/1}}{p^{k+1}},$$

en

$$\frac{d^k}{dp^k} \frac{1}{p\sqrt{4+p}}$$

$$= \sum_{l=0}^{l=k} \binom{k}{l} \frac{d^l}{dp^l} \frac{1}{\sqrt{4+p}} . \frac{d^{k-l}}{dp^{k-l}} \frac{1}{p} = \sum_{l=0}^{l=k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^l 1^{l/2}}{2^l (4+p)^{l+\frac{1}{2}}} . \frac{(-1)^{k-l} 1^{k-l/1}}{p^{k-l+1}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{l=k} \frac{k^{l/-1}}{1^{l/1}} \frac{1^{k-l/1}}{2^l} (-1)^k 1^{l/2} \frac{1}{(4+p)^{l+\frac{1}{2}} p^{k-l+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^k 1^{k/1}}{p^{k+1}\sqrt{4+p}} \sum_{l=0}^{l=k} \frac{1^{l/2}}{1^{l/1}} \left(\frac{p}{2(4+p)}\right)^l ;$$

derhalve

$$\frac{d^k f_1}{dp^k}=\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^k 1^{k/1}}{p^{k+1}}\left[1-\frac{2}{\sqrt{4+p}}\sum_{l=0}^{l=k}\frac{1^{l/2}}{1^{l/1}}\left(\frac{p}{2(4+p)}\right)^l\right],$$

en daarmede naar de integraal (6) van § 1

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^2 x.cos^2 x\,d\,x}{(1+p\,sin^2 x.cos^2 x)^{k+1}}=$$

$$=\frac{\pi}{2\,p}\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\binom{a}{k}\left[1-\frac{2}{\sqrt{4+p}}\sum_{l=0}^{l=k}\frac{1^{l/2}}{1^{l/1}}\left(\frac{p}{2(4+p)}\right)^l\right]. \quad (6)$$

De dubbele sommatiën, die men hier heeft verkregen, kan men ontwijken, en de integraal zelve dus in eenvoudiger vorm afleiden. Daartoe vervange men in de pas gevonden integraal (1) a door $a-1$, en differentieere daarna de uitkomst naar de standvastige p. Op die wijze komt er toch

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^2 x.cos^2 x\,d\,x}{(1+psin^2x.cos^2x)^{a+1}}=\frac{-\pi}{a}\sum_{k=0}^{k=a-1}(-1)^k\binom{a-1}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\frac{d}{dp}.\frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Door logarithmisch differentieeren komt er

$$\frac{d}{dp}.\frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}}=\frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}}\left\{k\frac{1}{p}-(k+\tfrac{1}{2})\frac{1}{p+4}\right\}=$$

$$=\frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}}\,\frac{k(p+4)-(k+\frac{1}{2}}{p\,(p+4)}=\frac{p^{k-1}}{(p+4)^{k+3/2}}(4k-\tfrac{1}{2}p);$$

en daarmede wordt

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^2 x.\,cos^2 x\,d\,x}{1+p\,sin^2 x.cos^2 x)^{a+1}}=$$

$$=\frac{\pi}{2a\sqrt{4+p}}\sum_{k=0}^{k=a-1}(-1)^{k+1}\binom{a-1}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}(8\,k-p)\frac{p^{k-1}}{(p+4)^{k+1}}, \quad (6^a)$$

eene uitkomst, die werkelijk eenvoudiger is dan de vroegere (6).

Wanneer men nu deze waarde aftrekt van de vorige integraal (3), en bij deze laatste den hoogsten term uit de sommatie, voor $k=a$, eerst afzonderlijk neemt, ten einde op die wijze sommatiën tusschen dezelfde grenzen te verkrijgen, geeft dit verschil

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^4 x\,d\,x}{(1+p sin^2x.cos^2x)^{a+1}}=(3)-(6)=\frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\Big[(-1)^a\frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^a+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=a-1}(-1)^k\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k\left\{\binom{a}{k}+\frac{1}{2\,a}\binom{a-1}{k}\frac{8\,k-p}{p\,(4+p)}\right\}\Big]=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\Big[(-1)^a\frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^a+$$

$$+\sum_{k=0}^{k=a-1}(-1)^k\binom{a-1}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k\left\{\frac{a}{a-k}+\frac{8\,k-p}{2\,a\,p\,(4+p)}\right\}\Big]=.\;(7)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{cos^4 x\,d\,x}{(1+p\,sin^2 x.cos^2 x)^{a+1}};\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

waarin bij de verdere herleiding is gebruik gemaakt van de bekende eigenschap der binomiaalcoëfficiënten

$$\binom{a}{k}=\frac{a}{a-k}\binom{a-1}{k}.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\beta)$$

Verder is

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^2x.cos^2x.\,cos\,2\,x\,d\,x}{(1+p\,sin^2x.\,cos^2 x)^{a+1}}=0,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,4x\,.\,sin\,2\,x\,d\,x}{(1+p\,sin^2x.\,cos^2 x)^{a+1}}=0,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,4\,x\,d\,x}{(1+p\,sin^2x.\,cos^2 x)^{a+1}}=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

5. Voor den vorm van $F(x)$, zooals deze in de vorige paragrafen voorkomt, namelijk als produkt van gelijknamige machten van $sin\,x$ en $cos\,x$, dat is $sin^c x.\ cos^c x$, kan men ook met goed gevolg de methode van het integreeren bij gedeelten op de volgende wijze toepassen. Men vindt toch

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^{c+2}x\,.\,cos^{c+2}x\,dx}{(1+psin^2x.cos^2x)^{a-1}}=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^{c+1}x\,.\,cos^{c+1}x}{(1+psin^2x.cos^2x)^{a-1}}\,\frac{d.cos2x}{dx}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{sin^{c+1}x\,.\,cos^{c+1}x\,.\,cos\,2\,x}{(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)^{a-1}}\Big/_0^{\frac{1}{2}\pi}-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}cos\,2\,x\,d\,x.\right.$$

$$\left.\left\{\frac{(c+1).sin^cx.cos^cx.cos2x}{(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)^{a-1}}-(a-1)\frac{sin^{c+1}x.cos^{c+1}x.psin2x.cos2x}{(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)^a}\right\}\right]=$$

$$=0+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^cx\,.\,cos^cx\,dx}{(1+psin^2x.cos^2x)^a}cos^22x.\Big[(c+1)(1+psin^2x.cos^2x)-$$

$$-(a-1)\,2\,p\,sin^2x\,.\,cos^2x\Big],$$

zoolang ten minste $c>-1$ is, en dan de geïntegreerde term verdwijnt.

Nu worden in de integraal van het tweede lid de factoren van de breuk

$$cos^2\,2\,x=1-4\,sin^2x.cos^2x \quad \text{en} \quad (c+1)+(c-2\,a+3)p\,sin^2x.cos^2x,$$

en kan men derhalve dit produkt rangschikken naar de machten van $(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)$, zoodat er komt

$$\frac{1}{p}\Big[-4\,(c-2\,a+3)\,(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)^2+$$

$$+\{(c-2a+3)p+4(c-4a+5)\}\,(1+psin^2x.cos^2x)+2(a-1)(p+4)\Big].$$

Aan den anderen kant kan men in de integraal van het eerste lid den factor $sin^2x\,.\,cos^2x$ veranderen in

$$\frac{1}{p}\Big[(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)-1\Big].$$

Noemt men nu de integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin^cx\,.\,cos^cx\,d\,x}{(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)^a}=K_a,$$

waarbij alleen a de veranderlijke parameter is, en de c standvastig blijft, en niet verandert; zoo geeft de vorige herleiding

$$2(a-1)(p+4)K_a = -\{(c-2a+3)p+(c-4a+6)\}K_{a-1}+4(c-2a+4)K_{a-2}, . (d)$$

eene eenvoudige herleidingsformule, die echter niet kan gebruikt worden voor $a = 1$, of voor $p = -4$; dit laatste geval is trouwens hier overal uitgesloten door de onderstelling in § 1, $p > -4$.

6. Gaan wij nu over tot de methode van het integreeren naar de standvastige p, waarvan hier eene geschikte toepassing kan verwacht worden, zoo wordt vooreerst

$$\int_0^p dp \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)}{\sin^2 x.\cos^2 x} \int_0^p \frac{dl(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)}{dp},$$

en daarmede

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x) \frac{F(x)\,dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \int_0^p dp \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}, . (e)$$

hetgeen bij onze p aangaat, daar algemeen $p > -4$ moest aangenomen worden, en dus de vroeger verkregen uitkomsten stellig gelden voor elke positieve p, behalve wanneer het tegendeel uitdrukkelijk werd aangegeven.

Door middel van de integralen, die in § 1 werden gevonden, levert dit theorema ons de volgende nieuwe integralen.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x) \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= \int_0^p \frac{\pi\,dp}{\sqrt{4+p}} = 2\pi\sqrt{4+p}\Big|_0^p = 2\pi(\sqrt{4+p}-2), \quad . \; . \; (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x) \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^p \frac{\pi\,dp}{2\sqrt{4+p}} = \pi(\sqrt{4+p}-2), \; . \quad (3)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1 + p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)\frac{dx}{sin^2 x}. \;\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

Bij de volgende integraal (5) van § 1 komt, naar hetgeen bij den aanvang van deze paragraaf werd opgemerkt, alleen het geval dat p grooter dan nul is, in aanmerking; en dan verkrijgt men

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\,sin^2 x.cos^2 x)\frac{dx}{sin x.cos x}=2\int_0^p l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\frac{dp}{\sqrt{p(4+p)}}.$$

De substitutie $\sqrt{4+p}+\sqrt{p}=2v$ geeft hier

$$4\frac{dv}{dp}=\frac{1}{\sqrt{4+p}}+\frac{1}{\sqrt{p}}=\frac{2v}{\sqrt{p(4+p)}},\text{ dus }\frac{dp}{\sqrt{p(4+p)}}=\frac{2dv}{v};$$

en derhalve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\,sin^2 x.cos^2 x)\,\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos\,x}=2.\int_{p=0}^{p=p} lv\frac{2\,dv}{v}=4\int_{p=0}^{p=p} lv\,.\,d.lv=$$

$$=2\int_{p=0}^{p=p} d(lv)^2=2\Big[l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\Big]^2\Big|_0^p=$$

$$=2\left\{\big[l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\big]^2-2\left(l\frac{2}{2}\right)^2\right\}=2\big[l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\big]^2..(5)$$

Verder heeft men

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\,sin^2 x.cos^2 x)dx=\int_0^p\frac{\pi dp}{2p}\left(1-\frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\right)=\pi\int_0^p\left\{\tfrac{1}{2}\frac{dlp}{dp}-\frac{1}{p\sqrt{4+p}}\right\}dp.$$

Ten einde den laatsten term in het tweede lid te integreeren, stelle men $4+p=w^2$, dus $p=w^2-4$, $dp=2w\,dw$; derhalve

$$\frac{dp}{p\sqrt{4+p}}=\frac{2\,w\,dw}{(w^2-4)w}=\frac{2\,dw}{w^2-4}=\tfrac{1}{2}\,d\,l\frac{w-2}{w+2}=\tfrac{1}{2}dl\frac{w^2-4}{(w+2)^2}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\,dl\frac{p}{(\sqrt{4+p}+2)^2};$$ en dientengevolge wordt de integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)dx = \pi\int_0^p dp\left[\tfrac{1}{2}dlp - \tfrac{1}{2}d\, l\frac{p}{(\sqrt{4+p}+2)^2}\right] =$$

$$= \pi\int_0^p + \tfrac{1}{2}\,dp\frac{d}{dp}l(\sqrt{4+p}+2)^2 = \pi\, l\,(\sqrt{4+p}+2)\Big|_0^p =$$

$$= \pi\left\{l(\sqrt{4+p}+2) - l4\right\} = \pi\, l\left\{\tfrac{1}{4}(\sqrt{4+p}+2)\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

En nu verkrijgt men gemakkelijk

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x).tg^2 x\,dx = (3)-(6) =$$

$$\pi\left\{\sqrt{4+p} - 2 + 2l2 - l(\sqrt{4+p}+2)\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x).\cot^2 x\,dx, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

en nog

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\cos 2x\,dx = 0, \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\cot 2x\,dx = 0, \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x\, tg\, x dx = 2\left[l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right\}\right]^2, \quad (12)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\cot x\,dx. \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

De vorm der formule (10) § 1 geeft hier niets nieuws, zooals licht te zien is.

7. Bij de integralen met den noemer $(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2$, is naar deze methode in het algemeen

$$\int dp\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(x)dx\frac{-1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\int dp\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\right),$$

en dus

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)}\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x} = -\int dp \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^2} + C..(f)$$

Voorbedachtelijk is hier de integratie niet tusschen de grenzen 0 en p genomen, omdat dan de integraal naar p, $\int dp \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1+p\sin^2x.\cos^2x}\right)$, zoude gegeven hebben $\left(\frac{1}{1+p\sin^2x.\cos^2x} - 1\right)$, hetgeen hier niet het middel zoude zijn om nieuwe integralen op te sporen. De willekeurige standvastige C moet men naderhand telkens afzonderlijk trachten te bepalen. Past men deze methode, zelfs met dezen voorzorgsmaatregel toe op de integralen van § 2, dan komen er die van § 1 terug. Bij de integralen van § 3 geeft deze methode echter nieuwe uitkomsten

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2x.\cos^2x}\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x} = -\frac{\pi}{2}\int \frac{8+p}{\sqrt{4+p}}dp =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int\left[\frac{4}{\sqrt{4+p}} + \sqrt{4+p}\right]dp = -\frac{\pi}{2}\left[8\sqrt{4+p} + \frac{2}{3}\sqrt{4+p}^{\,3}\right] + C.$$

Daar nu de integraal in het eerste lid voor $p = 0$ verdwijnt, wordt $C = \frac{\pi}{2}(8.2 + {}^2/_3.8) = \frac{32}{3}\pi$, en daarmede de integraal

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2x.\cos^2x}\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x} = \frac{\pi}{3}\left[32 - 12\sqrt{4+p} - \sqrt{4+p}^{\,3}\right]..(1)$$

Verder is

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2x.\cos^2x}\frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2x.\cos^2x} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

daar ook hier voor $p = 0$, de willekeurige standvastige verdwijnt. Daarop

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2x.\cos^2x}\frac{dx}{\cos^2x} = \frac{1}{6}\pi\left[32 - 12\sqrt{4+p} - \sqrt{4+p}^{\,3}\right],. (3)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x}\,\frac{dx}{sin^2 x}, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{1+psin^2x\;cos^2x}\,\frac{dx}{sinx.cosx}=-\int\frac{dp}{1+p}\left[1+\frac{4}{\sqrt{p(4+p)}}\,l\frac{\sqrt{4+p}+\sqrt{p}}{2}\right];$$

of, als men weder, even als boven in § 6, $\sqrt{4+p}+\sqrt{p}=2v$ stelt, en bedenkt dat $\frac{1}{2v}=\frac{\sqrt{4+p}-\sqrt{p}}{4}$, dus $\sqrt{4+p}-\sqrt{p}=\frac{2}{v}$, derhalve ook $\sqrt{4+p}=v+\frac{1}{v}$ en $\sqrt{p}=v-\frac{1}{v}$ is, wordt de integraal in het tweede lid, naar het bovenstaande,

$$=-\int\frac{dp}{4+p}-\int 4.\frac{2dv}{v}\,\frac{1}{\left(v+\frac{1}{v}\right)^2}\,lv.$$

Nu wordt de tweede integraal, voor $v^2=z$,

$$\int\frac{8\,v\,dv}{(1+v^2)^2}\,lv=2\int\frac{dz}{(1+z)^2}lz=2\left[-\frac{1}{1+z}lz+\int\frac{dz}{z}\,\frac{1}{1+z}\right]=$$

$$=2\left[-\frac{1}{1+z}lz+\int dz\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}\right)\right]=2\left[-\frac{1}{1+z}lz+lz-l(1+z)\right]=$$

$$=2\left[\frac{z}{1+z}lz-l(1+z)\right]=2\left[\frac{2v^2}{1+v^2}lv-l(1+v^2)\right]=2\left[-l\frac{1+v^2}{v}+\frac{v^2-1}{v^2+1}lv\right]=$$

$$=-l(4+p)+2\sqrt{\frac{p}{4+p}}\,.\,l\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right\}.$$

Dus wordt het tweede lid der vorige formule

$$-2\sqrt{\frac{p}{4+p}}\,.\,l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right\}+C.$$

Omdat nu voor $p=0$, de integraal in het eerste lid verdwijnt, wordt $C=0$, en daarmede eindelijk

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{1+psin^2x.cos^2x}\,\frac{dx}{sinx.cosx}=-2\sqrt{\frac{p}{4+p}}.l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right\} \quad (5)$$

Wilde men het theorema (*f*) nog op de volgende integralen van § 3 gaan toepassen, dan zoude men de oorspronkelijke van § 1 terugvinden.

8. Gaan wij over tot de integralen van § 4, dan heeft men, naar dezelfde methode, meer algemeen

$$\int dp \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^{a+1}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(x)dx \frac{-1}{a\sin^2x.\cos^2x}\,\frac{1}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^a},$$

dus

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^a}\,\frac{dx}{\cos^2x.\sin^2x} = -a\int dp \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^{a+1}} + C,. \quad (g)$$

waarbij ook nu geene grenzen voor de integratie naar de standvastige p zijn aangegeven, wegens dezelfde reden als in de vorige paragraaf werd aangegeven. Men moet derhalve ook hier de willekeurige standvastige C later afzonderlijk trachten te bepalen; en dit doel zullen wij dan ook hier steeds bereiken, wanneer men daartoe $p = 0$ stelt, omdat voor die waarde de integralen in het eerste lid telkens verdwijnen. Op die wijze geeft de integraal (1) van § 4

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^a}\,\frac{dn}{\sin^2x.\cos^2x} = -a\pi \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \int \frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}}dp.$$

Ten einde deze laatste integraal te bepalen, onderstelle men $p+4 = \frac{4}{y}$, zoodat $p = 4\left(\frac{1}{y} - 1\right)$, $dp = \frac{-4dy}{y^2}$, $\frac{p}{4+p} = y\left(\frac{1}{y}-1\right) = 1-y$ wordt; daarmede wordt de integraal van het tweede lid der vorige vergelijking

$$\int \frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}}dp = \int (1-y)^k \frac{\sqrt{y}}{2}\,\frac{-4\,dy}{y^2} = -2\int (1-y)^k \frac{dy}{\sqrt{y^3}} =$$

$$= -2\int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \sum_{l=0}^{l=k} \binom{k}{l} (-y)^l = 2\sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \int y^{l-3/2}dy = 2\sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{1}{l-\frac{1}{2}} y^{l-\frac{1}{2}}$$

$$= 4\sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{1}{2l-1} \left(\frac{4}{p+4}\right)^{l-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{2^{2l+1}}{2l-1}\,\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}},$$

en hiermede wordt nu de waarde van onze integraal

$$= -a\pi \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{2^{2l+1}}{2l-1} \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}} + C.$$

Stelt men nu $p = 0$, dan verdwijnt de integraal in het eerste lid; en in het tweede lid verandert alleen, onder de tweede sommatie naar l, de factor $\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}$ in $\frac{1}{4^{l-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{2l-1}}$; er komt dus eindelijk

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x . \cos^2 x)^a} \frac{dx}{\sin^2 x . \cos^2 x} =$$

$$= a\pi \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{2^{2l+1}}{2\,l-1} \left\{ \frac{1}{2^{2l-1}} - \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}} \right\}, . \ (1)$$

zoodat men nu ook heeft

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x . \cos^2 x)^a} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= a\pi \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{2^{2l}}{2l-1} \left\{ \frac{1}{2^{2l-1}} - \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}} \right\}, . \ (3)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x . \cos^2 x)^a} \frac{dx}{\sin^2 x} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nog is

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x . \cos^2 x)^a} \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^2 x . \cos^2 x} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

omdat ook hier de willekeurige standvastige voor $p = 0$ verdwijnt.

Verder geeft de integraal (3), wanneer men daarin vooreerst a door $a + 1$ vervangt, vervolgens den hoogsten term van de eerste sommatie naar k afzonderlijk neemt, en ze daarna vermindert met de integraal (1) van § 4,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{tg^2 x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}}\,dx =$$

$$=(-1)^{a+1}(a+1)\pi\frac{1^{a+1/2}}{2^{a+1/2}}\sum_{l0}^{l=a}(-1)^{l-1}\binom{a}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left\{\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+\pi\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left[(a+1)\binom{a+1}{k}\sum_{l=0}^{l=k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left(\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right)-\frac{1}{\sqrt{p+4}}\binom{a}{k}\left(\frac{p}{p+4}\right)^{k-}\right],$$

of, omdat uit de wet der binomiaal coëfficiënten volgt

$$\binom{a+1}{k} = \frac{a+1}{a-k+1}\binom{a}{k}, \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{tg^2 x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}}\,dx =$$

$$=(-1)^{a+1}(a+1)\pi\frac{1^{a+1/2}}{2^{a+1/2}}\sum_{l=0}^{l=a}(-1)^{l-1}\binom{a}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left\{\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+\pi\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^{k-1}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\binom{a}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{p+4}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k+\right.$$

$$\left.+\frac{(a+1)}{a-k+1}\sum_{l=0}^{l=k}(-1)^l\binom{k}{l}\frac{2^{2l}}{2\,l-1}\left(\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right)\right], \quad \ldots (7)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{cot^2 x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}}\,dx. \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

9. De vorige integralen zijn of allen, of meerendeels, van den vorm, dat zij geschikt zijn voor de toepassing van twee theoremata, die ze tot zeer verschillenden vorm brengen, in zooverre de factor x hetzij in den teller, hetzij in den noemer wordt opgenomen.

De eerste dier herleidingen verkrijgt men door de substitutie $x = \frac{1}{2}\pi - y$; alzoo vindt men in het algemeen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,F(x)\,dx}{1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\frac{1}{2}\pi-x)\,F(\frac{1}{2}\pi-x)\,dx}{1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x} =$$

$$=\frac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(\frac{1}{2}\pi-x)\,dx}{1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,F(\frac{1}{2}\pi-x)\,dx}{1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x},$$

en daaruit

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)+F(\frac{1}{2}\pi - x)}{1+p\sin^2 x \cdot \cos^2 x} x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(\frac{1}{2}\pi - x)\,dx}{1+p\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \cdot \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h)$$

Deze herleiding kan nu op de vorige integralen worden toegepast, wanneer in het algemeen de integraal in het tweede lid bekend is, en dit is natuurlijk noodzakelijk; zij is in het bijzonder van nut, wanneer, zooals hier in den regel het geval is, $F(\frac{1}{2}\pi - x) = F(x)$, en dus $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = 2F(x)$ is. Langs dezen weg geven de integralen van § 1

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{4+p}} \ldots (1)$$

Voor de integraal (2) van § 1, wordt $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = 0$; deze geeft dus niets. Bij de integraal (3) van diezelfde paragraaf is $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, en er komt dan de vorige uitkomst wederom terug; en hetzelfde geldt voor de integraal (4) aldaar. Maar de integraal (5) en volgende geven daarentegen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \sin x \cdot \cos x\,dx}{1+p\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \cdot \cos x\,dx}{1+p\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{p(4+p)}}\, l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p}\},\ p>0, \ldots \ldots (5)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}),\ (0>p>-4), \ldots \ldots (5^a)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\sin^2 x.\cos^2 x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{8p}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}}\right) \ldots (6)$$

De integralen (7) en (8) van § 1 verkeeren wederom in het-

zelfde geval als de voorafgaande (3) en (4); zij zouden in den teller den factor verkrijgen $sin^4 x + cos^4 x = 1 - 2\, sin^2 x \,.\, cos^2 x$; en dus eene integraal leveren, die was zamengesteld uit de integralen (1) en (6). Bij de integralen (9), (10) en (11) van § 1 verdwijnt weder de teller van de integraal in het eerste lid; langs dezen weg verkrijgen wij dus niets. Wat de integralen (13) en (14) van voornoemde paragraaf aangaat, zij leveren beide in den teller den factor $sin^3 x \,.\, cos\, x + cos^3 x \,.\, sin\, x = sin\, x \,.\, cos\, x\, (sin^2 x + cos^2 x) = sin\, x \,.\, cos\, x$; er zoude dus hier weder de integraal (5) te voorschijn komen.

10. Men heeft ook algemeener dan in § 9

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x)}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a}\, x\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} \,.\,.\, (i)$$

Hierdoor geven de integralen van § 2, voor $a = 2$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, sin^2 x \,.\, cos^2 x\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2 x \,.\, cos^2 x\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^2} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{4+p}^{\,3}} ,\,.\, (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, sin^3 x \,.\, cos^3 x\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^3 x \,.\, cos^3 x\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4p(4+p)} \left[-1 + \frac{2(2+p)}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\} \right],\ (p > 0),\,.\,(5)$$

$$= \frac{\pi}{4p(4+p)} \left[-1 + \frac{2(2+p)}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\, sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}) \right],\ (0 > p > -4),\,.\,(5a)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, sin^4 x \,.\, cos^4 x\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^4 x \,.\, cos^4 x\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8p} \left[\frac{1}{p} - \frac{2}{p\sqrt{4+p}} - \frac{1}{\sqrt{4+p}^{\,3}} \right],\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

terwijl de overige integralen van die paragraaf of niets nieuws, of in het geheel niets opleveren.

11. Hetzelfde heeft plaats met de integralen van § 3, wanneer men daarbij het theorema (i) gebruikt voor $a = 2$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{8}\pi^2 \frac{8+p}{\sqrt{4+p}^{\,3}}, \cdot (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \sin x\,.\cos x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x\,.\cos x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4(4+p)}\left[1 + \frac{4}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\right],\ (p>0),.(5)$$

$$= \frac{\pi}{4(4+p)}\left[1 + \frac{4}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Bg\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}\right)\right],\ (0>p>-4)..(5^a)$$

12. Wat intusschen de beschouwingen van § 4 betreft, ook deze kan men hier soms gebruiken.

Wanneer $F(x) = \sin^{b+c}x.\cos^{b-c}x$ is, wordt $F(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin^{b-c}x.\cos^{b+c}x$, en derhalve $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin^{b-c}x.\cos^{b-c}x(\sin^{2c}x + \cos^{2c}x)$; en hierin laat de factor $\sin^{2c}x + \cos^{2c}x$ zich vereenvoudigen, omdat men weet dat $(\sin^2 x + \cos^2 x)^c = 1$ is; door deze herleiding wordt dan de integraal tot eenvoudiger vormen teruggebracht.

Vervolgens wanneer $F(x)$ een factor $\cos 2\,x\,.\sin 4\,x$, enz. heeft, kan $F(\frac{1}{2}\pi - x) = -F(x)$, dus $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = 0$ worden; in dat geval verkrijgt men natuurlijk geene uitkomst.

Eindelijk, wanneer $F(x) = \sin^c x.\cos^c x$ is, wordt $F(\frac{1}{2}\pi - x) = F(x)$, en dientengevolge $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = 2\,F(x)$; in zulk geval kan men de formulen van § 4 met goed gevolg gebruiken.

Het theorema (c) geeft dan, indien $I_1 = f(p)$ bekend is,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,F(x)\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi I_{a+1} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k} \frac{1}{1^{k/1}}\, p^k \frac{d^k f}{d\,p^k}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

Het theorema (i) kan men nu ook toepassen op sommige der

algemeene integralen van § 4, waarvan aldaar de waarde bepaald is,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,dx}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k, \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,sin^2 x\,.\,cos^2 x\,dx}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2 x\,.\,cos^2 x\,dx}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8a\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a-1} (-1)^{k+1} \binom{a-1}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} (8k-p) \frac{p^{k-1}}{(p+4)^{k+1}} \,.\,.\,(6)$$

13. Eindelijk verkrijgt men door middel van de twee integralen (1) en (5) van § 7, de eenige toch, die men hier met vrucht kan gebruiken,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x}{1+p sin^2 x.cos^2 x} \frac{dx}{sin^2 x.cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p sin^2 x.cos^2 x} \frac{dx}{sin^2 x.cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{12}\pi^2 \left[32 - 12\sqrt{4+p} - \sqrt{4+p}^{\,3}\right], \dots\dots\dots (1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x}{1+p\,sin^2 x.cos^2 x} \frac{dx}{sin x.cos x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\,sin^2 x.cos^2 x} \frac{dx}{sin x.cos x} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{p}{4+p}} \cdot l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}. \dots\dots\dots (5)$$

Evenzoo geeft nog de integraal (1) van § 8

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x}{(1+p sin^2 x.cos^2 x)^a} \frac{dx}{sin^2 x.cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p sin^2 x.cos^2 x)^a} \frac{dx}{sin^2 x.cos^2 x} =$$

$$= \tfrac{1}{4}a\pi^2 \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{l}{k} \frac{2^{2l+1}}{2l-1} \left(\frac{1}{2^{2l-1}} - \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right) \,.\,.\,(1^a)$$

14. Wanneer men tracht de methode van de paragrafen (9) en (10) toe te passen op het geval, dat de integraal den factor

x^2 bezit, verkrijgt men langs denzelfden weg en door dezelfde substitutie, in het algemeenste geval, waarbij in den noemer de exponent a voorkomt,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2 F(\frac{1}{2}\pi - x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\frac{1}{2}\pi - x)^2 F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} - \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2 F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} \dots\dots\dots \quad (l)$$

Naar hetgeen in § 9, 10 gebleken is, vond men voor de tweede integraal in het tweede lid alleen dan eene bepaalde waarde, als $F(\frac{1}{2}\pi - x) = F(x)$ is; maar dan heffen ook de beide eerste integralen van het tweede lid elkander op, en de overblijvende wordt gelijk aan de integraal in het eerste lid; dat is de vergelijking wordt daardoor identiek, zoodat zij geene aanleiding geeft tot het bepalen van de gezochte integraal van het eerste lid.

Voor de integralen met den factor x^3 heeft men nu op dezelfde wijze

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^3 F(\frac{1}{2}\pi - x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\frac{1}{2}\pi - x)^3 F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} =$$

$$= \frac{1}{8}\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^a} - \frac{3}{4}\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^a} +$$

$$+ \frac{3}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2 F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^3 F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a},$$

als men de herleiding van § 10 hier gebruikt; derhalve bij de onderstelling $F(x) = F(\frac{1}{2}\pi - x)$, die aldaar gold, verkrijgt men hier

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^3 F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} = -\frac{1}{32}\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} +$$

$$+ \frac{3}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2 F(x)\, dx}{(1 + p\, sin^2 x \,.\, cos^2 x)^a} \dots\dots\dots \quad (m)$$

Omdat echter de laatste integraal in het tweede lid, volgens het bovenstaande, niet te vinden was, kan men ook de integraal in het eerste lid niet bepalen. Men vindt alleen uit de betrekking (m) de herleidingsformule

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(3\pi - 4x)}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} x^2 F(x) dx = \frac{1}{8}\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}, \quad (n)$$

die echter weinig fraai is.

Door de methode van integreeren bij gedeelten kan men echter ook vinden

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} = \frac{x^2 F(x)}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\pi} -$$

$$-\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\,dx \frac{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x) F'(x) - a F(x) p \sin 2x.\cos 2x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}.$$

In de eerste plaats verdwijnt de geïntegreerde term voor de onderste grens $x = 0$, wegens den factor x^2; hij wordt bij de bovenste grens $\frac{1}{4}\pi^2 F(\frac{1}{2}\pi)$; of ook, wegens de voorwaarde voor het bestaan der integraal in het eerste lid, daar $F(\frac{1}{2}\pi - x) = F(x)$, dientengevolge ook $F(\frac{1}{2}\pi) = F(0)$ moet zijn, wordt die waarde $\frac{1}{4}\pi^2 F(0)$. Bij de vroeger afgeleide integralen verdwijnt derhalve die geïntegreerde term.

Vervolgens is bij het vorige in § 9, 10, 11 en 12 altijd $F(x) = \sin^c x.\cos^c x$, dus $F'(x) = c\sin^{c-1} x.\cos^{c-1} x.\cos 2x$ en daarmede wordt de teller van de integraal in het tweede lid

$$\sin^{c-1}x.\cos^{c-1}x.\cos 2x\{c(1+p\sin^2 x.\cos^2 x) - 2ap\sin^2 x.\cos^2 x\} =$$

$$= \sin^{c-1}x.\cos^{c-1}x.\cos 2x\{c+(c-2a)p\sin^2 x.\cos^2 x\}, \quad (\delta)$$

$$= \sin^{c-1}x.\cos^{c-1}x.\cos 2x\{2a+(c-2a)(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\}. \quad (\varepsilon)$$

Door middel van deze laatste herleiding vindt men nu

$$2a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2 \sin^{c-1}x.\cos^{c-1}x.\cos 2x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} + (c-2a)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2 \sin^{c-1}x.\cos^{c-1}x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a-1}} =$$

$$= -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} = -\frac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}. \quad (o)$$

eene herleidingsformule tusschen twee integralen derzelfde soort, waarbij de veranderde parameter is de exponent in den noemer. Tengevolge van de voorlaatste herleiding (δ) vindt men evenzeer

$$(2a-c)p\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^2 sin^{c+1}x.cos^{c+1}x.cos2xdx}{(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)^a}-c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^2 sin^{c-1}x.cos^{c-1}x.cos2xdx}{(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)^a}=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x\,F(x)\,dx}{(1+p\,sin^2x\,cos^2x)^a}=\tfrac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,dx}{(1+p\,sin^2x.cos^2x)^a},\;.\;(p)$$

wederom eene herleidingsformule tusschen twee integralen van dezelfde soort, waarbij nu evenwel de exponent c in den teller de veranderende parometer geworden is.

Geen van beide herleidingen echter voeren hier tot eenvoudige bruikbare uitkomsten.

15. Denzelfden gang, als in § 9, kan men evenwel ook volgen, bij sommige integralen van § 6, namelijk de (1), (5) en (6). Men vindt toch door de substitutie $x=\frac{1}{2}\pi-y$, op dezelfde wijze, als in de aangehaalde paragraaf,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}x\,l(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)\,sin^cx\,.\,cos^cx\,dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\tfrac{1}{2}\pi-x)\,l(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)\,sin^cx\,.\,cos^cx\,dx,$$

en derhalve wederom

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}x\,l(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)\,sin^cx\,.\,cos^cx\,dx=$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}l(1+p\,sin^2x\,.\,cos^2x)\,sin^cx\,.\,cos^cx\,dx;\;.\;.\;.\;.\;.\;(q)$$

en daarmede

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}l(1+psin^2x.cos^2x)\frac{x\,dx}{sin^2x.cos^2x}=\tfrac{1}{2}\pi^2(\sqrt{4+p}-2),\;.\;.\;.\;(1)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}l(1+psin^2x.cos^2x)\frac{x\,dx}{sin\,x\,.cos\,x}=\pi\left[l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\right]^2,\,.\,(5)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\; x\,d\,x \quad =\tfrac{1}{4}\pi^2\, l\left\{\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{4+p}+2\right)\right\}.\;.\;(6)$$

16. Volgens hetgeen reeds in § 9 werd opgemerkt, zal men nu kunnen overgaan tot de toepassing van eenige theoremata, die den factor x ditmaal in den noemer hebben. In het "Exposé de la théorie des propriétés des intégrales définies, Partie II, chapitre II, N°. 14 (zie Verhandelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde, Deel VIII), blz. 99 en 100," vindt men de afleiding van dit drietal theoremata, die hier goeden dienst zullen kunnen doen.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(\sin^2 x)\,d\,x = \int_0^{\infty} F(\sin^2 x)\frac{\sin x\,d\,x}{x} = \int_0^{\infty} F(\sin^2 x)\frac{\tan g\, x\,d\,x}{x} =$$

$$= \int_0^{\infty} F(\sin^2 x)\,\frac{\tan g\,\frac{1}{2}\,x\,d\,x}{x}.$$

Overal dus, waar bij de vroeger gevonden integralen de geintegreerde functie eene evene functie van $\sin x$ was, kan men deze drie theoremata met goed gevolg gebruiken; bij het laatste neme men ter vereenvoudiging telkens $x = 2\,y$.

Op die wijze leveren de integralen van § 1

$$\frac{\pi}{\sqrt{4+p}} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\,\frac{d\,x}{x}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\,\frac{d\,x}{x\cos x}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+p\sin^2 2\,x.\cos^2 2\,x}\,\frac{d\,x}{x\cos x}; \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

$$0 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x.\cos 2\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\,\frac{d\,x}{x}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x \,.\, \cos 2x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x\cos x}, \dots\dots\dots (5)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x \,.\, \cos 4x}{1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x}\,\frac{dx}{x\cos x}; \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{4+p}}=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x}, \dots\dots (7)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x\cos x}, \dots\dots\dots (8)$$

$$=4\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos x}{1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x}\,\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (9)$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x \,.\, \cos x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (10)$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (11)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos^2 2x \,.\, \sin x}{1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x}\,\frac{dx}{x\cos x}; \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\pi}{2p}\left(1-\frac{2}{\sqrt{4+p}}\right)\quad\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^2 x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x}, \dots (13)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (14)$$

$$=4\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^2 2x \,.\, \cos x}{1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x}\,\frac{dx}{x}; \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\pi}{2p}\left(\frac{2+p}{\sqrt{4+p}}-1\right)=\int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x}, \dots (16)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x\cos x}, \dots\dots\dots (17)$$

$$=2\int_0^\infty \frac{\sin^4 2x.\sin^2 x}{1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x}\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (18)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x.\cos^4 x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (19)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x.\cos^3 x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (20)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos^4 2x.\sin x}{1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x}\frac{dx}{x\cos x}; \dots\dots (21)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x.\cos^2 x.\cos 2x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (22)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x.\cos x.\cos 2x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (23)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x.\cos 4x.\cos^2 2x.\cos x}{1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x}\frac{dx}{x}; \dots\dots (24)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\sin 4x.\sin 2x.\sin x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (25)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 4x.\sin^3 x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x}, \dots\dots\dots (26)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 8x.\cos 2x.\sin^2 x}{1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x}\frac{dx}{x}; \dots\dots\dots (27)$$

terwijl de integralen (5), (11), (12) en (13) van diezelfde paragraaf, die behalve eene evene functie van $\sin x$, onder het inte-

graalteeken nog den factor $\sin x . \cos x$ bezitten, tot geene uitkomst kunnen voeren. De som der integralen (4) en (10) geeft nog

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{1 + p\sin^2 x . \cos^2 x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{\sqrt{4+p}} \dots \dots (28)$$

Gaan wij over tot de integralen van § 2, dan komt er

$$\frac{\pi}{2\sqrt{4+p}^3} = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x . \cos^2 x}{(1 + p\sin^2 x . \cos^2 x)^2} \frac{dx}{x}, \dots (29)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^3 x . \cos x}{(1 + p\sin^2 x . \cos^2 x)^2} \frac{dx}{x}, \dots \dots (30)$$

$$= 4\int_0^\infty \frac{\cos^3 x . \cos 2x . \cos x}{(1 + p\sin^2 2x . \cos^2 2x)^2} \frac{dx}{x}; \dots \dots (31)$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{4+p}^3} = \int_0^\infty \frac{\sin^5 x . \cos^2 x}{(1 + p\sin^2 x . \cos^2 x)^2} \frac{dx}{x}, \dots (32)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^5 x . \cos x}{(1 + p\sin^2 x . \cos^2 x)^2} \frac{dx}{x}, \dots \dots (33)$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{\sin^3 2x . \cos^3 2x . \sin^2 x}{(1 + p\sin^2 2x . \cos^2 2x)^2} \frac{dx}{x}, \dots \dots (34)$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin^2 4x . \sin 2x . \sin^2 x}{(1 + p\sin^2 2x . \cos^2 2x)^2} \frac{dx}{x}, \dots \dots (35)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^3 x . \cos^4 x}{(1 + p\sin^2 x . \cos^2 x)^2} \frac{dx}{x}, \dots \dots (36)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^3 x . \cos^3 x}{(1 + p\sin^2 x . \cos^2 x)^2} \frac{dx}{x}, \dots \dots (37)$$

$$= 4\int_0^\infty \frac{\sin^3 x . \cos^4 2x . \cos x}{(1 + p\sin^2 2x . \cos^2 2x)^2} \frac{dx}{x}; \dots \dots (38)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^2 x \,.\, \cos 2x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (39)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (40)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^2 2x \,.\, \cos 4x \,.\, \cos x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (41)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 4x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (42)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 4x \,.\, \sin^2 x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (43)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 8x \,.\, \sin 4x \,.\, \sin x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x}; \ldots \ldots \quad (44)$$

$$\frac{\pi}{2p}\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{p\sqrt{4+p}}-\frac{1}{\sqrt{4+p}^{\,3}}\right)=\int_0^\infty \frac{\sin^5 x \,.\, \cos^4 x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \quad (45)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^5 x \,.\, \cos^3 x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (46)$$

$$=2\int_0^\infty \frac{\sin^3 2x \,.\, \cos^2 2x \,.\, \sin^2 x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}; \ldots \ldots \quad (47)$$

$$\frac{\pi}{2p}\left(-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\sqrt{4+p}}+\frac{2+p}{2\sqrt{4+p}^{\,3}}\right)=\int_0^\infty \frac{\sin^7 x \,.\, \cos^2 x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \quad (48)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^7 x \,.\, \cos x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (49)$$

$$=2\int_0^\infty \frac{\sin^5 2x \,.\, \cos^2 2x \,.\, \sin^2 x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}, \ldots \ldots \quad (50)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^6 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^5 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

$$=4\int_0^\infty \frac{\sin^3 x.\cos^6 2x.\cos x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}; \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\sin^5 x \,.\, \cos^4 x \,.\, \cos 2x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^5 x \,.\, \cos^3 x \,.\, \cos 2x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^4 2x \,.\, \cos x}{(1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}; \quad \ldots\ldots\ldots (56)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^2 x \,.\, \sin 4x \,.\, \sin^2 x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots (57)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, \sin 4x \,.\, \sin 2x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 8x \,.\, \sin 4x \,.\, \sin^3 x \,.\, \cos^2 2x \,.\, \cos x}{(1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}; \quad .\ (59)$$

waarvan de integralen (36) en (39) te zamen leveren

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \,.\, \cos^2 x \,.\, \sin 3x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{\sqrt{4+p}^{\,3}}. \quad \ldots (60)$$

De integralen van § 3 leveren verder nog

$$\frac{8+p}{2\sqrt{4+p}^{\,3}}\,\pi=\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad .\,.\ (61)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x}, \quad \ldots\ldots\ldots (62)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}; \quad \ldots\ldots (63)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\sin x.\cos 2x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x.\cos 2x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x}, \quad \ldots\ldots (65)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos 4x.\sin x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x}; \quad \ldots\ldots\ldots (66)$$

$$\frac{8+p}{4\sqrt{4+p}^{\,3}}\,\pi=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots (67)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x}, \quad \ldots\ldots\ldots (68)$$

$$=4\int_0^\infty \frac{\sin^3 x.\cos x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x.\cos x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots (70)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots\ldots\ldots (71)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos^2 2x.\sin x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x}; \quad \ldots\ldots\ldots (72)$$

$$\frac{6+p}{4\sqrt{4+p}^{\,3}}\,\pi=\int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}, \quad \ldots (73)$$

$$=\int_0^\infty \frac{sin^5 x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x},\quad\ldots\ldots\ldots\ (74)$$

$$=16\int_0^\infty \frac{sin^5 x\,.\,cos^3 x}{(1+p\,sin^2 2x\,.\,cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x},\quad\ldots\ldots\ldots\ (75)$$

$$=\int_0^\infty \frac{sin\,x\,.\,cos^4 x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x},\quad\ldots\ldots\ldots\ (76)$$

$$=\int_0^\infty \frac{sin\,x\,.\,cos^3 x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x},\quad\ldots\ldots\ldots\ (77)$$

$$=\int_0^\infty \frac{cos^4 2x\,.\,sin\,x}{(1+p\,sin^2 2x\,.\,cos^2 2x)^2}\,\frac{dx}{x\cos x};\quad\ldots\ldots\ldots\ (78)$$

terwijl de som der integralen (67) en (70) nog geeft

$$\int_0^\infty \frac{sin\,3x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^2}\,\frac{dx}{x}=\frac{8+p}{2\sqrt{4+p}^3}.\quad\ldots\ (79)$$

Vervolgens heeft men naar de uitkomsten van § 4, meer algemeen dan hierboven werd afgeleid,

$$\frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\binom{a}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k=\int_0^\infty \frac{sin\,x}{(1+p\,sin^2 x.cos^2 x)^{a+1}}\,\frac{dx}{x},\ .\ (80)$$

$$=\int_0^\infty \frac{sin\,x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a+1}}\,\frac{dx}{x\cos x},\quad\ldots\ldots\ (81)$$

$$=\int_0^\infty \frac{sin\,x}{(1+p\,sin^2 2x\,.\,cos^2 2x)^{a+1}}\,\frac{dx}{x\cos x};\quad\ldots\ (82)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{cos\,2x\,.\,sin\,x}{(1+p\,sin^2 x\,.\,cos^2 x)^{a}}\,\frac{dx}{x},\quad\ldots\ldots\ldots\ (83)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos 2x \,.\, \sin x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^a}\frac{dx}{x\cos x}, \quad\ldots\ldots\ldots (84)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos 4x \,.\, \sin x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^a}\frac{dx}{x}; \quad\ldots\ldots (85)$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{4+p}}\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\binom{a}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x}, \quad (86)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x\cos x}, \quad\ldots\ldots (87)$$

$$=4\int_0^\infty \frac{\sin^3 x\,.\,\cos x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^{a+1}}\frac{dx}{x}, \quad\ldots\ldots (88)$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x\,.\,\cos x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x}, \quad\ldots\ldots\ldots (89)$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x}, \quad\ldots\ldots\ldots (90)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos^2 2x\,.\,\sin x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^{a+1}}\frac{dx}{x\cos x}; \quad\ldots\ldots (91)$$

$$\frac{\pi}{2a\sqrt{4+p}}\sum_{k=0}^{k=a-1}(-1)^{k+1}\binom{a-1}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}(8k-p)\frac{p^{k-1}}{(p+4)^{k+1}}=$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x\,.\,\cos^2 x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x}, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (92)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x\,.\,\cos x}{(1+p\sin^2 x\,.\,\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x}, \quad\ldots\ldots\ldots (93)$$

$$=4\int_0^\infty \frac{\cos^2 2x\,.\,\sin^3 x\,.\,\cos x}{(1+p\sin^2 2x\,.\,\cos^2 2x)^{a+1}}\frac{dx}{x}; \quad\ldots\ldots (94)$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\left[(-1)^a \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^a + \sum_{k=0}^{k=a-1}(-1)^k \binom{a-1}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k \left(\frac{a}{a-k} + \frac{8k-p}{2ap(4+p)}\right)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^{a+1}} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (95)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^5 x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^{a+1}} \frac{dx}{x\cos x}, \quad \ldots \ldots \quad (96)$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{\sin^3 2x \,.\, \sin^2 x}{(1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)^{a+1}} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \quad (97)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin x \,.\, \cos^4 x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^{a+1}} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (98)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin x \,.\, \cos^3 x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^{a+1}} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (99)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos^4 2x \,.\, \sin x}{(1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)^{a+1}} \frac{dx}{x\cos x}; \quad \ldots \ldots \quad (100)$$

$$0 = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos^3 x \,.\, \cos 2x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \quad (101)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,.\, \cos x \,.\, \cos 2x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (102)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin 8x \,.\, \cos 2x \,.\, \sin^2 x}{(1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)^a} \frac{dx}{x}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (103)$$

$$0 = \int_0^\infty \frac{\sin 4x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \quad (104)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin 4x \,.\, \sin^2 x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} \frac{dx}{x}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (105)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin 8x \,.\, \cos 2x \,.\, \sin^3 x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^a}\frac{dx}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (106)$$

Nog geeft de som van (83) en (89),

$$\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\binom{a}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k . (107)$$

Door middel der integralen van § 7 vindt men verder

$$\frac{1}{3}\pi\left\{32-12\sqrt{4+p}-\sqrt{4+p}^{\,3}\right\}=\int_0^\infty \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x\sin x.\cos^2 x}, . (108)$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos^3 x}, \ldots\ldots (109)$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x}\frac{dx}{x\cos^2 2x.\sin x.\cos^3 x}; . (110)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos^2 x}, \ldots (111)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos^3 x}, \ldots\ldots (112)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos 4x}{1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x}\frac{dx}{x\cos^2 2x.\sin x.\cos^3 x}; . (113)$$

$$\frac{1}{6}\pi\left\{32-12\sqrt{4+p}-\sqrt{4+p}^{\,3}\right\}=\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\frac{dx}{x\cos^2 x}, . (114)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\frac{dx}{x\cos^3 x}, \ldots\ldots\ldots (115)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x}\frac{dx}{x\cos^2 2x \,.\, \cos x}, \ldots (116)$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x\sin x}, \;\ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\,\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos x}, \;\ldots\ldots \quad (118)$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x}\,\frac{dx}{\sin x \,.\, \cos^3 x}; \;.\; (119)$$

terwijl uit (111) en (117) nog volgt

$$\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\,\frac{dx}{x\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{1}{3}\pi\left\{32-12\sqrt{4+p}-\sqrt{4+p}^{\,3}\right\}. \;.(120)$$

Eindelijk kan men de theoremata van deze paragraaf nog toepassen op de integralen van § 8.

$$a\pi\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\binom{a}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\sum_{l=0}^{l=k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}\frac{2^{2l+1}}{2l-1}\left(\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a}\,\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos^2 x}, \;\ldots\ldots \quad (121)$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a}\,\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos^3 x}, \;\ldots \quad (122)$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{(1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)^a}\,\frac{dx}{x\cos^2 2x \,.\, \cos^3 x \,.\, \sin x}; \;.\,(123)$$

$$0=\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a}\,\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos^2 x}, \;.\,. \quad (124)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{(1+p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a}\,\frac{dx}{x\sin x \,.\, \cos^3 x}, \;\ldots \quad (125)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos 4x}{(1+p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)^a}\,\frac{dx}{x\cos^2 2x \,.\, \cos^3 x \,.\, \sin x}; \;.\;. \quad (126)$$

$$a\pi\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\binom{a}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\sum_{l=0}^{l=k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left\{\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right\}=$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sin x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}\frac{dx}{x\cos^2 x}, \ldots\ldots\ldots (127)$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sin x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}\frac{dx}{x\cos^3 x}, \ldots\ldots (128)$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sin x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^a}\frac{dx}{x\cos^2 2x.\cos x}, .\, (129)$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}\frac{dx}{x\sin x}, \ldots\ldots (130)$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}\frac{dx}{x\sin x.\cos x}, \ldots (131)$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty\frac{1}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^a}\frac{dx}{x\sin x.\cos^3 x}; \,.\, (132)$$

$$(-1)^a(a+1)\pi\frac{1^{a+1/2}}{2^{a+1/2}}\sum_{l=0}^{l=a}(-1)^l\binom{a}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left\{\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right\}-$$

$$-\pi\sum_{l=0}^{k=a}(-1)^k\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\binom{a}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{p+4}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k+\right.$$

$$\left.+\frac{(a+1)}{a-k+1}\sum_{l=0}^{l=k}(-1)^l\binom{k}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left(\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right)\right]=$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x\cos^2 x}, \ldots\ldots (133)$$

$$=\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x\cos^3 x}, \ldots (134)$$

$$=4\int_0^\infty\frac{\sin^3 x.\cos x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^{a+1}}\frac{dx}{x\cos^2 2x}, .\, (135)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x\sin x}, \quad \ldots \quad (136)$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\frac{dx}{x\sin x}, \quad \ldots \quad (137)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\cos^2 2x}{(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)^{a+1}}\frac{dx}{x\sin x.\cos^3 x}. \quad (138)$$

17. Men kan ook de theoremata, aan het begin der vorige paragraaf vermeld, gebruiken bij de integralen, die in § 6 werden afgeleid: die leveren dan de volgende.

$$2\pi(\sqrt{4+p}-2)=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{dx}{x\sin x.\cos^2 x}, \quad (139)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{dx}{x\sin x.\cos^3 x}, \quad \ldots \quad (140)$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^\infty l(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)\frac{dx}{x\cos^2 2x.\cos^3 x.\sin x}; \quad (141)$$

$$0=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{\cos 2x\,dx}{x\sin x.\cos^2 x}, \quad \ldots \quad (142)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{\cos 2x\,dx}{x\sin x.\cos^3 x}, \quad \ldots \quad (143)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 2x.\cos^2 2x)\frac{\cos 4x\,dx}{x\cos^2 2x.\cos^3 x.\sin x}; \quad \ldots \quad (144)$$

$$\pi(\sqrt{4+p}-2)=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{\sin x\,dx}{x\cos^2 x}, \quad (145)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{\sin x\,dx}{x\cos^3 x}, \quad \ldots \quad (146)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 2x\,.\cos^2 2x)\,\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 2x\,.\cos x},\;.\;.\;(147)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)\,\frac{dx}{x\sin x},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(148)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)\,\frac{dx}{x\sin x\,.\cos x},\;.\;.\;.\;(149)$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^\infty l(1+p\sin^2 2x\,.\cos^2 2x)\,\frac{dx}{\sin x\,.\cos^3 x};\,.\,(150)$$

$$\pi\, l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+2\}=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)\,\frac{\sin x\,dx}{x},\;.\;.\;(151)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)\,\frac{\sin x\,dx}{x\cos x},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(152)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 2x\,.\cos^2 2x)\,\frac{\sin x\,dx}{x\cos x};\;.\;.\;.\;(153)$$

$$\pi\{\sqrt{4+p}-2+l4-l(\sqrt{4+p}+2)\}=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\,\frac{\sin^3 x\,dx}{x\cos^2 x},\,.\,(154)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)\,\frac{\sin^3 x\,dx}{x\cos^3 x},\;.\;.\;.\;.\;.\;(155)$$

$$=4\int_0^\infty l(1+p\sin^2 2x\,.\cos^2 2x)\,\frac{\sin^3 x.\cos x\,dx}{x\cos^2 2x},\;.\;(156)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)\,\frac{\cos^2 x\,dx}{x\sin x},\;.\;.\;.\;.\;.\;(157)$$

$$=\int_0^\infty l(1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x)\,\frac{\cos x\,dx}{x\sin x},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(158)$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty l(1 + p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)\,\frac{\cos^2 2x\,dx}{\sin x \,.\, \cos^3 x}; \;. (159)$$

$$0 = \int_0^\infty l(1 + p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)\,\frac{\sin x \,.\, \cos 2x\,dx}{x}, \;. (160)$$

$$= \int_0^\infty l(1 + p\sin^2 x \,.\, \cos^2 x)\,\frac{\sin x \,.\, \cos 2x\,dx}{x\cos x}, \;. \;. (161)$$

$$= \int_0^\infty l(1 + p\sin^2 2x \,.\, \cos^2 2x)\,\frac{\cos 4x \,.\, \sin x\,dx}{x\cos x} \;.. (162)$$

De som van (142) en (148) geeft ons

$$\int_0^\infty l(1 + p\sin^2 x.\cos^2 x)\,\frac{\sin 3x\,dx}{x\sin^2 x.\cos^2 x} = 2\pi(\sqrt{4+p} - 2) \;.. (163)$$

IETS OVER DOBBELEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Bij het dobbelen, dat is het werpen met een of meer dobbelsteenen, komt het voornamelijk aan op het aantal oogen, dat men werpt: dat is op de som der getallen 1 tot 6, die zich telkens op de bovenvlakken der dobbelsteenen bevinden. Zulk een aantal oogen kan veelal op onderscheidene wijzen bereikt worden. De waarschijnlijkheid voor het werpen van een bepaald aantal oogen g is een vraagstuk uit de waarschijnlijkheid a priori, omdat langs zuiver wiskundigen weg kan bepaald worden, zoowel het geheel aantal mogelijke gevallen N, als ook het aantal gunstige gevallen n_g, dat is, waarbij de som der oogen juist het bepaalde getal bedraagt.

2. Heeft men slechts een dobbelsteen, dan kan men natuurlijk de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6 slechts eenmaal werpen. Dus is hier overal $n_g = 1$, terwijl $N = \Sigma n_g = 6$ is. Noemt men w_g de waarschijnlijkheid om de g oogen te werpen, zoo is hier, voor $g = 1$ tot $= 6$,

$$w_g = 1 : 6.$$

3. Bij twee dobbelsteenen wordt de toestand anders. Men heeft hier de volgende $6 \times 6 = 36 = N$ mogelijke gevallen, waarbij de eerste kolom voor den eersten dobbelsteen, de tweede kolom voor den tweeden geldt.

1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5	5 + 1 = 6	6 + 1 = 7
1 + 2 = 3	**2 + 2** = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	5 + 2 = 7	6 + 2 = 8
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	**3 + 3** = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8	6 + 3 = 9
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	**4 + 4** = 8	5 + 4 = 9	6 + 4 = 10
1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	**5 + 5** = 10	6 + 5 = 11
1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10	5 + 6 = 11	**6 + 6** = 12

Hieruit blijkt dat een aantal oogen

$g = 2$	kan	voorkomen	1	maal
3	"	"	2	"
4	"	"	3	"
5	"	"	4	"
6	"	"	5	"
7	"	"	6	"
8	"	"	5	"
9	"	"	4	"
10	"	"	3	"
11	"	"	2	"
12	"	"	1	"
waarvan de som is			36	maal

Men ziet dat men niet minder dan 2, en niet meer dan 12 kan werpen; verder dat bij deze n_g de betrekking geldt

$$n_g = n_{12+2-g} = n_{14-g};$$

dat $n_7 = 6$ een maximum is; en dat dus de n_g voor $g = 2$ tot $g = 7$ klimmen, om daarna weder van $g = 8$ tot $g = 12$ met dezelfde cijfers af te dalen. Deze n_g zijn hier de opeenvolgende natuurlijke getallen.

Om de waarschijnlijkheid van iedere worp g te bepalen, moet men de overeenkomstige n_g door het geheele aantal $N = \Sigma n_g = 36$ deelen. Men vindt alzoo

$$w_2 = w_{12} = \frac{1}{36} = 0.02777, \quad w_5 = w_9 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0.11111$$

$$w_3 = w_{11} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.05555, \quad w_6 = w_8 = \frac{5}{36} = 0.13889$$

$$w_4 = w_{10} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0.08333, \quad w_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.66667$$

4. Wanneer men met drie dobbelsteenen werpt, zijn er $6^3 = 216$ onderscheidene gevallen mogelijk; maar de oogen, die men kan werpen, liggen slechts tusschen $3 \times 1 = 3$ en $3 \times 6 = 18$. Deze kunnen echter op verschillende wijzen voorkomen, zoo als blijkt uit het volgende tafeltje. Daarin geven de drie kolommen de oogen aan, die door den eersten, tweeden, derden dobbelsteen worden geworpen; de worpen, die tot eene zelfde som voeren, zijn hier voor het duidelijker overzicht bijeengevoegd.

111	**115**	**116**	126	136	146	156	**166**	**266**	**366**
112	124	125	135	145	**155**	165	256	356	456
121	**133**	134	**144**	154	164	246	265	365	465
211	142	143	153	163	236	**255**	346	**446**	546
113	**151**	152	162	**226**	245	264	**355**	**455**	**555**
122	214	**161**	216	235	254	**336**	364	**464**	564
131	**223**	215	**225**	**244**	263	345	436	536	**636**
212	**232**	**224**	234	253	326	354	**445**	**545**	645
221	241	**233**	243	**262**	**335**	**363**	**454**	**554**	654
311	**313**	**242**	**252**	316	**344**	426	463	563	**663**
114	**322**	251	261	325	**353**	435	526	**626**	**466**
123	**331**	314	315	**334**	362	**444**	**535**	635	**556**
132	412	**323**	324	**343**	416	453	**544**	**644**	**565**
141	421	**332**	**333**	352	425	462	**553**	653	**646**
213	**511**	341	342	361	**434**	516	562	**662**	**655**
222		413	351	415	**443**	**525**	**616**		**664**
231		**422**	**414**	**424**	452	534	625		**566**
312		431	423	**433**	461	543	634		**656**
321		512	432	**442**	**515**	**552**	643		**665**
411		521	**441**	451	524	561	652		**666**
		611	513	514	**533**	615	**661**		
			522	523	542	624			
			531	532	**551**	**633**			
			612	541	614	642			
			621	613	623	651			
				622	632				
				631	641				

Die oogen, welke hier, of dubbelen, of ook drie dubbelen bevatten, zijn door dikker cijfers aangegeven.

Uit voorgaand tafeltje blijkt nu, dat de som der oogen, dat is onze g,

$g =$	3	kan	voorkomen	1	maal
	4	〃	〃	3	〃
	5	〃	〃	6	〃
	6	〃	〃	10	〃
	7	〃	〃	15	〃
	8	〃	〃	21	〃
	9	〃	〃	25	〃
	10	〃	〃	27	〃
	11	〃	〃	27	〃
	12	〃	〃	25	〃
	13	〃	〃	21	〃
	14	〃	〃	15	〃
	15	〃	〃	10	〃
	16	〃	〃	6	〃
	17	〃	〃	3	〃
	18	〃	〃	1	〃

waarvan de som is 216 maal.

Uit deze opgave blijkt, dat er tusschen deze getallen n_g weder eene eenvoudige betrekking bestaat, namelijk

$$n_g = n_{18+3-g} = n_{21-g};$$

dat het maximum zoowel bij $g = 10$ als bij $g = 11$ intreedt; dat verder de n_g voor $g = 3$ tot $g = 10$ klimmen, en verder voor $g = 11$ tot $g = 18$ wederom langs denzelfden weg afdalen. Overigens is voorloopig de wet van die getallen n_g niet duidelijk.

Wil men de waarschijnlijkheid van iederen worp nagaan, dan moet men deze getallen n_g deelen door $N = \Sigma n_g = 216 = 6^3$; en vindt dan langs dezen weg

$$w_3 = w_{18} = \frac{1}{216} = 0.0046296,$$

$$w_4 = w_{17} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72} = 0.0138888,$$

$$w_5 = w_{16} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = 0.0277777,$$

$$w_6 = w_{15} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} = 0.0462964,$$

$$w_7 = w_{14} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} = 0.0694444,$$

$$w_8 = w_{13} = \frac{21}{216} = \frac{7}{72} = 0.0972222,$$

$$w_9 = w_{12} = \frac{25}{216} = 0.1157407,$$

$$w_{10} = w_{11} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

5. De tot nu toe gevonden waarden van n_g, en de betrekkingen, die voor een, twee en drie dobbelsteenen daartusschen bestaan, doen onderstellen, dat dergelijke betrekkingen ook voor een grooter aantal dobbelsteenen voorkomen. Trachten wij dus de wet op te sporen voor een willekeurig aantal k dobbelsteenen; dat is te bepalen het aantal gunstige gevallen $n_{(g,k)}$, dat er met die k dobbelsteenen het aantal oogen g geworpen worde. Dan is natuurlijk het geheel aantal mogelijke gevallen 6^k; en derhalve de waarschijnlijkheid van den worp g

$$w_g = n_{(g,\,k)} : 6^k.$$

Volgens de beginselen der waarschijnlijkheidsrekening, en wel naar het theorema van Bernoulli, zullen in de ontwikkeling

$$K = (w^1{}_a + w^2{}_b + w^3{}_c + w^4{}_d + w^5{}_e + w^6{}_z)^k$$

de gezochte gunstige gevallen, waarin g oogen worden geworpen, overeenkomen met de termen $w_a{}^\alpha\, w_b{}^\beta\, w_c{}^\gamma\, w_d{}^\delta\, w_e{}^\varepsilon\, w_z{}^\zeta$, waarbij $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = g$ is; de som der overeenkomstige polynomiaalcoëfficiënten geven dan het aantal malen aan, dat de gewenschte verbinding voorkomt; deze getallen zullen niet veranderen, als men alle w gelijk neemt. Alsdan heeft men

$$K = w^k(1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5)^k = w^k\left(\frac{1-w^6}{1-w}\right)^k =$$
$$= w^k(1 - w^6)^k(1 - w)^{-k}.$$

Nu is vooreerst

$$(1-w^6)^k = 1 - \frac{k}{1}w^6 + \frac{k}{1}\frac{k-1}{2}w^{12} - \frac{k}{1}\frac{k-1}{2}\frac{k-2}{3}w^{18} + \ldots$$

$$(1-w)^{-k} = 1 + \frac{k}{1}w + \frac{k}{1}\frac{k+1}{2}w^2 + \frac{k}{1}\frac{k+1}{2}\frac{k+2}{3}w^3 + \ldots$$

Ten einde derhalve in de ontwikkeling K de termen $w^g = w^k w^{g-k}$ te verkrijgen, moet men in het produkt van beide voorgaande reeksen de termen w^{g-k} gaan opzoeken; en vindt men alzoo achtereenvolgens, met invoering der notatie voor analytische faculteiten

$$a^{b/c} = a(a+c)(a+2c)\ldots.(a+(b-1)c),$$

waardoor de binomiaalcoëfficiënten worden $\binom{k}{a} = \frac{k^{a/-1}}{1^{a/1}}$,

$$1 \qquad\qquad \times \frac{k^{g-k/1}}{1^{g-k/1}} w^{g-k},$$

$$-\frac{k}{1}w^6 \qquad \times \frac{k^{g-k-6/1}}{1^{g-k-6/1}} w^{g-k-6},$$

$$+\frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2}w^{12} \qquad \times \frac{k^{g-k-12/1}}{1^{g-k-12/1}} w^{g-k-12},$$

$$-\frac{k}{1}\frac{k-1}{2}\frac{k-2}{3}w^{18} \times \frac{k^{g-k-18/1}}{1^{g-k-18/1}} w^{g-k-18}.$$

. . . .

De gezochte som is dus

$$n_{(g\,.\,k)} = \frac{k^{g-k/1}}{1^{g-k/1}} - \frac{k}{1}\frac{k^{g-k-6/1}}{1^{g-k-6/1}} + \frac{k\,.\,k-1}{1\,.\,2}\frac{k^{g-k-12/1}}{1^{g-k-12/1}} - \ldots, \quad (1)$$

welke reeks van zelf moet eindigen, zoodra er eene faculteit nul of negatief zoude worden. Men kan aan alle breuken van facul-

teiten nog denzelfden noemer geven, door middel van de volgende herleiding, als men eerst teller en noemer met $1^{k-1/1}$ vermenigvuldigt, en dan door $1^{g-k-6a/1}$ weder deelt; alzoo toch is

$$\frac{k^{g-k-6a/1}}{1^{g-k-6a/1}}=\frac{1^{g-1-6a/1}}{1^{k-1/1}\,1^{g-k-6a/1}}=\frac{(g-k-6a+1)^{k-1/1}}{1^{k-1/1}}=$$

$$=\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}=\binom{g-6a-1}{k-1}.$$

Hierdoor wordt dan

$$n_{(g\,.\,k)}=\binom{g-1}{k-1}-\binom{k}{1}\binom{g-7}{k-1}+\binom{k}{2}\binom{g-13}{k-1}-\ldots \quad (2)$$

voor de gezochte som gevonden. De laatste term zoude luiden $(-1)^k\binom{k}{k}\binom{g-6k-1}{k-1}$; maar daar altijd $g \leqq 6k$ moet zijn, wordt $g-6k-1<0$, en kan die term, naar het voorgaande, niet opgenomen worden; de reeks besluit dus met den onmiddelijk voorafgaanden term, $(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\binom{g-6k+5}{k-1}$, en dus wordt

$$n_{(g\,.\,k)}=\binom{g-1}{k-1}-\binom{k}{1}\binom{g-7}{k-1}+\binom{k}{2}\binom{g-13}{k-1}\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{1}\binom{g-6k+5}{k-1}; \quad (3)$$

waarbij, voor iedere g, die termen moeten wegvallen, waarin de aanwijzers der machten bij de binomiaal-coëfficiënten nul of negatief zouden worden.

6. Om te bewijzen dat $n_{(g\,.\,k)}=n_{(6k+k-g\,.\,k)}=n_{(7k-g\,.\,k)}$ is, wordt de eerste term der ontwikkeling dezer laatste naar (1)

$$\frac{k^{7k-g-k/1}}{1^{7k-g-k/1}}=\frac{k^{6k-g/1}}{1^{6k-g/1}}=\frac{1^{7k-g-1/1}}{1^{k-1/1}\,1^{6k-g/1}}=\frac{(6k-g+1)^{k-1/1}}{1^{k-1/1}}=$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{(g-6k-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}=(-1)^{k-1}\binom{g-6k-1}{k-1};$$

en de $(k - a)$ de term dier ontwikkeling, afgezien van den factor $\binom{k}{k-a} = \binom{k}{a}$,

$$(-1)^{k-a} \frac{k^{6k-g-6(k-a)/1}}{1^{6k-g-6(k-a)/1}} = (-1)^{k-a} \frac{k^{6a-g/1}}{1^{6a-g/1}} = (-1)^{k-a} \frac{1^{6a-g+k-1/1}}{1^{k-1/1}\,1^{6a-g/1}} =$$

$$= (-1)^{k-a} \frac{(6a-g+1)^{k-1|1}}{1^{k-1/1}} = (-1)^{k-a} (-1)^{k-1} \frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}$$

$$= (-1)^{a-1} \binom{g-6a-1}{k-1}.$$

Alzoo verkrijgt men de reeks (2) in omgekeerde volgorde met omgekeerde teekens; maar daar deze reeks, indien men ook den laatsten term daarbij behoudt, gelijk aan nul zoude zijn, moet de laatste term, met tegengesteld teeken, gelijk aan de som der voorgaande zijn. Deze som in de tweede reeks is dus $(-1)^a \binom{g-6a-1}{k-1}$ voor $a = 0$, dat is $+\binom{g-1}{k-1}$, juist de eerste term der reeks (2).

Op dezelfde wijze bewijst men dit voor de volgende termen; en dus is de eigenschap $n_{(g,k)} = n_{(7k-g,k)}$ bewezen, in de onderstelling, dat de volledige reeks (2) werkelijk gelijk is aan nul.

Voor $k = 2$ is $g \leqq 12$, dus

$$n_{(g.2)} = \binom{g-1}{1} - \binom{2}{1}\binom{g-7}{1} + \binom{g-13}{1} = 0,$$

terwijl voor $2 \leqq g \leqq 7$ geldt $\quad = g - 1,$

$$7 \leqq g \leqq 12 \qquad = (g-1) + 2(g-7) = 13 - g.$$

Voor $k = 3$ is $g \leqq 18$, dus

$$n_{(g.3)} = \binom{g-1}{2} - \binom{3}{1}\binom{g-7}{2} + \binom{3}{1}\binom{g-13}{2} - \binom{g-19}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[g(g-1)-3(g-7)(g-8)+3(g-13)(g-14)-(g-19)(g-20)] = 0,$$

terwijl voor $3 \leqq g \leqq 8$ geldt $= \frac{1}{2}\, g\,(g-1)$,

$$8 \leqq g \leqq 13 \qquad = \tfrac{1}{2}\,.\,2[-g^2+21\,g-83],$$

$$13 \leqq g \leqq 18 \qquad = \tfrac{1}{2}[g^2-39g+380] = \tfrac{1}{2}(g-19)(g-20).$$

Voor deze bijzondere waarden $k=2$, $=3$, is de reeks dus werkelijk nul; wat het algemeen geval betreft, kan het nul worden der volledige reeks voor $n_{(g.k)}$, met den laatsten term, alleen mogelijk zijn, wanneer alle machten l van $g-1=q$ coëfficiënten verkrijgen, die ieder op zich zelve nul worden. Die reeks wordt nu, na invoering van q, en na vermenigvuldiging met $1^{k-1/1}$, als men voor de grootere algemeenheid 6 door a vervangt,

$$q^{k-1/-1} - \binom{k}{1}(q-a)^{k-1/-1} + \binom{k}{2}(q-2a)^{k-1/-1} - \dots$$

$$+ (-1)^k \binom{k}{k}(q-ka)^{k-1/-1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Nu weet men dat

$$q^{2/-1} = q^2 - q \qquad , \quad q^{4/-1} = q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q \qquad ,$$

$$q^{3/-1} = q^3 - 3q^2 + 2q\,, \quad q^{5/-1} = q^5 - 10q^5 + 35q^3 - 50q^2 + 24q,$$

en dus in het algemeen

$$q^{k-1/-1} = q^{k-1} - A_{k-2}q^{k-2} + A_{k-3}q^{k-3} + \dots + (-1)^{k-l-1}A_l q^l + \dots + A_0,$$

waarin de A_m de faculteitscoëfficiënten voor de $(k-1)$ de macht zijn.

De termen van de l de macht, die er uit deze ontwikkeling der faculteiten in de vorige reeks (4) ontstaan, vindt men dus.

q^{k-1} levert $+(-1)^{k-l-1}A_l q^l$;

$-\binom{k}{1}(q-a)^{k-1/-1}$ levert

$$-\binom{k}{1}\Big[\binom{k-1}{k-l-1}a^{k-l-1} - A_{k-2}\binom{k-2}{k-l-2}a^{k-l-2} +$$

$$+ A_{k-3}\binom{k-3}{k-l-3}a^{k-l-3} + \ldots\ldots + (-1)^{k-l-1}A^l\Big]q^l;$$

$+\binom{k}{2}(q-2a)^{k-1/-1}$ levert

$$+\binom{k}{2}\Big[\binom{k-1}{k-l-1}(2a)^{k-l-1} - A_{k-2}\binom{k-1}{k-l-2}(2a)^{k-l-2} +$$

$$+ A_{k-3}\binom{k-3}{k-l-3}(2a)^{k-l-3} + \ldots + (-1)^{k-l-1}A_l\Big]q^l;$$

$(-1)^k\binom{k}{k}(q-ka)^{k-1/1}$ levert

$$(-1)^k\binom{k}{k}\Big[\binom{k-1}{k-l-1}(ka)^{k-l-1} - A_{k-2}\binom{k-2}{k-l-2}(ka)^{k-l-2} +$$

$$+ A_{k-3}\binom{k-3}{k-l-3}(ka)^{k-l-3} + \ldots\ldots + (-1)^{k-l-1}A_l\Big]q^l.$$

Wanneer men nu bij kolommen optelt, geeft dit voor de coëfficiënt van A_{k-s}

$$(-1)^{s-1}A_{k-s}\binom{k-s}{k-l-s}a^{k-l-s}$$

$$\Big[-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}2^{k-l-s}-\binom{k}{3}3^{k-t-s}+\ldots+(1-)^k\binom{k}{k}k^{k-l-s}\Big]=$$

$$=(-1)^{s-1}A_{k-s}\binom{k-s}{k-l-s}a^{k-l-s}\sum_{r=1}^{r=k}(-1)^r\binom{k}{r}r^{k-l-s}.$$

Hier moet men naar s sommeren, $s = 1$ tot $s = k - l$; en dan daarbij nog den eenigen term uit de eerste regel optellen; dan is de geheele coëfficiënt van q^l

$$(-1)^{k-l-1} A_l + \sum_{s=1}^{s=k-l} (-1)^{s-1} A_{k-s} \binom{k-s}{k-l-s} a^{k-l-s} \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r \binom{k}{r} r^{k-l-s}.$$

Het is mij echter niet mogen gelukken, de reeks in dezen vorm te sommeeren, of aan te toonen, dat deze altijd gelijk aan nul moet zijn: alleen voor de coëfficiënt van A_l is dit duidelijk.

7. Voor het berekenen der getallen $n_{(g\,.\,k)}$ in een tabel kan men echter gemakkelijker wegen zoeken.

Vooreerst is naar de reeks (2), voor $g + 1$ in plaats van g,

$$n_{(g+1\,.\,k)} = \frac{g^{k-1/-1}}{1^{k-1/-1}} - \binom{k}{1} \frac{(g-6)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}} + \binom{k}{2} \frac{(g-12)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}} - \ldots (5)$$

Ten einde het verschil van (2) en (5) te kunnen nemen, bedenke men, dat

$$\frac{(g-6a)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}} = \frac{(g-6a)\,(g-6a-1)^{k-2/-1}}{1^{k-1/1}}$$

en

$$\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}} = \frac{(g-6a-1)^{k-2/-1}\,(g-6a-k+1)}{1^{k-1/1}};$$

zoodat het verschil van beide overeenkomstige breuken wordt

$$\frac{(g-6a-1)^{k-2/1}}{1^{k-1/1}}(k-1) = \frac{(g-6a-1)^{k-2/-1}}{1^{k-2/1}} = \binom{g-6a-1}{k-2}.$$

Derhalve is

$$n_{(g+1\,.\,k)} - n_{(g\,.\,k)} = \binom{g-1}{k-2} - \binom{k}{1}\binom{g-7}{k-2} + \binom{k}{2}\binom{g-13}{k-2} - \ldots (6)$$

Vervolgens is, wanneer men in de reeks (2) k door $k + 1$ vervangt,

$$n_{(g\,.\,k+1)}=\frac{g-1)^{k/-1}}{1^{k/1}}-\binom{k+1}{1}\frac{(g-7)^{k/-1}}{1^{k/1}}+\binom{k+1}{2}\frac{(g-13)^{k/-1}}{1^{k/1}}-\,..(7)$$

Opdat men hier tot het aftrekken van beide vergelijkingen (2) en (7) kunne overgaan, bedenke men dat

$$\binom{k+1}{a}\frac{(g-6a-1)^{k/-1}}{1^{k/1}}=\frac{(k+1)k^{a-1/-1}}{1^{a/1}}\frac{(g-6a-2)^{k-1/-1}(g-6a-k)}{1^{k/1}},$$

$$\binom{k}{a}\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}=\frac{(k-a+1)k^{a-1/-1}}{1^{a/1}}\frac{k.(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{k/1}}$$

is, en dus het verschil dezer overeenkomstige termen geeft

$$\frac{k^{a-1/-1}(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k/1}}[k+1)(g-6a-k)-(k-a+1)k]=$$

$$=\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k-a+1/1}}[k-1)(g-2k)-(5k+6)a]\,;$$

behalve bij den eersten term, waar men voor dat verschil vindt

$$\frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k/1}}[(g-k)-k]\,;$$

zoodat eindelijk

$$n_{(g.k+1)}-n_{(g.k)}=\frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k/1}}(g-2k)-\frac{(g-7)^{k-1/-1}}{1^{k/1}}[(k+1)(g-2k)-(5k+6)]+$$

$$+\frac{(g-13)^{k-1/-1}}{2\,.\,1^{k-1/1}}[(k+1)(g-2k)-2\,(5k+6)]-\;.\;.\;.\;(8)$$

Beide formulen (6) en (8), maar vooral de eerste, zijn zeer geschikt, om uit de reeds bekende $n_{(g\,.\,k)}$ de volgende af te leiden.

Langs elk van deze wegen vindt men dan het volgende tafeltje:

TAFELTJE VOOR $n(g.k)$.

g.	$k=1$.	$=2$.	$=3$.	$=4$.	$=5$.	$=6$.	$=7$.	$=8$.
1	1							
2	1	1						
3	1	2	1					
4	1	3	3	1				
5	1	4	6	4	1			
6	1	5	10	10	5	1		
7		6	15	20	15	6	1	
8		5	21	35	35	21	7	1
9		4	25	56	70	56	28	8
10		3	27	80	126	126	84	36
11		2	27	104	205	252	210	120
12		1	25	125	305	456	462	330
13			21	140	420	756	917	792
14			15	146	540	1161	1667	1708
15			10	140	651	1666	2807	3368
16			6	125	735	2247	4417	6147
17			3	104	780	2856	6538	10480
18			1	80	780	3431	9142	16808
19				56	735	3906	12117	25488
20				35	651	4221	15267	36688
21				20	540	4332	18327	50288
22				10	420	4221	20993	65808
23				4	305	3906	22967	82384
24				1	205	3431	24017	98813
25					126	2856	24017	113688
26					70	2247	22967	125588
27					35	1666	20993	133288
28					15	1161	18327	135954
29					5	756	15267	133288
30					1	456	12117	125588
31						252	9142	113688
32						126	6538	98813
33						56	4417	82384
34						21	2807	65808
35						6	1667	50288
36						1	917	36688
37							462	25488
38							210	16808
39							84	10480
40							28	6147
41							7	3368
42							1	1708
43								792
44								330
45								120
46								36
47								8
48								1
$6^k=$	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616

8. Bij het gebruiken van dit tafeltje vergete men niet, dat $n_{(g.k)}$ het aantal gunstige gevallen voorstelt bij 6^k mogelijke gevallen; en dat dus, waar men heeft

$$\begin{aligned}
&n_{(2.1)} = n_{(2.2)} = 1, \quad n_{(3.1)} = n_{(3.3)} = 1, \quad n_{(4.1)} = n_{(4.4)} = 1, \\
&n_{(4.2)} = n_{(4.3)} = 3, \quad n_{(5.1)} = n_{(5.5)} = 1, \quad n_{(5.2)} = n_{(5.6)} = 4, \\
&n_{(6.1)} = n_{(6.6)} = 1, \quad n_{(6.2)} = n_{(6.5)} = 5, \quad n_{(6.3)} = n_{(6.4)} = 10, \\
&n_{(7.2)} = n_{(7.6)} = 6, \quad n_{(7.3)} = n_{(7.5)} = 15, \quad n_{(8.3)} = n_{(8.6)} = 21, \\
&n_{(8.4)} = n_{(8.5)} = 35, \quad n_{(9.5)} = n_{(9.6)} = 55, \quad n_{(10.5)} = n_{(10.6)} = 126;
\end{aligned}$$

de overeenkomstige waarschijnlijkheden, waarbij men deze getallen, telkens door 6^k moet deelen, toch zeer verschillend zijn.

Daarentegen is die waarschijnlijkheid bij

$$n_{(14.3)} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72} \quad \text{en} \quad n_{(14.5)} = \frac{540}{6^5} = \frac{5}{72}$$

even groot; zoodat het even waarschijnlijk is om 14 oogen te werpen met 3 als met 5 dobbelsteenen.

De zoo even gemaakte opmerking omtrent de gelijkheid van sommige $n_{(g.k)}$ wordt voor het geval van evene waarden van g, bevestigd door de formule (8). Dan toch wordt in den eersten term de factor $g - 2k$ nul voor $g = 2k$. In den tweeden term blijft de factor $(k+1)(g-2k) - (5k+6) = -(5k+6)$ wel bestaan; maar de faculteit $(2k-7)^{k-1/-1}$ heeft tot laatsten factor $k - 5$, zoodat zij verdwijnt voor alle $k \leqq 5$. Wordt echter $g > 2k > 10$, dan blijft die tweede term bestaan, en later ook nog de volgende termen; zoodat dan ook hier voor $k > 5$ nimmer $n_{(2g.k)} = n_{(2g.k+1)}$ worden kan. De bovengenoemde gevallen zijn dus de eenige.

Ten einde hetzelfde verschijnsel na te gaan bij onevene g, moet men het verschil tusschen $n_{(g.k+2)}$ en $n_{(g.k)}$ zoeken. Men heeft vooreerst

$$n_{(g.k+2)} = \frac{(g-1)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}} - \binom{k+2}{1}\frac{(g-7)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}} + \\ + \binom{k+2}{2}\frac{(g-13)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}} - \dots$$

Derhalve wordt eerst in het algemeen

$$\binom{k+2}{a}\frac{(g-2a-1)^{k+1/-1}}{1^{k+1/1}}=$$

$$=(k+2)(k+1).k^{a-2/-1}(g-6a-k-1)(g-6a-k)(g-6a-1)^{k-1/-1}\frac{1}{1^{a/1}\,1^{k+1/1}},$$

$$\binom{k}{a}\frac{(g-2a-1)^{k-1/-1}}{1^{k-1/1}}=$$

$$=(k-a+1)(k-a-2).k^{a-2/-1}k(k+1)(g-6a-1)^{k-1/-1}\frac{1}{1^{a/1}\,1^{k+1/1}};$$

zoodat het verschil van beide uitkomsten geeft, als men bedenkt, dat $k+1$ in beide factor is geworden,

$$\frac{k^{a-2/-1}\,(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k/1}}[(k+2)(g-6a-k-1)(g-6a-k)-$$

$$-(k-a+1)\,(k-a+2)\,k]=$$

$$=\frac{(g-6a-1)^{k-1/-1}}{1^{a/1}\,1^{k-a+2/1}}\,[k+2)\,g\,(g-12a-2k-1)+$$

$$+(35k+72)\,a^2+(14k^2+33k+12)\,a]\,;$$

terwijl men weder bij den eersten term voor dat verschil heeft

$$\frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k+1/1}}\,[(g-k-1)\,(g-k)-k\,(k+1)]=$$

$$=\frac{(g-1)^{k-1/-1}}{1^{k+1/1}}\,g\,(g-2k-1)=\frac{g^{k/-1}}{1^{k+1/1}}\,(g-2k-1).$$

Dientengevolge wordt dus algemeen

$$n_{(g.k+2)}-n_{(g.k)}=$$

$$=\frac{g^{k/-1}}{1^{k+1/1}}(g-2k-1)-\frac{(g-7)^{k-1/-1}}{1^{k+1/1}}[(k+2)g(g-2k-13)+(14k^2+68k+84)]+$$

$$+\frac{(g-13)^{k-1/-1}}{2\,.\,1^{k/1}}[(k+2)g(g-2k-25)+(28k^2+206k+312)]- \quad (9)$$

Deze formule toont wederom aan, dat voor $g = 2k + 1$, de eerste term verdwijnt. In den tweeden factor is hier

$$-12(k+2)g + (14k^2 + 68k + 84) = -10k^2 + 8k + 60;$$

maar de faculteit $(2k - 6)^{k-1/-1}$ heeft tot laatsten term $k - 4$; die faculteit verdwijnt dus voor $k \leqq 4$. Wordt echter ook $g = 2k + 1 > 9$, zoo blijft deze tweede term bestaan, en later ook nog de volgende termen. Derhalve is nimmer $n_{(2g+1.k)} = n_{(2g+1.k+2)}$, zoodra $k > 4$ wordt.

Uit beide redeneeringen volgt, dat verder alleen toevallig $n_{(g.k)} = n_{(g.k+l)}$ zal kunnen worden, wanneer de termen der overeenkomstige reeksen elkander zouden opheffen; maar dat zulks niet vooruit op eenvoudige wijze uit de formule is af te leiden.

Men ziet gemakkelijk in, dat men bij al deze formulen te doen had met eene soort van verbindingen, en wel met verschikkingen van de klasse k met herhalingen, tot bepaalde sommen g, met uitgesloten laatste elementen $(r = 6)$; waarvoor de notatie luidt $P' [s = g;\ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6]^k$.

9. Gaan wij nu over tot het onderzoek van een paar spelen, die tot dit onderwerp behooren.

Vooreerst het spel *Hasard* genoemd, dat met twee dobbelsteenen wordt gespeeld. De regels zijn hierbij de volgende; noem A den eersten speler, die de dobbelsteenen houdt en *bankier* heet, en B zijne tegenpartij.

a. A werpt eerst de kans voor B; deze kan zijn 5, 6, 7, 8 of 9. Werpt A dus een der overige oogen, zoo geldt die worp niet.

b. Daarop werpt A zijn eigen kans; deze kan zijn 4, 5, 6, 7, 8, 9 of 10.

c. Had A bij **a** de 6 of 8 geworpen, dan wint hij, indien hij bij **b** dezelfde oogen, of ook 12 werpt; hij verliest, wanneer hij 2, 3 of 11 werpt.

d. Had A bij **a** de 5 of 9 geworpen, dan wint hij, indien hij bij **b** dezelfde oogen werpt; maar hij verliest, wanneer hij bij **b** 2, 3, 11 of 12 werpt.

e. Had A bij **a** de 7 geworpen; dan wint hij, indien hij bij **b** dezelfde 7, of ook 11 werpt: daarentegen verliest hij bij het werpen van 2, 3 of 12.

f. Indien A echter bij **b** een andere kans voor zich werpt, dan hij reeds bij **a** voor B geworpen had; dan wint of verliest hij, naarmate hij zijne kans of die van B het eerste werpt.

g. Eerst wanneer A verliest, geeft hij de dobbelsteenen aan B over; zoodra deze verliest, is het spel geëindigd.

10. Laat ons zien, hoe groot naar deze voorwaarde de waarschijnlijkheid op winst voor A is, waartoe wij de getallen $n_{(g.2)}$ uit ons vorig tafeltje zullen behoeven, om na te gaan hoe dikwijls een bepaalde worp kan voorkomen; en neem daartoe vooreerst 6 als de kans van B (naar **a**).

Wanneer bij den tweeden worp **b** werpt

2, dan is er in		1 geval verlies;	naar (**c**).
3, dan is er in		2 gevallen verlies;	
6, dan is er in	5 gevallen winst;		
11, dan is er in		2 gevallen verlies;	
12, dan is er in	1 geval winst.		

Werpt A echter 4, 5, 7, 8, 9 of 10 als zijn eigen kans, waarvoor er $3 + 4 + 6 + 5 + 4 + 3 = 25$ gevallen zijn,

dan moet er een derde worp komen.

Noem dan zijn kans x, die in a gevallen kan voorkomen, dan wint hij, naar **f**, in a gevallen, verliest in 5 gevallen (zooveel malen als de kans 6 van B nu kan voorkomen). De winst bij den derden worp is dan in $a - 5$ gevallen; en in $36 - (a + 5) = 31 - a$ gevallen komt er een vierde worp. De waarschijnlijkheid van dien vierden worp is dus $\frac{31 - a}{36}$ stel $= \frac{p}{q}$.

Bij dien vierden worp is het aantal gevallen, waarin A wint, evenzeer $a - 5$, en het aantal gevallen, dat er een vijfde worp noodig is, ook $31 - a$; dus is de waarschijnlijkheid van dien vijfden worp evenzeer $\frac{p}{q}$.

En deze redenering blijft voor elken volgenden worp doorgaan, terwijl het aantal worpen onbepaald is, dat is oneindig

groot kan worden. Ten einde dus de winst voor A na te gaan, die er ontstaat uit hoofde van de voorwaarde **f**, heeft men daarvoor

$$(a-5)\left\{1+\left(\frac{p}{q}\right)+\left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\frac{p}{q}\right)^3+\ldots\right\}=(a-5)\frac{1}{1-\frac{p}{q}}=(a-5)\frac{q}{q-p};$$

of, wanneer men nu de waarden $p=31-a$, $q=36$, dus $q-p=36-(31-a)=a+5$ substitueert,

$$36\,\frac{a-5}{a+5}.$$

Aangezien echter deze winst kan voorkomen in a gevallen onder alle mogelijke 36 gevallen, zal het werpen der kans x als winst opleveren

$$36\,\frac{a-5}{a+5}\,\frac{a}{36}=a\,\frac{a-5}{a+5}.$$

Bij de toepassing dezer formule, heeft men nu achtereenvolgens $x=4, 5, 7, 8, 9$ of 10 te stellen, en verkrijgt dan

x	a	$a-5$	$a(a-5)$	$a+5$	$a\frac{a-5}{a+5}$	
4	3	-2	-6	8	$-3/4$	$=-297$
5	4	-1	-4	9	$-4/9$	$=-176$
7	6	$+1$	$+6$	11	$+6/11$	$=+210$
8	5	0	0	10	0	$=0$
9	4	-1	-4	9	$-4/9$	$=-176$
10	3	-2	-6	8	$-3/4$	$=-297$

(rechter kolom) $: (4\times 9\times 11)$.

waarvan de som is $\frac{-730}{396}=-\frac{365}{198}.$

Het geheel aantal gevallen van winst voor A, (wanneer men de gevallen van verlies als gevallen van negatieve winst, of ook als negatieve gevallen van winst opvat, even als reeds boven geschiedde) is dus

$$(5+1)-(1+2+2)-\frac{365}{198}=-\frac{167}{198};$$

en dus de wiskundige hoop op winst

$$w_6=-\frac{167}{198}:36=-\frac{167}{7128}.$$

Wanneer de kans van B, naar **a**, 8 ware geweest in plaats van 6; dan zoude men hier overal de oogen 6 en 8 moeten verwisselen; maar in het aantal gevallen waarop het hier steeds aankomt, wordt daardoor geene verandering gebracht. De uitkomsten blijven dus dezelfde; en men heeft

$$w_6=w_8=-\frac{167}{7128}.$$

11. Zij vervolgens, naar de voorwaarde **a**, 5 de kans van B; dan verkrijgen de beide vorige beschouwingen van § 10 hier een anderen vorm.

Werpt A bij den tweeden worp **b**

2, dan is er in		1 geval verlies;	(naar **d**).
3, dan is er in		2 gevallen verlies;	
5, dan is er in	4 gevallen winst;		
11, dan is er in		2 gevallen verlies;	
12, dan is er in		1 geval verlies;	

Verder kan A werpen 4, 6, 7, 8, 9 of 10, als zijn eigen kans, waarvoor $3+5+6+5+4+3=26$ gevallen.

Hier verkrijgt men dus voor de winst bij het werpen van de oogen x, naar **f**, omdat er 4 gevallen zijn voor de kans 5 van B,

$$a\,\frac{a-4}{a+4}.$$

De toepassing dezer formule geeft nu achtereenvolgens voor de verschillende gevallen van x

x	a	$a-4$	$a(a-4)$	$a+4$	$a\frac{a-4}{a+4}$		
4	3	-1	-3	7	$-{}^3/_7$	$=-135$	
6	5	$+1$	$+5$	9	$+{}^5/_9$	$=+175$	
7	6	$+2$	$+12$	10	$+{}^6/_5$	$=+378$	$:(5\times7\times9)$.
8	5	$+1$	$+5$	9	$+{}^5/_9$	$=+175$	
9	4	0	0	8	0	$=+\ 0$	
10	3	-1	-3	7	$-{}^3/_7$	$=+135$	

waarvan de som is $+\frac{458}{315}$.

Het geheel aantal gevallen van winst is derhalve

$$4-(1+2+2+1)+\frac{458}{315}=-\frac{172}{315};$$

en dus de wiskundige hoop op winst

$$w_5=-\frac{172}{315}:36=-\frac{43}{2835}=w_9.$$

Evenzeer toch als in § 10, blijven de getallen voor de kans 9 van B dezelfde als hier voor de kans 5; en moet dientengevolge $w_9=w_5$ zijn.

12. Zij eindelijk de 7 oogen de kans van B, volgens den regel **a**; dan worden de beide vorige berekeningen hier de volgende.

Als A bij den tweeden worp **b** werpt

2, dan is er in		1 geval verlies;	naar (**e**).
3, dan is er in		2 gevallen verlies;	
7, dan is er in	6 gevallen winst;		
11, dan is er in	2 gevallen winst;		
12, dan is er in		1 geval verlies;	

maar verder kan hij nog

4, 5, 6, 8, 9 of 10 als zijn eigen kans werpen,

waarvoor $3+4+5+5+4+3=24$ gevallen.

Omdat nu de kans 7 van B in 6 gevallen voorkomt, wordt

dus hier de uitdrukking der winst bij het werpen der verschillende oogen x, telkens met a gevallen

$$a\,\frac{a-6}{a+6};$$

en nu verkrijgt men hiervoor, naar **f**,

x	a	$a-6$	$a(a-6)$	$a+6$	$a\frac{a-6}{a+6}$		
4	3	-3	-9	9	-1	$=-55$	
5	4	-2	-8	10	$-{}^4/_5$	$=-44$	
6	5	-1	-5	11	$-{}^5/_{11}$	$=-25$	$:(5\times 11)$.
8	5	-1	-5	11	$-{}^5/_{11}$	$=-25$	
9	4	-2	-8	10	$-{}^4/_5$	$=-44$	
10	3	-3	-9	9	-1	$=-55$	

waarvan de som is $-\frac{248}{55}$.

Dientengevolge is het geheele aantal gevallen van winst

$$(6+2)-(1+2+1)-\frac{248}{55}=-\frac{28}{55};$$

en verder de wiskundige hoop op winst

$$w_7=-\frac{28}{55}:36=-\frac{7}{495}.$$

13. Men ziet dus, dat de wiskundige hoop op winst voor A altijd negatief is; dat is, dat er altijd hoop op verlies bestaat.

Wil men die wiskundige hoop op winst berekenen, voor dat de kans van B bekend is, dan bedenke men dat de

w_5, w_6, w_7, w_8 en w_9
in $4+5+6+5+4=24$ gevallen kan

plaats hebben; de zes overige worpen

2, 3, 11 en 12
in $1+2+2+1=6$ gevallen komen, vol-

gens de voorwaarden **a**, niet in aanmerking.

Men heeft dus voor de geheele waarschijnlijkheid

$$W = [5(w_6 + w_8) + 4(w_5 + w_9) + 6w_7] : 24 =$$

$$= \left[-10\frac{167}{2.9.11.36} - 8\frac{43}{5.7.9.9} - 6\frac{7}{5.9.11}\right] : 24 =$$

$$= -\frac{10.167.5.7 - 8.43.11.8 - 6.7.7.8.9}{24.5.7.11.81} =$$

$$= -109890 : [24.5.7.11.81] = -\frac{37}{2016}.$$

14. Vervolgens zij het spel *Krabs* te onderzoeken, dat met drie dobbelsteenen wordt gespeeld. Noem weder A den bankier, hier den *houder*, d. i. die den koker houdt; en B den tegenspeler, hier den *bediener*, dat is, die telkens de dobbelsteenen na den worp weder in den koker werpt. Bij dit spel gelden nu de volgende regels.

a. Eerst werpt A om *de kans van* B *te leveren;* daarvoor kunnen gelden de oogen 8, 9, 10, 11, 12 of 13; andere worpen gelden hier niet.

b. Is dus de kans van B geleverd, dan moet de houder *zich dekken*, door voor zich zelven een worp te doen. Is dit aantal oogen hetzelfde als de kans voor den bediener, bij **a** verkregen, dan maakt de houder een *herhaling*, en wint.

Tegenover deze mogelijkheid van winst, moet echter ook eene mogelijkheid van verlies staan, en daartoe dienen de *krabs*, dat zijn de worpen 3, 4, 5, 6 en 15, 16, 17, 18.

Maar deze krabs worden in de verschillende gevallen van de kans des bedieners verschillend toebedeeld.

c. Is nu als kans van den bediener geleverd 10 of 11, zoo wint de *houder* bij den worp **b**, als hij 10 of 11 (als herhaling) of wel 15 werpt; hij verliest bij de krabs 3, 4, 5, 6, 16, 17, 18.

d. Was als kans van den bediener 9 of 12 gevonden, zoo wint de houder, als hij zich bij den worp **b** door de herhaling dier 9 of 13, of door 15 dekt; wanneer hij zich daarentegen dekt met de krabs 3, 4, 5, 6, 16, 17, 18, zoo verliest hij.

e. Indien voor de kans van den bediener de oogen 8 of 13 zijn geleverd, wint de houder, als hij zich met eene herhaling

of met 16 oogen dekt; hij verliest echter, wanneer hij zich dekt met de krabs 3, 4, 5, 6, 15, 17, 18.

f. Bij het werpen van ieder ander aantal oogen, wordt dit de kans van den houder. Omdat er nu, na aftrekking der krabs nog overblijven de oogen 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, kan de houder zich dekken met twee kansen meer dan de bediener, namelijk 7 en 14.

Bij de volgende worpen gelden er geene herhalingen of krabs meer.

g. Nu wint of verliest de houder, naarmate hij zijn eigen kans of de kans van den bediener het eerst werpt.

15. Wij hebben nu te onderzoeken, hoe groot de waarschijnlijkheid op winst voor den houder A is, wanneer hij voor de kans van den bediener B een der volgende oogen 8, 9, 10, 11, 12 of 13 heeft geleverd.

Beginnen wij met 10, als geleverde kans voor B.

Men weet nu eerst de gevallen waarin **A** wint of verliest, naar **c**.

Vervolgens kan **A** zich nog dekken door

$$x = 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13 \text{ of } 14$$
$$\text{met } a = 15,\ 21,\ 25,\ 27,\ 25,\ 21 \text{ of } 15 \text{ gevallen.}$$

Bij den tweeden worp zijn er dus a gevallen van winst tegen 27 gevallen van verlies voor de oogen 10; bij de overige $216 - (a + 27) = 189 - a$ gevallen, moet er dus een derde worp komen; de waarschijnlijkheid van dien derden worp is derhalve

$$\frac{189 - a}{216}.$$

Bij dien derden, en alle volgende worpen, — hun aantal is geheel onbepaald, en kan oneindig groot worden, — is nu telkens weder de gevallen van winst $a - 27$, en de gevallen van een volgenden worp $189 - a$.

Ten einde dus de geheele hoop op winst na den tweeden worp te vinden, heeft men

$$(a-27)\left\{1+\frac{189-a}{216}+\left(\frac{189-a}{216}\right)^2+\left(\frac{189-a}{216}\right)^3+\dots\right\}=$$

$$=(a-27)\frac{1}{1-\frac{189-a}{216}}=(a-27)\frac{216}{216-(189-a)}=$$

$$=(a-27)\frac{216}{27+a}=216\,\frac{a-27}{a+27}.$$

De wiskundige hoop op winst vóór den tweeden worp vindt men door de vorige te vermenigvuldigen met de waarschijnlijkheid om bij dien tweeden worp juist de x te werpen; dat is met $\frac{a}{216}$; zij wordt dus

$$216\,\frac{a-27}{a+27}\,\frac{a}{216}=a\,\frac{a-27}{a+27}.$$

Volgens deze redeneringen kan men nu de volgende berekeningen opmaken.

Als A zich dekt met

3, dan is er in 1 geval verlies;
4, dan is er in 3 gevallen verlies;
5, dan is er in 6 gevallen verlies;
6, dan is er in 10 gevallen verlies;
10, dan is er in 27 gevallen winst;
15, dan is er in 10 gevallen winst;
16, dan is er in 6 gevallen verlies;
17, dan is er in 3 gevallen verlies;
18, dan is er in 1 geval verlies;

en daarna blijven er over

Worpen.	Gevallen.	2de Worp. Winst.	Gevallen van 3en worp.	Geheele hoop op winst na 2en worp.	Waarschijnlijkheid bij 1en worp.	Geheele hoop op winst vóór 2en worp.
7	met 15	$15-27=-12$	$216-(15+27)=174$	$-12.\frac{216}{216-174}=-12.\frac{216}{42}=-61\frac{5}{7}$	$\times 15$	$=-925\frac{5}{7}$
8	met 21	$21-27=-\ 6$	$216-(21+27)=168$	$-\ 6.\frac{216}{216-168}=-\ 6.\frac{216}{48}=-27$	$\times 21$	$=-567$
9	met 25	$25-27=-\ 2$	$216-(25+27)=164$	$-\ 2.\frac{216}{216-164}=-\ 2.\frac{216}{52}=-\ 8\frac{4}{13}$	$\times 25$	$=-207\frac{9}{13}$
11	met 27	$27-21=-\ 0$	$216-(27+27)=162$	$0\ \frac{216}{216-162}= \quad = \quad 0$	$\times 27$	$= \quad 0$
12	met 25	$25-27=-\ 2$	$216-(25+27)=164$	$-\ 2.\frac{216}{216-164}=-\ 2.\frac{216}{52}=-\ 8\frac{4}{13}$	$\times 25$	$=-207\frac{9}{13}$
13	met 21	$21-27=-\ 6$	$216-(21+27)=168$	$-\ 6.\frac{216}{216-168}=-\ 6\ \frac{216}{48}=-27$	$\times 21$	$=-567$
14	met 15	$15-27=-12$	$216-(15+27)=174$	$-12.\frac{216}{216-174}=-12.\frac{216}{42}=-61\frac{5}{7}$	$\times 15$	$=-925\frac{5}{7}$
	149			waarvan de som is		$-\ 3400\frac{74}{91}$;

derhalve is de geheele winst

$$(27+10)-(1+3+6+10+6+3+1)-3400\frac{74}{91}:216=-8\frac{271}{364};$$

en derhalve de wiskundige hoop op winst bij den eersten worp

$$w_{10}=-8\frac{271}{364}:216=-\frac{1061}{26208}=w_{11}.$$

Wanneer toch de voor B geleverde kans was 11 in plaats van 10, dan zoude men hier overal de oogen 10 en 11 moeten verwisselen; dit zoude echter in het aantal gevallen geenerlei veranderingen brengen, en dus zoude de einduitkomst dezelfde zijn gebleven; derhalve is $w_{11}=w_{10}$.

16. Wanneer echter de geleverde kans voor den bediener is 9, dan blijven de vorige redeneeringen wel gelden, maar de getallen zijn andere. Dan heeft men toch met de voorwaarde **d** te doen, die ons hier het volgende geeft.

Als A zich dekt met

3, dan is er in 1 geval verlies;
4, dan is er in 3 gevallen verlies;
5, dan is er in 6 gevallen verlies;
6, dan is er in 10 gevallen verlies;
9, dan is er in 25 gevallen winst;
15, dan is er in 10 gevallen winst;
16, dan is er in 6 gevallen verlies;
17, dan is er in 3 gevallen verlies;
18, dan is er in 1 geval verlies;

en daarna blijven er over

Worpen. Gevallen.	2de Worp. Winst.	Gevallen van 3en worp.	Geheele hoop op winst na 2en worp.	Waarschijnlijkheid bij 1en worp.	Geheele hoop op winst vóór 2en worp.
7 met 15	$15-25=-10$	$216-(15+25)=176$	$+10.\frac{216}{216-176}=-10.\frac{216}{40}=-54$	$\times 15$	$=-810$
8 met 21	$21-25=-\ 4$	$216-(21+25)=170$	$-\ 4.\frac{216}{216-170}=-\ 4.\frac{216}{46}=-18\frac{18}{23}$	$\times 21$	$=-394\frac{10}{23}$
10 met 27	$27-25=+\ 2$	$216-(27+25)=164$	$+\ 2.\frac{216}{216-164}=+\ 2.\frac{216}{52}=+\ 8\frac{4}{13}$	$\times 27$	$=+224\frac{4}{13}$
11 met 27	$27-25=+\ 2$	$216-(27+25)=164$	$+\ 2.\frac{216}{216-164}=+\ 2.\frac{216}{52}=+\ 8\frac{4}{13}$	$\times 27$	$=+224\frac{4}{13}$
12 met 25	$25-25=\ \ 0$	$216-(25+25)=166$	$+\ 0\ \frac{216}{216-166}=\ \ =\ 0$	$\times 25$	$=\ \ 0$
13 met 21	$21-25=-\ 4$	$216-(21+25)=170$	$-\ 4.\frac{216}{216-170}=-\ 4.\frac{216}{46}=-18\frac{18}{13}$	$\times 21$	$=-394\frac{10}{23}$
14 met 15	$15-25=-10$	$216-(15+25)=176$	$-10.\frac{216}{216-176}=-10.\frac{216}{40}=-54$	$\times 15$	$=-810$
151			waarvan de som is		$-1960\frac{76}{299}$;

zoodat nu de geheele winst is

$$(25+10)-(1+3+6+10+6+3+1)-1960.\frac{76}{299}:216=-4\frac{45}{598}.$$

Dientengevolge is hier de wiskundige hoop op winst bij den eersten worp

$$w_9 = -4\frac{45}{598}:216 = -\frac{2437}{129168} = w_{12}.$$

Want ingeval de kans 12 voor B geleverd was, in plaats van 9, dan zoude in het aantal gevallen geene verandering komen; zoodat de einduitkomst tevens dezelfde wordt, dat is $w_{12} = w_9$.

17. Eindelijk kan nog de kans 8 voor B worden geleverd, dat weder invloed heeft niet op de redeneeringen van § 15, maar wel op de aldaar voorkomende aantallen gevallen. Daarenboven gelden hier dan de voorwaarden **e**.

Vooreerst kan de houder zich dekken met de oogen

3, dan is er in 1 geval verlies;
4, dan is er in 3 gevallen verlies;
5, dan is er in 6 gevallen verlies;
6, dan is er in 10 gevallen verlies;
8, dan is er in 21 gevallen winst;
15, dan is er in 10 gevallen verlies;
16, dan is er in 6 gevallen winst;
17, dan is er in 3 gevallen verlies;
18, dan is er in 1 geval verlies.

Daarenboven blijven er nog over

Worpen.	Gevallen.	2de Worp. Winst.	Gevallen van 3en worp.	Geheele hoop op winst na 2en worp.	Waarschijnlijkheid bij 1en worp.	Geheele hoop op winst vóór 2en worp.
7	met 15	$15-21=-6$	$216-(15+21)=180$	$-6.\frac{216}{216-180}=-6.\frac{216}{36}=-36$	$\times 15$	$=-540$
9	met 25	$25-21=+4$	$216-(25+21)=170$	$+4.\frac{216}{216-170}=+4.\frac{216}{46}=+18\frac{18}{23}$	$\times 25$	$=+469\frac{13}{23}$
10	met 27	$27-21=+6$	$216-(27+21)=168$	$+6.\frac{216}{216-168}=+6.\frac{216}{48}=+27$	$\times 27$	$=+729$
11	met 27	$27-21=+6$	$216-(27+21)=168$	$+6.\frac{216}{216-168}=+6.\frac{216}{48}=+27$	$\times 27$	$=+729$
12	met 25	$25-21=+4$	$216-(25+21)=170$	$+4.\frac{216}{216-170}=+4.\frac{216}{46}=+18\frac{18}{23}$	$\times 25$	$=+469\frac{13}{23}$
13	met 21	$21-21=0$	$216-(21+21)=174$	$0.\frac{216}{216-174}==0$	$\times 21$	$=0$
14	met 15	$15-21=-6$	$216-(15+21)=180$	$-6.\frac{216}{216-180}=-6.\frac{216}{36}=-36$	$\times 15$	$=-540$
	155					

waarvan de som is $+1317\frac{3}{23}$.

Daarmede wordt nu de geheele winst

$$(21+6)-(1+3+6+10+10+3+1)+1317\frac{3}{23}:216=-\frac{83}{92};$$

en derhalve de wiskundige hoop op winst bij den eersten worp, omdat hier voor de kans 13 dezelfde getallen komen, en dientengevolge ook dezelfde uitkomst;

$$w_8=w_{13}=-\frac{83}{92}:216=-\frac{83}{19872}.$$

18. Wil men eindelijk de wiskundige hoop op winst van den houder A, — die, zoo als men gezien heeft, altijd negatief is — berekenen, voor dat de kans van den bediener B geleverd is; zoo bedenke men, dat het aantal gevallen voor de $w_{10}=w_{11}$, $w_9=w_{12}$, $w_8=w_{13}$ overeenkomstig 27, 25 en 21 bedraagt, dat is te samen 146 gevallen.

De overige 70 gevallen, dat men 3, 4, 5, 6, 7, 14, 15, 16, 17, 18, werpt, komen bij den regel **a** niet in aanmerking.

Men vindt alzoo

$$W=[27(w_{10}+w_{11})+25(w_9+w_{12})+21(w_8+w_{13})]:146=$$

$$=\left[-54.\frac{1061}{7.13.4.72}-50\frac{2437}{13.23.2.216}-42\frac{83}{23.4.216}\right]:146=$$

$$=-\frac{54.1061.23.3-50.2437.7.2-42.83.7.13}{146.7.13.23.4.216}=$$

$$=-5976412:[146.7.13.23.4.216]=-\frac{4997}{146.7.216}=$$

$$=-\frac{4997}{220752}.$$

ERRATA.

Versl. en Meded. Kon. Akad. van Wet., Afd. Nat., 2e Reeks, Deel X.
(v. d. Berg, Geodetische lijn, enz.)

Blz. 13 r. 12 v. b.	*staat:*	snijden.	*lees:*	kruisen.
„ 15 „ 8 v. o.	„	de afwijking.	„	de onderlinge afwijking.
„ 25 „ 6 v. b.	„	$3(su' + uv)$.	„	$(rv' + 3\,su' + 3\,uv)$.
„ 25 „ 10 v. b. „ 25 „ 12 v. b.	„	$(2\,su' + 7\,uv + 10\,rv')$.	*lees:*	$(9\,rv' + 2\,su' + 7\,uv)$.
„ 26 „ 2 v. b.	„	$3(su' + uv)$.	*lees:*	$(rv' + 3\,su' + 3\,uv)$.
„ 29 „ 5, 10 en 19 v. b.	*staat:*	a.	„	α.
„ 40 „ 4 v. o.	*staat:*	*sin.*	„	*sin.* α.
„ 43 „ 4 v. o.	„	$\psi\, h$.	„	$h\, \psi$.

INHOUD

VAN

DEEL XII. — STUK 3.

---

bladz.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

DERTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE**.

TWEEDE REEKS.

DERTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1878.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

DERTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Dertiende Deel. — Eerste Stuk.

AMSTERDAM
C. G. VAN DER POST.
1878.

IETS OVER
KWEL EN VERDAMPING.

DOOR

J. R. T. ORTT.

Bij het stellen van stoomwerktuigen tot bemaling van polders en waterschappen zijn er twee zaken, die het moeijelijk, ja zelfs onmogelijk maken het daartoe benoodigd vermogen der stoomwerktuigen met juistheid te bepalen: namelijk de kwel en de verdamping.

Omtrent het eerste is vooraf niets met zekerheid te zeggen. Bij de Mijdrechtsche droogmakerij heeft men vele bezwaren dienaangaande ondervonden, en ook de Tienhovensche en Maarseveensche plassen in Utrecht, hebben nog in de laatste jaren geleerd, dat de doorkwelling of ondigtheid der dijken zoo sterk kan zijn, dat eene drooglegging nagenoeg ondoenlijk wordt. De bodem en vooral het staal der dijken aldaar zijn ondigt en groote waterplassen omgrenzen den polder, waardoor de kosten van droogmaking en verder van drooghouding zoo groot kunnen worden, dat alle kans op eenig geldelijk voordeel verloren gaat.

Voorafgaande boringen kunnen intusschen tot leiddraad strekken wat men in dezen bij eene toekomstige bemaling heeft te verwachten.

Omtrent de verdamping weet men welligt nog minder dan van de kwel. Gelukkig dat men zich hierbij tegen teleurstellingen kan vrijwaren, met de watervermindering door verdamping niet groot te stellen, iets dat te eerder noodig is, daar in den winter en in de natste jaargetijden de verdamping

luttel is en men gedurende den zomer bij sterke uitdamping zelden overlast van water heeft.

Hoewel men zich nu in gewone omstandigheden van droogmakerijen bepaalt tot eene bemaling, berekend tot het uitpompen van 54 M^3 in de minuut per 1000 H. A., zoo is het toch niet van belang ontbloot eenigzins nader bekend te worden met de vermeerdering en vermindering van het waterbezwaar, ten gevolge van de kwel en verdamping.

Het kwam mij voor, dat eene naauwkeurige beschouwing van den Haarlemmermeerpolder, waarin zoovele en deugdelijke waarnemingen van allerlei aard worden gedaan, hierover eenig licht zou kunnen verspreiden, en het zijn de uitkomsten dezer nasporingen, die ik hier wensch mede te deelen.

De gevoelens omtrent de kwel in den Haarlemmermeerpolder loopen zeer uiteen.

Door jonkheer GEVERS VAN ENDEGEEST wordt berekend, dat gedurende de bemaling der plas 61875500 M^3 jaarlijks door kwel naar binnen vloeide, dit zou voor de geheele oppervlakte dier droogmaking of 18100 H. A., per jaar eene hoogte van 0.34 M. ingekweld water geven.

Bij eene schatting van den hoofdopzigter A. VAN EGMOND over de maanden Januarij, Februarij, Maart en April 1857 gedaan, kwam deze tot eene maandelijksche kwel van 11000000 M^3, gevende, op gelijke wijze herleid, 0.729 M. hoogte per jaar.

De commissie, belast met het onderzoek naar de middelen tot verzekering eener behoorlijke waterontlasting voor den Haarlemmermeerpolder, *) zegt in haar rapport van 8 October 1858 aan het polderbestuur uitgebragt, dat de hoeveelheid kwelwater over de oppervlakte van 419 H. A. waterberging, minstens moet gesteld worden op eene hoogte van 579 m.M. per maand, wat dus over de geheele oppervlakte land en water geslagen per jaar zou geven 0.161 M. hoogte.

---

*) De commissie bestond uit de volgende leden:

D. J. STORM BUIJSING, hoofdingenieur van den waterstaat.

J. P. VAN DEN BERG JZ., fabriek van Delfland.

A. A. C. DE VRIES ROBBÉ, ingenieur van het stoomwezen.

P. VAN DER STERR, architect te Amsterdam.

J. LEGUIT, poldermeester van den heer HUGOWAARD.

De heeren CONRAD, REUVENS en STIELTJES komen in hun verslag tot het verzekeren van een vasten boezemstand aan Rijnland, van 1868, (bladz. 47) tot eene dagelijksche kwel van 67100 M^3, overeenkomende met 0.135 M. hoogte per jaar. Zij voegen er de opmerking bij, dat die hoeveelheid wel als een minimum mag worden beschouwd.

In de mededeeling van ons geacht lid, den heer STIELTJES, over den toestand van den Haarlemmermeerpolder in den droogen zomer van 1868 *), laat Zijn Ed. de kwel geheel buiten rekening en merkt Zijn Ed. zelfs op, „dat het toch vrij zeker „schijnt, dat uit den ondergrond geen water is toegevloeid.”

Men ziet dus, dat voor den Haarlemmermeerpolder, waarmede men zoo goed bekend is, de gevoelens omtrent de kwel zeer uiteenloopen en sommigen die kwel zeer groot achten, anderen daarvoor minder stellen, terwijl enkelen zelfs het denkbeeld zijn toegedaan, dat de kwel niet noemenswaardig is.

De laatste stelling kan ik niet aannemen, bij de droogmaking van het meer werd ontegenzeggelijk zakking in den waterstand van sommige wateren onder Bennebroek waargenomen. Men leze hierover den brief van wijlen ons geacht medelid, den heer Dr. W. C. H. STARING van 14 Februarij 1872 aan de Staatscommissie voor het indijken der Zuiderzee †), luidende als volgt:

„Kwel heeft men alleen te verwachten waar grof rivierzand „eene zeef in den grond vormt, waardoor het water tot het „binnenland toegang verkrijgt, overal waar die zandlaag niet „door de oppervlakkige kleilaag afgesloten blijft in slooten en „kolken, nabij den binnenvoet der dijken in de eerste plaats.

„Hetgeen door het rivierzand geschiedt bij onze groote ri„vieren, herhaalt zich hier en daar in de zeeprovinciën door „het zeezand, dat kenbaar aan de zeeschelpen, welke veelvuldig „daarin voorkomen, den ondergrond onder klei en veen van „een groot gedeelte der provinciën Friesland, der beide Hol„landen en Zeeland uitmaakt.

*) Zie *Verslagen en Mededeelingen*, Afd. Natuurkunde, Tweede Reeks, 3e deel, 3e stuk.

†) Voorkomende als bijlage XIV van het verslag der staatscommissie, dato 21 April 1873.

„Door dit zeezand loopen de vijvers en slooten onder Ben-
„nebroek droog in den Haarlemmermeerpolder. Wanneer men
„hier binnen en digt bij den ringdijk, de zeezandlaag niet door
„de bermsloot en den maalkolk van de Cruquius blootgelegd
„had, zou men denkelijk geene doorkwelling bespeurd hebben."

De ondigte laag, waarover Dr. STARING spreekt, is door den vroegeren hoofdopzigter van den Haarlemmermeerpolder, A. VAN EGMOND, in 1858 door boringen gevonden over 6000 M. lengte, van het Spaarne tot bij Bennebroek, en wel onder den ringdijk en in den polder, ter diepte van 4 M. en op andere plaatsen van 5.5 M. onder AP, terwijl men op de grootste diepte, die bereikt werd, van 8.9 M. onder A. P. nog steeds dezelfde zand- en schelplaag aantrof.

Dat Dr. STARING hier den toestand juist beschrijft, wordt nog gestaafd door het ijs, dat bij strenge vorst in de Kruisvaart, leidende naar de Cruquius, door wellen zeer gevaarlijk blijft om te begaan, wanneer de ringvaart en andere wateren met gerustheid worden bereden.

Dit verschijnsel van wellen wordt intusschen niet alleen bij de Cruquius, maar op vele andere gedeelten en zelfs oostwaarts van de hoofdvaart nog in sterke mate aangetroffen, als:

in de Kruisvaart tusschen den Sloterweg en Slootertogt over eene lengte van ongeveer 600 M.

in den Vennepertogt tusschen den Aalsmeerder en Sloterweg over eene lengte van ongeveer 1000 M.

in den Aalsmeerder Zuidtogt van den Bennebroekertogt zuidwaarts, over eene lengte van ruim 1000 M.

in den Slotertogt.

a. van de Kruisvaart noordoostwaarts over eene lengte van 600 M.

b. van den Vennepertogt noordoostwaarts over eene lengte van 800 M.

c. van den Vennepertogt zuidoostwaarts over eene lengte van 800 M.

In den Aalsmeerder Zuidtogt werden in den winter 1875—1876, bij kavel 19 en 20 nog open plaatsen gevonden, toen het ijs elders eene dikte van 12 c.M. had.

Op gelijke wijze worden er vakken met wellen aangetroffen

in den *Spaarnwoudertogt* tusschen den Sloterweg en Kagertogt en in den Lissertogt, tusschen de hoofdvaart en den Kagertogt. In de slooten nabij gemelde plaatsen worden dezelfde verschijnselen opgemerkt.

Ook in de Hoofdvaart, Nieuwerkerker en Kagerstogten, bezuiden den Lissertogt en in den Lissertogt tusschen de Hoofdvaart en den Kagertogt worden plaatsen gevonden, die nimmer digtvriezen, zooals er wel meerdere zullen te vinden zijn, al zijn mij die niet juist bekend.

Eindelijk werd, eenige jaren geleden, bij het bouwen van eene boerderij voor den heer A. B. VAN TIENHOVEN, staande op kavel 11 van Sectie J. J. gelegen ten oosten aan de Hoofdvaart, tusschen de Kruisvaart en den Bennebroeker dwarstogt een put geboord tot eene diepte van ongeveer 12 M. onder A. P., welke put sinds 3 jaar zooveel water geeft, dat men, niettegenstaande het aanmerkelijk gebruik dat daarvan voor het bedrijf wordt gemaakt, het overtollige water naar de kavelsloot door een potduiker heeft moeten afleiden, welke sedert dien tijd voortdurend als een gewone pomp blijft loopen.

Ook op de perceelen, sectie J J, kavel 9 en H H, kavel 20, waar welputten zijn gemaakt, doen zich dezelfde verschijnselen voor.

Al deze feiten zijn te overtuigend, dan dat het kwellen van den bodem over een groot gedeelte van den polder kan worden ontkend en al is de invloed daarvan op den zoo uitgestrekten en goed bemalen polder minder merkbaar en niet van te hinderlijken aard, toch is de meening eenzijdig en onjuist, dat men hier slechts met eene kwelling des geestes te doen heeft, zooals soms wordt beweerd.

Veelvuldig zijn de waarnemingen, die men betrekkelijk de verdamping heeft gedaan en nog doet, maar de uitkomsten daarvan zijn zoo verschillend, naarmate van de hoogte boven den grond waarop en de grootte der oppervlakten waarvan de verdamping wordt waargenomen, en of die oppervlakten al dan niet met verschillende grondsoorten en planten zijn bedekt, dat men uit die waarnemingen onmogelijk tot de werkelijke verdamping, die in een geheelen polder plaats heeft, kan of mag besluiten.

In de bijlagen zijn de waarnemingen dienaangaande van 1869—1876 te Helder gedaan, te zamen gevat, waaruit het bovenstaande overtuigend blijkt.

Was de werkelijke uitdamping, die in den Haarlemmermeerpolder plaats heeft, bekend, dan zou het feit der kwel spoedig beslist zijn en ook omgekeerd. Men heeft nu echter te doen met twee onbekende natuurkrachten, die eenen tegengestelden invloed uitoefenen en het alzoo moeijelijk maken tot eene oplossing te geraken.

Deed men in andere polders, waarin volstrekt geen kwel wordt gevonden, zulke naauwkeurige waarnemingen als in den Haarlemmermeerpolder, dan zou men juiste gegevens betrekkelijk de uitdamping over geheele landstreken verkrijgen, die weder met andere polders vergeleken, tot juiste uitkomsten van de kwel zouden kunnen leiden, en niet alleen van de kwel, maar ook omtrent het verschil in uitdamping van gras en bouwlanden en daarna mogelijk ook wel van verschillende veldvruchten.

Het is dan ook in het belang der wetenschap te hopen, dat vele polderbesturen het schoone voorbeeld, ten deze door de directie van den Haarlemmermeerpolder gegeven, zullen opvolgen en hunne waarnemingen even vrijgevend ten gebruike zullen stellen.

In den Haarlemmermeerpolder wordt het boezemwater verlaagd door uitpomping en verdamping, terwijl de boezem wordt bezwaard door regen, kwel en inlating van water in tijden van groote droogte.

Men kan intusschen het meer of minder water, dat de polder bevat, niet gelijk stellen aan eene schijf water ter grootte van den boezem en ter dikte van het verschil in hoogte van waterstand, daar de grond ook voor een gedeelte met water bezwaard is zonder dat men de hoeveelheid daarvan kan bepalen. Om eene juiste vergelijking te maken is het dus noodig een tijdvak te nemen, waarbij de waterstand aan het begin en het einde gelijk staat en tevens op den dag der waarneming gedurende geruimen tijd, geen of weinig regen is gevallen, zoodat het water uit den grond in beide gevallen nagenoeg gelijkelijk zal zijn weggezakt.

Nu wordt in den Haarlemmermeerpolder naauwkeurig aanteekening gehouden:

1°. van den gevallen regen en de waargenomen verdamping aan de stoomgemalen de Leeghwater, de Cruquius, de Lijnden en te Hoofddorp, zoodat de gemiddelden uit deze waarnemingen als vrij juist zijn aan te nemen.

2o. van den stand van het boezemwater op dezelfde plaatsen dagelijks aangeteekend. Men zou echter tot eene onnaauwkeurige uitkomst geraken, wanneer men hier het gemiddelde uit deze getallen voor den boezemstand wilde aannemen, omdat aan de oostzijde van den kruistogt nabij Aalsmeer dagelijksche waarnemingen ontbreken en bij de meestal heerschende westewinden het water aan de Cruquius alzoo lager moet zijn, dan te Aalsmeer. De waterstanden bij de snijding van de Hoofd- en Kruisvaart te Hoofddorp zijn dus geschikter om als den gemiddelden boezemstand te beschouwen.

Wat nu de kwel betreft, zoo mag die over groote tijdvakken wel als gelijk worden aangenomen, daar er geene redenen bestaan, om te veronderstellen, dat die bij overigens gelijken toestand van den polder regelmatig zal vermeerderen of verminderen.

Bij het onderzoek in de duinen gedaan, ten behoeve van de Amsterdamsche waterleiding is het ten duidelijkste gebleken, dat er eene scheiding of rug van hoogsten waterstand bestaat, waarbij het westelijk gedeelte naar zee afvloeit en het oostelijke gedeelte landwaarts.

Van dat water op het oostelijk gedeelte der duinen gevallen, zal voorzeker een gedeelte tot de vroeger besproken laag van zand met schelpen vermengd doorzakken en een uitweg vinden in den Haarlemmermeerpolder. Een geruimen tijd na veel regen kunnen de wellen in den polder daardoor sterker werken, ook kan een lager waterstand in den polder daartoe bijdragen. Evenzoo kan grooter verschil tusschen den boezemstand van den Haarlemmermeerpolder en van Rijnland de wellen en mogelijke doorkwelling van den ringdijk welligt iets sterker doen werken, maar bij groote tijdvakken verdwijnen deze kleine verschillen en zal men weinig van de werkelijkheid afwijken met de kwel als standvastig aan te nemen.

Volkomen gelijke toestanden van waterstanden, gevallen regen enz., bij het begin en einde van een tijdvak zijn niet te vinden, maar wel van gelijken waterstand gedurende eenige opvolgende dagen, waarmede men zich alzoo tevreden moet stellen.

Ik heb ter beschouwing gekozen twee tijdvakken van ongeveer gelijke lengte en van nabij zes jaren, en wel van 20 April 1861 tot 4 Mei 1867, of 2205 dagen, en van 26 Mei 1867 tot 26 Mei 1873, of 2192 dagen.

1e TIJDVAK.

Vergelijking der waterstanden onder A.P. tijdens het begin en het einde.

	1861.					1867.		
	16	April	waterstand	4.79		30	April	waterstand	4.77
	17	〃	〃	4.77		1	Mei	〃	4.76
	18	〃	〃	4.77		2	〃	〃	4.75
	19	〃	〃	4.76		3	〃	〃	4.75
Begin tijdvak	20	〃	〃	4.75	Einde tijdvak	4	〃	〃	4.75
	21	〃	〃	4.74		5	〃	〃	4.74
	22	〃	〃	4.74		6	〃	〃	4.74
	23	〃	〃	4.74		7	〃	〃	4.74
	24	〃	〃	4.76		8	〃	〃	4.75
	25	〃	〃	4.77		9	〃	〃	4.75
	26	〃	〃	4.77		10	〃	〃	4.75
	27	〃	〃	4.77		11	〃	〃	4.76

Gedurende de bovenstaande dagen van vergelijking werd er n geen van beide jaren water ingelaten. In 1861 werd het pompen gestaakt, den 14den April of 6 dagen vóór den aanvang van het tijdvak en den 24sten deed men met de Leeghwater gedurende 17 uur met 8 pompen 8602 slagen, waarbij 337198 M^3 werden uitgepompt.

Hierdoor zou de boezem van 880 H.A. 3.8 c.M. worden verlaagd, hetgeen wegens toezakking van water uit den bodem iets minder moet zijn en alzoo de daling des boezems van 4.74 tot 4.76 à 4.77 genoegzaam verklaart.

In 1867 werd er reeds sedert 14 dagen vóór den 4den Mei

niet meer gepompt en ook niet gedurende de volgende dagen hierboven opgegeven.

Ook de gevallen regen loopt gedurende bovengemelde dagen weinig uiteen, zoals uit onderstaande tabel blijkt:

	16 April	1861	0	m.M.		30 April	1867	0.67	m.M.
	17 〃	〃	0	〃		1 Mei	〃	0 69	〃
	18 〃	〃	0	〃		2 〃	〃	1.39	〃
	19 〃	〃	0.07	〃		3 〃	〃	0	〃
Begin tijdvak	20 〃	〃	0	〃	Einde tijdvak	4 〃	〃	0	〃
	21 〃	〃	0.07	〃		5 〃	〃	0	〃
	22 〃	〃	0.07	〃		6 〃	〃	0	〃
	23 〃	〃	0.1	〃		7 〃	〃	0	〃
	24 〃	〃	0	〃		8 〃	〃	0	〃
	25 〃	〃	0	〃		9 〃	〃	0	〃
	26 〃	〃	0.02	〃		10 〃	〃	0	〃
	27 〃	〃	0	〃		11 〃	〃	0.5	〃

2e TIJDVAK.

Vergelijking der waterstanden onder A.P. tijdens het begin en het einde.

		1867.	1873.
	22 Mei	4.83	4.86
	23 〃	4.83	4.85
	24 〃	4.83	4.82
	25 〃	4.82	4.83
Begin en einde van het tijdvak	26 〃	4.83	4.83
	27 〃	4.81	4.82
	28 〃	4.81	4.81
	29 〃	4.82	4.82
	30 〃	4.82	4.82
	31 〃	4.82	4.82
	1 Junij	4.83	4.81
	2 〃	4.83	4.80

Gedurende bovenstaande dagen werd in geen der jaren gepompt noch water ingelaten.

De vergelijking van den gevallen regen gedurende die dagen is uitgedrukt in m.M. als volgt:

			1867.	1873.
	22	Mei	0.01	0.62
	23	〃	0.92	5.42
	24	〃	0.82	0.15
	25	〃	0	0
Begin en einde van het tijdvak	26	〃	0.1	0
	27	〃	0.33	2.93
	28	〃	0.05	0.61
	29	〃	0	0
	30	〃	0	1
	31	〃	0.03	2.65
	1	Junij	0	2.40
	2	〃	0	0

Men ziet uit het bovenstaande. dat het begin en einde der beide tijdvakken allergunstigst zijn om met elkander te vergelijken.

Wanneer men nu stelt:

o. gelijk aan de oppervlakte van den Haarlemmermeerpolder in M² uit te drukken.

d. gelijk het aantal dagen van het tijdvak,

r. 〃 aan den gevallen regen gedurende het tijdvak in M.,

v. 〃 〃 de waargenomen verdamping 〃 〃 〃 〃 〃

p. 〃 〃 uitgepompt water in M³ 〃 〃 〃 〃 〃

i. 〃 〃 ingelaten 〃 〃 〃 〃 〃 〃

k. gemiddelde kwel in de 24 uur in M³,

dan heeft men

$$or + i + dk = p + nov$$

$$\text{(a)} \ldots\ldots \text{ of } k = \frac{p + nov - i - or}{d}$$

waarin de coëfficiënt *n* de verhouding aangeeft tusschen de werkelijke verdamping over den geheelen polder en die, welke werd waargenomen.

De grootte van den Haarlemmermeerpolder is 18100 H.A.

(zie zeeweringen en waterschappen in Noordholland van Mr. G. DE VRIES AZ. 1864 *)).

De waarden voor bovenstaande vergelijking worden voor de beide tijdvakken dan als volgt:

1e Tijdvak.

$o =$ 181000000 M²
$d =$ 2205 dagen
$r =$ 4.3461575 M.
$v =$ 4.9992125 M. †)

$$p = \left\{ \begin{array}{l} 24374133 \times 4.9 \\ 27038281 \times 6.5 \\ 30551023 \times 6.5 \end{array} \right\} \text{ of } 493763727 \text{ M}^3 \text{ §)}$$

$i =$ 22830516 M³ **).

2e Tijdvak.

$o =$ 181000000 M²
$d' =$ 2192 dagen.
$r' =$ 4.9720375 M.
$v' =$ 4.8404 M.

---

*) De heer STIELTJES rekent de grootte van den Haarlemmermeerpolder op 18150 H.A. Zie *Mededeelingen* der Kon. Akademie van wetenschappen. Afd. Natuurkunde, 8e deel, 3e stuk, bladz. 310. Ik heb mij aan de meting van het kadaster gehouden en dat te meer, daar het buitenste gedeelte van den ringdijk zeker niet in den polder uitwatert. De ringdijk heeft eene lengte van 60000 M. hetgeen bij eene buitenbreedte gerekend op 8 M. eene oppervlakte van 48 of nabij 50 H.A. geeft.

†) Door het nemen van gemiddelden uit vier plaatsen van waarnemingen verkrijgt men decimalen tot tienduizendsten van een m.M., die hier niet mogten verwaarloosd worden.

§) Het stoomwerktuig de Leeghwater geeft per pompslag 4.9 M³ water de Cruquius en Lijnden evenzoo 6.5 M³, verder zijn de voorgaande getallen de som der producten van het aantal slagen en der pompen, die gedurende het tijdvak zijn in werking geweest.

**) Het ingelaten water aan de stoomgebouwen de Leeghwater en Lijnden door de openingen in den stortvloer kan worden berekend, daar de grootte der openingen bekend is en de tijd van inlating, alsmede de drukhoogten zijn aangeteekend.

$$p' = \left\{ \begin{array}{l} 24485961 \times 4.9 \\ 32783061 \times 6.5 \\ 35591072 \times 6.5 \end{array} \right\} \text{ of } 564413073 \text{ M}^3.$$

$$i' = \quad 19318723 \text{ M}^3.$$

De vergelijkingen worden dus:

1_e tijdvak:

$$k = \frac{493763727 + n \times 181 \times 4999212.5 - 2283051 6 - 181 \times 4346157.5}{2205}$$

(*b*) of $k = 410366\, n - 143184.$

2e tijdvak:

$$k' = \frac{564413073 + n' \times 18100 \times 48404 - 19318723 - 181 \times 4972037.5}{2192}$$

(*c*) of $k' = 399686\, n' - 161881.$

Stelt men in de vergelijkingen b en c de coëfficiënten n en n' gelijk aan 1, dan worden:

$$k = 267182 \text{ M}^3$$
$$k' = 237805 \text{ M}^3.$$

De meerdere kwel per dag in het 1e tijdvak laat zich intusschen uit de omstandigheden niet verklaren. De regen toch is slechts 4.346 M. geweest bij 4.972 M. gedurende het 2e tijdvak of 1.97 tegen 2.26 m. M. per etmaal. Alzoo bestaat hier eerder aanleiding, dat er in het 2e tijdvak meer water van de duinen en hooge gronden als kwelwater in den polder zoude zijn afgevloeid.

De gemiddelde waterstand van Rijnlandsch boezem om den polder is gedurende het 1e tijdvak ook iets lager geweest dan in het 2e tijdvak als blijkt uit de volgende opgave:

	1e tijdvak.		2e tijdvak.	
aan de Leeghwater.	0.536	÷ A.P.	0.508	÷ A.P.
〃 〃 Cruquius.	0.551	〃	0.528	〃
〃 〃 Lijnden	0.554	〃	0.507	〃
	1.641		1.543	
of gemiddeld . . .	0.547	÷ A.P.	0.514	÷ A.P.
De gemiddelde stand in den polder is daarentegen geweest.	4.829	〃	4.950	〃

Daar nu de kwel bij verschil in drukhoogte tot elkander staat als de vierkantswortel der hoogten, en die drukhoogte moeijelijk minder is te stellen dan het verschil tusschen binnen- en buitenwater, zoo komt men tot het besluit, dat de kwel in het 1e tijdvak minder is geweest dan in het 2e, als:

$$\sqrt{4.829-0.547} : \sqrt{4.950-0.514} = \sqrt{4.282} : \sqrt{4.436}$$

of als: 2.07 : 2.11.

Ook hieruit laat zich de meerdere kwel van nabij 30000 M^3 per dag dus niet verklaren

Eindelijk bestaat er nog een reden die ontegenzeggelijk aanleiding tot meerdere kwel in het 2e tijdvak heeft kunnen geven en wel de belangrijke verdiepingen van vaarten en togten over meer dan 100 K.M. lengte gedurende de twaalf jaren onzer beschouwing, waaraan werd besteed in het eerste tijdvak ongeveer *f* 140000 en in het 2e tijdvak *f* 40000.

Men moet uit bovenstaande alzoo opmaken, dat de waarden van n en n' niet beide gelijk 1 mogen worden gesteld, of wat hetzelfde is, dat de uitdamping over de geheele oppervlakte van den polder niet overeenstemt met de waargenomen verdamping per M^2.

Neemt men n en n' meer dan 1. dan wordt het verschil van de kwel nog grooter en alzoo nog onverklaarbaarder.

Stelt men daarentegen in de vergelijkingen b en c de kwel k en k' aan elkander gelijk, hetgeen over zulke groote tijdvakken als het waarschijnlijkste is aan te nemen, dan verkrijgt men:

$$410366\, n - 143184 = 399686\, n' - 161881.$$

Neemt men hierin n gelijk n' en lost men n op, dan verkrijgt men eene negatieve uitkomst, iets dat onbestaanbaar is, daar er door verdamping geene vermeerdering van water in den polder kan ontstaan

Uit bovenstaande komt men tot het besluit, dat in verschillende tijdvakken de uitdamping in geen gelijke verhouding staat tot de gedurende die tijdvakken waargenomen verdamping.

Deze uitkomst is geheel in overeenstemming met andere waarnemingen uit een wetenschappelijk oogpunt gedaan.

In het leerboek der plantenkunde door ons geacht lid C. A. J. A. OUDEMANS, in 1867 uitgegeven, 2e gedeelte, Phyziologie, bladz. 614 en verder, waarin gehandeld wordt over de hoeveelheid water, die door verschillende planten kan worden uitgewasemd, leest men aan het slot van § 869:

„Uit deze gegevens laat het zich ook gemakkelijk begrijpen, „dat de uitwaseming der bladen en de verdamping van een „daaraan overeenkomstig waterniveau, onmogelijk door dezelfde „uitwendige omstandigheden gelijkelijk kunnen rijzen en dalen".

Ten overvloede behoeft men de waarnemingen in de bijlage vermeld, slechts na te gaan om deze stelling op de overtuigendste wijze bevestigd te zien, terwijl die bijlage daarenboven nog aantoont, dat de verdamping van even groote oppervlakten water gelijk of boven den beganen grond geplaatst, zelfs in geene vaste verhouding tot elkander staan.

Zonder nu de coëfficiënten n en n' met juistheid te kunnen bepalen, zoo geven de vergelijkingen b en c toch daarvoor een minimum grens aan, door het stellen van k en k' gelijk 0. Men verkrijgt als dan

$$n = 0.348$$
$$n' = 0.405.$$

Bestond er dus in den Haarlemmermeerpolder geen of nagenoeg geen kwel, dan zou de uitdamping over de geheele oppervlakte tusschen $^1/_3$ en $^2/_5$ der waargenomen verdamping hebben bedragen. Daar er intusschen blijkens het voorgaande een belangrijke kwel bestaat zijn de coëfficiënten der verdamping hier blijkbaar grooter geweest..

Was er geen verdamping, dan zou men bij de vele waarnemingen, die in den Haarlemmermeerpolder worden gedaan, al vrij juist de hoeveelheid water door kwel aangevoerd kunnen bepalen. Dit heeft mij er toe geleid gedurende de drie wintermaanden: December, Januarij en Februarij een tijdvak te zoeken, waarin het niet regende en er niet werd gemalen, om daaruit op te maken met hoeveel water de boezem werd bezwaard. Onder de zeer weinige weken, dat er in de wintermaanden van 1861—1873 niet werd gemalen, biedt zich

alleen de week van 9—16 Januarij 1864 aan, die mij geschikt toescheen daaromtrent eenig licht te kunnen geven.

Er viel gedurende die week slechts 0.3 m.M. regen, de vorige tien dagen evenzoo slechts 0.4 m.M.

Toezakkend water uit den niet door regen bezwaarden grond kan dus bij een rijzenden boezem slechts luttel zijn geweest en evenzoo was bij een vochtigen bodem, zooals men dien in den winter heeft, uitslurpen van vocht uit den boezem niet te verwachten.

De verdamping gedurende die week waargenomen bedroeg slechts 3.25 m.M. of 0.46 m.M. per dag.

De temperatuur was meestal vriezende.

De boezem groot 826 H.A. klom gedurende die 7 dagen van 4.81 tot 4.78 M. onder A.P., alzoo 3 c.M. overeenkomende met 247800 M³ of 35400 M³ *) per etmaal.

De kwel toont dus gedurende die dagen minstens 40000 M³ per etmaal te hebben bedragen, daar er toch ook eenig water in den grond moet zijn gedrongen.

Stelle men nu deze waarde voor k en k' in de vergelijkingen b en c dan verkrijgt men voor:

$$n = 0.446$$
$$n' = 0.505.$$

Men zou hieruit kunnen opmaken, dat voor den Haarlemmermeerpolder de coëfficiënt n niet lager dan nabij 0 5 moet genomen worden.

Wanneer men n gelijk 1 stelt, zooals men bij beschouwingen over het waterbezwaar der polders gewoonlijk doet, dan mag men voor de kwel van den Haarlemmermeerpolder over de behandelde twaalf jaar ook niet minder nemen dan:

$$(d). \ldots\ldots \frac{k + k'}{2} = \frac{267182 + 237805}{2} = 252493 \text{ M}^3.$$

*) Blijkens de reeds vroeger aangehaalde mededeeling van den heer STIELTJES zou de boezem bij een stand van 4.80 M. onder A.P. niet 826 H.A. maar slechts 650 H.A bedragen in welk geval de kwel slechts 27857 M³ zoude zijn.

De hoeveelheid water, waarop de kwel blijkens den aanvang van dit opstel door verschillende personen en commissiën werd geschat, bedraagt tot M^3 per etmaal herleid.

Jonkheer GEVERS VAN ENDEGEEST	169522 M^3	overeenstemmende met	$n = 0.762$, $n' = 0.829$
VAN EGMOND . .	336666 〃	〃 〃	$n = 1.169$, $n' = 1.247$
De Commissie van 1858. . .	80867 〃	〃 〃	$n = 0.546$, $n' = 0.607$
De Commissie van 1868. . .	67000 〃	〃 〃	$n = 0.512$, $n' = 0.572$

Met het oog op de verhooging van den boezem van den 9den tot den 16den Januarij 1864, hierboven besproken, komt mij een kwel van 252493 M^3 sub *d* gevonden, als overdreven voor, en geloof ik, dat hoeveelheden als door de Commissiën van 1858 of 1868 zijn opgegeven, de waarheid meer nabij zullen komen.

Ten slotte moet ik er op wijzen, dat zoo de laatste veronderstelling waar is, het voorzigtiger zal zijn bij berekening van waterbezwaar de uitdamping op het 0.5 à 0.6 gedeelte der waargenomen verdamping, zoolas die in den Haarlemmermeerpolder geschiedt, te stellen, dan daarvoor het geheele bedrag te nemen, zooals tot heden steeds plaats vond.

Haarlem, Junij 1877.

BIJLAGE.

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPINGEN GEDAAN TE HELDER.

1869.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde.	Gras.	
	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	16.3	12.1	11.5	10.6	8.8	8.8	30.6	
Februarij.	49.3	22.4	19.2	17.6	17.9	17.1	56.0	
Maart. . . .	55.2	37.3	37.1	34.1	29.4	34.7	92.7	
April. . . .	83.8	56.1	60.4	47.8	38.4	53.6	108.9	Gras 1.8 maal meer dan water.
Mei.	104.8	73.7	79.5	58.1	51.5	83.8	229.5	
Junij. . . .	101.6	75.5	77.4	63.2	50.4	90.1	284.3	Gras 3.6 maal meer dan water.
Julij	120.7	98.7	97.5	65.8	53.8	101.0	318.3	
Augustus.	97.1	64.7	72.7	60.9	45.0	78.0	144.9	
September	94.1	50.0	65.0	52.4	41.2	67.5	219.4	
October. .	47.0	28.7	33.7	37.1	32.6	40.0	120.0	
November	32.9	15.7	22.8	21.6	18.7	25.3	64.3	
December	21.2	12.2	13.7	13.5	9.8	17.1	42.5	

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1870.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde.	Gras.	
	m.M	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	20.8	14.0	17.3	13.2	11.6	15.2	46.2	Gras 2.6 maal meer dan water.
Februarij.	15.6	15.2	15.5	11.4	9.3	13.7	32.1	
Maart . . .	31.7	26.9	23.5	21.8	17.4	29.0	66.4	
April	76.1	59.4	48.5	39.8	23.9	65.3	139.0	
Mei.	102.0	79.7	68.4	41.7	33.9	88.5	206.7	
Junij. . . .	98.5	81.6	76.7	41.0	33.6	90.2	103.8	
Julij	107.5	86.4	79.8	59.2	39.5	91.8	159.9	
Augustus.	95.4	61.9	72.5	65.3	45.3	87.7	168.6	
September	69.7	47.2	49.8	43.6	25.5	68.4	143.0	
October. .	43.2	30.7	31.5	25.9	16.9	36.6	62.2	
November	23.1	17.1	18.6	16.4	10.4	21.7	29.1	
December.	13.9	11.9	12.0	10.8	7.5	15.6	18.6	

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1871.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde.	Gras.	
	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	12.9	12.9	12.9	11.8	8.4	16.1	20.4	Water op den grond evenveel verdampt als 2.30 M daarboven.
Februarij .	16.0	15.7	13.3	13.4	10.0	15.8	20.8	
Maart . . .	50.4	34.5	32.4	32.5	22.1	41 8	60.8	
April. . . .	51.5	33.2	32.8	33.3	23.5	46.8	68.7	
Mei.	101.1	77.7	72.0	65.2	46.3	87.1	186.5	
Junij. . . .	103.6	79.4	71.5	50.8	44.1	83.0	250.2	Gras 3.5 maal meer dan water.
Julij. . . .	130.8	91.3	85.7	71.0	54.2	103.1	228.7	
Augustus.	128.5	95.4	88.5	53.9	46.4	99.9	265.6	
September.	75.3	52.1	48.3	39.0	26.9	60.3	169.3	Gras 3.5 maal mee dan water.
October. .	27.6	18.7	16.9	16.5	12.8	27.9	50.2	
November.	23.3	19.8	16.9	16.7	12.5	22.5	34.2	
December.	19.7	19.2	17.1	15.8	12.0	21.8	25.9	Gras 1.5 maal meer dan water.

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1872.	Op den M² water.		Op 1/10 M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde.	Gras.	
	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	22.8	20.3	16.7	15.1	11.2	20.3	23.4	Gras 1.4 maal meer dan water.
Februarij.	21.0	16.6	14.5	13.8	10.6	17.9	23.6	
Maart. . .	44.5	34.8	29. 0	26.2	20.9	38.0	46.5	
April. . . .	71.5	52.8	42.8	33.4	25.3	55.8	101.5	
Mei.	99.9	71.8	59.6	35.4	33.4	76.7	196.7	
Junij. . . .	124.4	95.8	74.3	50.8	43.7	90.2	260.0	
Julij	147.0	112.4	38.6	60.7	51.7	114.1	313.5	
Augustus.	109.0	75.7	62.4	48.3	42.6	74.5	236.1	
September.	92.2	57.0	55.1	38.2	34.7	63.9	212.3	
October. .	40.9	22.7	19.8	17.5	16.7	26.0	104.4	Gras 5.2 maal meer dan water.
November.	35.2	20.1	16.6	15.5	12.9	23.9	55.6	
December.	23.1	15.6	13.7	12.8	10.5	20.4	33.9	

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1873.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde.	Gras.	
	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	29.3	19.3	18.8	16.5	12.5	23.9	36.3	
Februarij.	19.7	14.9	14.2	11.0	8.4	17.0	23.4	
Maart . . .	59.9	33.5	27.6	25.1	19.4	35.3	57.5	
April	71.2	52.4	51.5	33.9	24.1	61.6	76.4	
Mei	88.6	66.2	60.5	41.2	35.1	73.9	94.4	
Junij	116.2	90.0	75.8	49.6	42.7	89.8	157.9	
Julij	143.0	106.2	96.8	54.9	47.4	105.7	228.8	Gras 2.3 maal meer dan water.
Augustus.	104.1	78.4	72.0	47.8	38.5	76.1	163.1	
September.	81.2	52.1	59.1	41.8	34.1	67.3	95.3	
October. .	41.4	27.3	29.0	23.0	18.6	34.9	52.7	
November.	23.8	16.3	17.4	14.3	11.3	21.3	30.1	
December.	17.4	11.8	11.8	11.4	7.6	16.5	21.5	

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1874.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde.	Gras.	
	m M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	21.9	16.3	13.9	12.8	8.3	18.8	25.0	
Februarij .	20.5	14.0	14.8	13.0	9.5	19.2	26.0	
Maart . . .	42.4	28.2	30.1	23.3	16.6	32.4	42.5	
April. . . .	83.0	58.7	61.5	43.4	31.6	58.5	89.7	
Mei	108.8	78.8	75.4	58.6	42.6	79.4	147.9	
Junij . . .	125.9	95.3	81.6	59.8	49.0	94.2	229.9	
Julij. . . .	147.4	115.6	91.4	71.5	58.6	107.4	256.1	
Augustus.	129.5	83.6	90.7	69.8	51.5	93.9	211.5	
September.	71.9	42.0	50.0	37.2	29.3	53.6	117.1	
October. .	54.8	29.4	34.6	28.8	22.0	45.4	86.9	
November.	20.4	15.0	51.1	12.8	9.5	19.4	28.5	
December.	11.2	16.9	16.8	15.2	10.8	20.5	27.7	Water op den grond meer verdampt dan 2.30 M daarboven.

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1875.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde.	Gras.	
	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	20.1	16.0	14.4	13.9	9.9	19.4	25.8	
Februarij.	21.2	19.4	18.7	15.2	11.7	20.1	26.1	
Maart . . .	38.1	29.0	28.6	21.2	17.8	29.2	52.2	
April . . .	66.9	48.3	48.5	33.6	24.8	46.4	74.8	
Mei . . .	113.7	85.5	81.1	62.0	42.3	85.1	144.3	
Junij . . .	135.5	105.7	87.5	66.5	47.7	97.4	184.6	
Julij. . . .	132.0	105.7	94.0	71.2	56.4	100.1	185.9	
Augustus.	106.5	75.3	75.8	53.5	41.3	74.9	172.7	Gras 2.3 maal meer dan water.
September	86.7	59.6	59.2	40.5	32.9	60.2	121.2	
October. .	38.9	25.1	26.9	20.4	17.1	30.1	49.9	
November.	23.5	19.6	19.7	16.9	12.8	21.9	30.3	
December.	11.6	10.2	10.6	9.5	6.8	12.0	15.5	

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1876.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde	Gras.	
	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	12.0	11.4	11.2	10.2	7.1	12.7	15.3	
Februarij.	18.0	15.4	13.6	12.5	9.1	16.5	21.2	
Maart . . .	56.9	36.5	37.7	31.4	24.5	44.6	57.4	
April. , . .	70.0	49.5	49.9	43.8	33.7	61.2	82.2	
Mei.	120.6	96.7	93.5	68.6	52.0	101.6	134.7	
Junij. . . .	132.4	108.0	97.1	81.6	57.6	111.8	175.2	
Julij	126.0	97.2	87.7	72.8	51.4	106.6	191.5	
Augustus	119.1	89.3	83.5	65.9	49.5	96.7	169.2	
September.	55.5	36.3	38.9	34.3	27.8	49.5	66.2	
October . .	47.8	31.9	30.0	30.3	21.3	43.2	67.9	Gras 2.2 maal meer dan water.
November.	22.1	17.2	17.4	16.5	12.2	22.8	29.1	
December.	16.2	13.2	13.5	13.2	9.7	17.1	20.8	

DE ZIEKTE DER KINA-PLANT

OP

JAVA.

DOOR

K. W. VAN GORKUM.

In het verslag over de kinakultuur op Java, over het jaar 1868, moest o. a. als volgt, worden bericht: —

„De uitkomsten zijn in het afgeloopen jaar beneden de verwachting gebleven, eensdeels ten gevolge van eene ziekte die, in sommige plantsoenen, duizenden planten aantastte en hare ontwikkeling belemmerde.

Die ziekte is nog niet geheel verdwenen, evenmin verklaard. Hare oorzaken zijn ten eenenmale onbekend gebleven. Zij openbaarde zich reeds in den aanvang des jaars en ook de Heeren TEIJSMANN en SCHEFFER hadden, in de maand Maart, gelegenheid haar waar te nemen.

Vooral de Calisaja's worden aangetast, en men zoude kunnen vermoeden, dat de kwaal haren oorsprong heeft in het gehalte der zaden, maar zoowel de uit Amerikaansche- als uit Java-zaden en stekken opgekweekte planten vertoonen het ziekelijk verschijnsel, terwijl daarentegen niet alle planten van gelijken oorsprong zijn aangedaan.

Zieke planten worden op alle établissementen onder de meest onderscheiden omstandigheden aangetroffen, naast gezonde individuen, die onder dezelfde voorwaarden heeten te groeien.

Er bestaat dus nog geen recht, om op bepaalde invloeden te kunnen wijzen, en zoo blijft het geheel volkomen duister.

Dr SCHEFFER meent eitjes bespeurd te hebben en denkt dus

WAARNEMINGEN VAN UITDAMPING GEDAAN TE HELDER.

1876.	Op den M² water.		Op $^1/_{10}$ M² ter hoogte van 0.40 M boven den beganen grond.					AANMERKINGEN.
	2.30 M boven den grond.	gelijk met den grond.	Water.	Klei.	Zand.	Teel-aarde	Gras.	
	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	m.M.	
Januarij. .	12.0	11.4	11.2	10.2	7.1	12.7	15.3	
Februarij.	18.0	15.4	15.6	12.5	9.1	16.5	21.2	
Maart . . .	56.9	36.5	37.7	31.4	24.5	44.6	57.4	
April. , . .	70.0	49.5	49.9	43.8	33.7	61.2	82.2	
Mei.	120.6	96.7	93.5	68.6	52.0	101.6	134.7	
Junij. . . .	132.4	108.0	97.1	81.6	57.6	111.8	175.2	
Julij	126.0	97.2	87.7	72.8	51.4	106.6	191.5	
Augustus	119.1	89.3	83.5	65.9	49.5	96.7	169.2	
September.	55.5	36.3	38.9	34.3	27.8	49.5	66.2	
October . .	47.8	31.9	30.0	30.3	21.3	43.2	67.9	Gras 2.2 maal meer dan water.
November.	22.1	17.2	17.4	16.5	12.2	22.8	29.1	
December.	16.2	13.2	13.5	13.2	9.7	17.1	20.8	

DE ZIEKTE DER KINA-PLANT

OP

JAVA.

DOOR

K. W. VAN GORKUM.

In het verslag over de kinakultuur op Java, over het jaar 1868, moest o. a. als volgt, worden bericht: —

„De uitkomsten zijn in het afgeloopen jaar beneden de verwachting gebleven, eensdeels ten gevolge van eene ziekte die, in sommige plantsoenen, duizenden planten aantastte en hare ontwikkeling belemmerde.

Die ziekte is nog niet geheel verdwenen, evenmin verklaard. Hare oorzaken zijn ten eenenmale onbekend gebleven. Zij openbaarde zich reeds in den aanvang des jaars en ook de Heeren TEIJSMANN en SCHEFFER hadden, in de maand Maart, gelegenheid haar waar te nemen.

Vooral de Calisaja's worden aangetast, en men zoude kunnen vermoeden, dat de kwaal haren oorsprong heeft in het gehalte der zaden, maar zoowel de uit Amerikaansche- als uit Java-zaden en stekken opgekweekte planten vertoonen het ziekelijk verschijnsel, terwijl daarentegen niet alle planten van gelijken oorsprong zijn aangedaan.

Zieke planten worden op alle établissementen onder de meest onderscheiden omstandigheden aangetroffen, naast gezonde individuen, die onder dezelfde voorwaarden heeten te groeien.

Er bestaat dus nog geen recht, om op bepaalde invloeden te kunnen wijzen, en zoo blijft het geheel volkomen duister.

Dr SCHEFFER meent eitjes bespeurd te hebben en denkt dus

aan een insektensteek. Wonderlijk is het dan echter, dat er geen geregelde orde in de werking dier insekten is op te sporen. Ook zijn tot nu toe noch de insekten zelven, noch hunne larven opgemerkt.

De verschijnselen beginnen aan het blad. Er heeft eene ziekelijke vermeerdering van cel-weefsel op enkele punten plaats, de epidermis wordt er dikker. Is die ziekelijke zwelling volgroeid, dan verkurkt de bovenste laag en wordt de groei van het blad plaatselijk belemmerd. Het omliggend parenchym blijft doorgroeien en geeft aan het blad zijn gekruld voorkomen. Zoo zien de zieke bladeren er gekruld en van roestige, later doorbrekende knobbels voorzien, uit.

De ziekte schrijdt voort tot de jeugdige toppen der planten, en deze gelijken dan als afgestorven en volmaakt verkurkt. Breekt men ze echter af, dan blijken zij inwendig nog frisch en groen te zijn.

Intusschen zijn slechts weinige planten onder deze aandoening bezweken; de meesten begonnen bij het invallen der regens, weder krachtig uit te loopen en nieuwe bladeren en toppen te vormen. Zij zijn nu in ontwikkeling ten achteren, en zullen waarschijnlijk niet meer tot fraaie, krachtige boomen opgroeien.

De ziekte die voortdurend met aandacht wordt waargenomen; die steeds minder wordt, maar zich nog altijd hier en daar vertoont, blijft dus onverklaard, en veroorzaakt minder dadelijke verliezen dan wel vertraging en teleurstelling."

In het volgende jaarverslag, — 1869 — moest ik schrijven:

„Bestaat er alzoo in het algemeen reden tot tevredenheid, te meer moet het worden betreurd er niet kan worden bericht, dat de in het vorige rapport beschreven ziekte thans als geweken is te beschouwen. Voortgezette waarnemingen doen echter met groote waarschijnlijkheid vermoeden, dat de verschijnselen die wij voor eene eigenaardige ziekte der planten hielden, veeleer te wijten zijn aan de werking van insekten die, even menigvuldig als verscheiden, slechts zeldzaam en moeielijk op te sporen zijn, omdat zij of microscopisch klein zijn, of wel, bij voorkeur des nachts en des avonds arbeidende, zich eerst naderhand in hunnen schadelijken invloed openbaren.

Indien de natuur zelve tegenover deze insekten geen vijanden stelt, dan is het te vreezen, dat de middelen ter hunner overwinning ons zullen blijven ontbreken, ook zelfs wanneer wij tot de kennis van hunne soort en huishouding mochten naderen.

Bij voorkeur schijnen deze vernielallen zich tot de Calisaja- en Pahudiana-planten te bepalen. Aan de Succirubra's, Lancifolia's, Hasskarliana's en Miacantha's werd hun invloed tot heden, nog slechts bij uitzondering bespeurd, en waar die onderscheiden kinasoorten in elkanders onmiddellijke nabijheid groeien, worden eerstgenoemden dikwijls sterk aangetast, terwijl de laatsten, zoomede de C. officinalis, gespaard blijven.

Zijn de planten tot zekere ontwikkeling gekomen, dan ervaren zij minder schade, en wordt deze in den regel spoedig hersteld. Ontmoedigend zijn daarentegen de verschijnselen in zeer jong plantsoen. Planten, die 's avonds geheel frisch voorkwamen, bleken den volgenden morgen sterk aangetast. De bladeren zien er als verbrand en verdord, bedekt met bruine stippen, vlekken en opgeblazen holten uit, terwijl de jeugdige toppen van stam en takjes verkurkt en afgestorven schijnen, maar inwendig altijd nog groen, frisch en saprijk blijken.

Van deze ware ramp heeft het eertijds zoo voorspoedige établissement Tjinieroean, op het Malawar-gebergte, vooral te lijden. Een uitgestrekt plantsoen, meer dan 30000 Calisaja-planten bevattende, — aanplant 1866 en 1867, is er, ruim anderhalf jaar, onafgebroken aangetast en zonder ontwikkeling gebleven.

Alles is beproefd om die planten te restaureeren. De schijnbaar doode extremiteiten zijn weggesneden, om nieuwe uitbottingen te bevorderen, maar ook deze uitspruitsels bleven niet lang vrij.

Niet gunstiger waren de resultaten der verwijdering en verbranding van de ziekelijke bladeren, en het verdient nu ernstige overweging om, bijaldien de verschijnselen niet wijken, de sterkst aangetaste plantsoenen tegen den volgenden regentijd eenvoudig te vernietigen en de gronden op nieuw, maar dan met andere kinasoorten te beplanten. Al mochten de planten zich ook kunnen herstellen, een nieuw plantsoen dat ongestoord ontwikkelt, zal ons spoediger tot een tijd van exploitatie bren-

gen, en er bestaat geen reden, om de kwaal te wijten aan de soort, situatie of bewerking van den grond, daar in hetzelfde plantsoen, oudere rijen uit stekken gekweekte Calisaja-boompjes voorkomen, wier ontwikkeling tot heden zeer voldoende mag heeten.

Overigens treft men die verschijnselen onder alle omstandigheden en op verschillende plaatsen aan, hetzij onder schaduw, of in het volle licht, al of niet beschut tegen winden, op schrale en op vette gronden.

Schijnen dus de locale omstandigheden niet van invloed te zijn, evenmin mogen wij dezen toeschrijven aan den oorsprong of de behandeling der zaden. De kweeking geschiedt overal op dezelfde wijze met de meeste zorg, en toch zijn planten van gelijke afkomst, op dezelfde of verschillende plaatsen, niet aan dezelfde verschijnselen onderworpen. Het is juist die onregelmatigheid, dat onopgemerkt blijven van vaste wetten, waardoor wij in het duister tasten en gedurig met ons zelven in strijd komen.

Het verdient voorts opmerking, dat onderwerpelijk, de uit Boliviaansche zaden te Tjinieroean gekweekte Calisaja's, — de later zoo beroemd geworden C. C. Ledgeriana, — in het begin van 1868 het eerst onze aandacht trokken. (Zij werden in November en December 1866 in den vollen grond gebracht). Aanvankelijk groeiden die planten prachtig, maar eenmaal aangetast, bleven zij meer dan een jaar ten achteren en zagen zij er allertreurigst uit. Eerst in het laatst van 1869 begonnen zij zich te herstellen, door nieuwe toppen en takken te vormen, waaraan zich, zelfs nu nog, sporen van oorspronkelijke of wederkeerende ziekte vertoonen.

Men vindt dezelfde plantensoort, — er zijn van Ledger's zaden omstreeks 20000 plantjes gewonnen, waarvan echter niet meer dan ruim 12000, naar schatting, tot flinke boomen ontwikkelden, — op alle etablissementen, en op de meesten dezer ook meer of min beschadigd, doch te Rioengoenoeng, op het Tiloe-gebergte, ontwikkelde zij zonder stoornis, en treft zij het oog door ongemeen regelmatigen, snellen en weelderigen groei. (In 1874, dus op 8-jarigen leeftijd, hielden de Ledgeriana's te Rioengoenoeng dooréén 4 kilogrammen drogen bast, terwijl van

die te Tjinieroean niet meer dan 1 kilo mocht verwacht worden. Intusschen blijkt het een geluk te zijn geweest, dat de zieke plantsoenen niet werden vernietigd, want ook te Tjinieroean, zijn de Ledgeriana's prachtig bijgekomen, hebben zij reeds eene aanzienlijke waarde geproduceerd en millioenen zaden van superieure hoedanigheid geleverd).

Men heeft dus geen grond tot het vermoeden, hoè waarschijnlijk in den aanvang ook, dat de kiem van het kwaad, met de zaden van Ledger, uit Amerika werd ingevoerd; nauwgezet onderzoek heeft daarenboven bewezen, dat de ongunstige verschijnselen die wij eigenaardig bij de kina dachten, in geenen deele vreemd zijn bij vele inheemsche kultuur-gewassen. Zeer sterk worden zij opgemerkt bij de mangga-boomen (mangifera) en veelvuldig zijn zij ook in de z. g. wildhout-aanplantingen bespeurd.

Of nu insekten alleen de schuld dragen, en welke soort of soorten dan het meest te vreezen zijn, durf ik niet beweren, maar de vrees kan niet worden onderdrukt, dat het eenmaal blijken zal, dat de familie der Bladluizen (Aphides) onze ernstige bestrijding verdient. Langen tijd bleven zij onopgemerkt, omdat zij, door hunne kleur en innige vasthechting aan de plantendeelen, het ongewapend oog bedrogen. Hetzij deze insekten schadelijk werken door de afscheiding van een scherp vocht, of wel door het uitzuigen van plantensappen, zeker is het, dat, waar zij verwijderd werden, de sporen hunner zitplaats duidelijk bleven.

Van kalk- en tabakwater schijnen zij een grooten afkeer te hebben, maar hun aantal en verspreiding maken deze wapenen, practisch, onbruikbaar. Daar de Aphidii onder de insekten groote en vele vijanden tellen, zoo is het niet onwaarschijnlijk, dat de natuur zelve eenmaal het evenwicht zal herstellen."

In het verslag over 1870 werd aangeteekend: —

De wind blijft de kinaplanten het meest vijandig, maar ook de ziekte die in de beide voorgaande rapporten uitvoerig is besproken, heerscht voort en schaadt op groote schaal, hetzij zij de ontwikkeling vertraagt, of wel een geheel plantsoen tijdelijk ontsiert en terugzet. Intusschen wordt zij meer en meer ook op onderscheiden inheemsche gewassen waargenomen.

Zij doodt in den regel wel niet, maar zij schaadt altijd, hier langer, daar korter, de ontwikkeling der planten stremmende".

Het verslag over 1871 meldt het volgende: —

„In het verslag over 1868 werd het eerst gesproken over eene ziekte die, moge zij ook al vroeger geheerscht hebben, zich dan althans niet door in het oogloopende verschijnselen heeft geopenbaard. Sinds 1868 waren deze echter niet te miskennen, en trokken zij meer en meer in die mate de aandacht, dat de ernstigste bezorgdheid eerst plaats maakte voor gedwongen berusting, toen duidelijk bleek, dat de ziekte-verschijnselen niet onvoorwaardelijk den dood der planten veroorzaken, maar deze alleen in fraaie en snelle ontwikkeling storen. Omtrent den aard en oorsprong der ziekte bleven de meeningen, zooals uit de drie vorige verslagen kan blijken, in weêrwil van de onafgebroken voortgezette waarnemingen en onderzoekingen, zoo wankelend, dat in 1870 werd verzocht, om aan eene bevoegde Commissie een lokaalonderzoek op te dragen.

Zoo werden de kinaplantsoenen in de maanden Mei/Juni ll., krachtens een Regeerings-besluit, bezocht door de Heeren TEIJSMANN, SCHEFFER en BERNELOT MOENS.

Deze Heeren nu hebben de voorstelling der kwaal wel wat overdreven genoemd, in zooverre zij de gezonde planten numeriek overwegend rekenden aan de zieke individuën en zij de ziekte voorts ook niet als doodelijk erkenden. Omtrent den oorsprong der ziekte is echter geen afdoende opheldering verschaft, en waren de gevoelens niet onverdeeld.

Terwijl de Heer TEIJSMANN aan den invloed van insekten bleef vasthouden, kwamen de beide andere Heeren, door microscopisch onderzoek, tot de overtuiging, dat de ziekte zelve zich openbaart in eene cryptogamische vegetatie, eene soort van fungus, die oppervlakkig zetelt, daar binnen de plantendeelen geen spoor van mycelium te vinden is.

Waarheid zal wel zijn, dat onderscheiden oorzaken en omstandigheden samenwerken, en de planten niet zonder praedispositie worden aangetast.

De Commissie ried aan, om de zieke plantendeelen weg te snijden, maar die maatregel was sinds lang en zonder voldoenden uitslag beproefd. De eenmaal aangetaste planten vertoonen

de ziekte, nadat de geschonden deelen zijn verwijderd, ook weder aan de nieuwe uitspruitsels.

Geruimen tijd was ook beproefd de ziekte te overwinnen door begieting met een afkooksel van tabak of eene oplossing van zwavel-alkali; maar, dacht men daarbij nu en dan al eens gelukkige uitkomsten te kunnen constateeren, dan zag men niet zelden, ter zelfder tijd, de herstelling van andere individuën, ook zonder die agentia. Bij deze onzekerheid werden de genoemde middelen, die op den duur toch lastig en kostbaar zouden worden, niet verder toegepast.

In de maand Maart was een andere weg ingeslagen. Niet onopgemerkt was gebleven, dat de ziekte op alle gronden en bij alle situatiën, zoo niet als wel voorkomt. De oorzaken alleen in bodem en klimaat te zoeken, ging dus niet aan. Werkten de omstandigheden van buiten, dan moest bij de planten bepaaldelijk eenige praedispositie worden aangenomen, want zieke en gezonde individuën van denzelfden oorsprong komen dooreen en naast elkander voor. De sterkste en het krachtigst ontwikkelde planten worden òf niet, òf slechts voorbijgaand aangetast. De Succirubra's hebben van de ziekte weinig te leiden.

NB. In 1872 werden de Java-Calisaja's op het terrein te Tjinieroean, waar de ziekte het eerst verscheen, in de Ledgeriana's, en het hardnekkigst en schadelijkst bleef voortwoekeren, geoogst. Het terrein werd op nieuw flink bewerkt en nu met Succirubra's beplant. Ook deze zijn spoedig ziek geworden en, tot heden, zeer onooglijk en achterlijk gebleven. De staan gebleven Ledgeriana's hebben zich langzaam, maar voldoende, hersteld en zijn nu tot flinke boomen opgegroeid; terwijl op hetzelfde terrein een paar duizend Hasskarliana's van 1864/65 en eenige honderden Succirubra's van 1867/68 voorkomen, die nooit van de ziekte leden en nu reeds colossale, zware boomen zijn. Zij hebben neiging om tot hoog opgaande boomen te ontwikkelen en zijn in dat streven ook altijd tegemoet gekomen door eene regelmatige snoeiing of sleuning.

De Calisaja's daarentegen, willen in den regel al spoedig heesterachtig worden. Jonge planten vormen alras vele takken, waardoor het karakter van een hoofdstam dreigt verloren te gaan. Zij schieten daardoor om zoo te zeggen uit hare

kracht, en te kort, zoodra zij aan storende invloeden van buiten blootstaan.

Ontwikkelt aan hunne oppervlakte eene zwamvegetatie, dan treedt een strijd om het leven in, en blijken zij veelal onvermogend om te overheerschen. De levenskrachten en sapbeweging zijn niet sterk genoeg, om stammen en takken door de ziekte heen te drijven, zooals werkelijk bij de Succirubra's regel is (volgens aanteekening zoo even gaat die regel niet meer door). Hier ziet men, in weêrwil der ziekte, de toppen doorgroeien en de aangetaste plantendeelen eenvoudig versterven en afvallen. De Succirubra's hebben dan ook een krachtiger stam, en naar verhouding minder takken en bladeren dan de Calisaja's, Hasskarliana's en overige kinasoorten.

Deze en andere waarnemingen leidden tot de meening, dat indien de planten konden versterkt worden, zij de aanvallen der ziekte ook beter zouden doorstaan. Besloten werd nu, om door geregelde, beredeneerde snoeiing, de kultuur te verbeteren, een bedrijf, dat bovendien den habitus der planten zou ten goede komen.

In Maart werd de eerste snoeiing, aanvankelijk slechts een sleunen, begonnen. Het Europeesch personeel gaf het voorbeeld, en werd slechts door een gering getal, uitgezochte arbeiders geholpen. Takken van te groote afmetingen werden met handzaagjes verwijderd; elke zaag- of meswond werd met een scherp mes glad bijgesneden.

Honderdduizenden boompjes zijn op die wijze, in één maand tijds, door betrekkelijk weinig snoeiers, een dertigtal, afgehandeld. De schilbare takken produceerden een paar duizend kilo's drogen bast, die tot poeder gestampt, voor bereiding van Quininen of pharmaçeutisch gebruik, aan den geneeskundigen dienst werd afgeleverd.

De plantsoenen zagen er nu, tijdens het bezoek der hiervoren genoemde Commissie, nog tamelijk schraal uit, maar hadden over het geheel toch een gezonder voorkomen gewonnen.

De heer TEIJSMANN noemde de sleuning hier en daar wel wat ver gedreven, doch konde overigens de zorgvuldige bewerking slechts roemen. Inderdaad waren enkele snoeiers in hunnen ijver ook wat ver gegaan, en er zal eenige tijd vereischt worden,

voordat menige stam zijne verbroken dimensie-verhoudingen heeft hersteld. Maar opmerkelijk is het effect dier sleuning geweest, niet alleen met betrekking tot den gestoorden invloed der ziekte, maar ook ten aanzien der thans betere vormen der boomen. In de maanden Augustus en September werden dezelfde boomen andermaal onder handen genomen, en ditmaal meer bepaald gesnoeid en van hun overtollig hout in de kruinen beroofd.

Gevolgen van het sleunen en snoeien zijn geweest: krachtiger sap-beweging, spoedig herkenbaar aan de vorming van frisch, nieuw blad en het doorschieten van stammen en takken. De frissche krachtige glans der bladeren wijst op een verbeterden toestand, en de ziekte blijkt inderdaad minder vat te hebben, want zij is, zoowel in uitgestrektheid als intensiteit, aanmerkelijk afgenomen.

Een ander gevolg van het snoeien is het veelvuldig ontstaan van uitspruitsels, die weggenomen en onderdrukt moeten worden en dus een onafgebroken, zorgvuldig toezicht eischen. Moest een jaar te voren het door ziekte aangetaste deel onzer plantsoenen op $^3/_4$ van het geheel worden geschat, wij achten ons gelukkig de verhouding thans te kunnen keeren en slechts $^1/_4$ noemenswaard bezocht te ramen, terwijl daarenboven de kwaal zelve minder schadelijken invloed uitoefent.

Duidelijke en strenge voorschriften zijn dan ook gegeven, om het snoeien verder als eene der voornaamste voorwaarden van onderhoud te beschouwen, onafgebroken, zooveel mogelijk, nieuw aangetaste plantendeelen dadelijk te verwijderen en meer zorgen te besteden aan eene tijdige ontginning en bewerking van gronden en het graven van diepe en breede plantkuilen.

Wel is waar mochten die voorschriften slechts herhalingen heeten, maar eene meer stipte opvolging werd in het afgeloopen jaar, door betrekkelijk ruimere beschikking over fondsen, mogelijk gemaakt.

Ook in de Britsch-Indische plantsoenen wordt de hier behandelde ziekte waargenomen en zij daar als eene soort van *kanker* beschouwd. Men zocht er de oorzaken in een vochtigen bodem, doch is daaromtrent ook geenszins eenstemmig.

Een gevoelige slag wordt toegebracht aan de groote indruk-

ken, die wij van de vroegere rapporten uit Britsch-Indië mochten bewaren, als wij de verslagen van den jongsten tijd en de hevige polemiek in de dagbladen, — Britsch-Indische, — lezen. Deze herinnering is overwaardig, de aandacht van onze belangstellende landgenooten, die zich nu en dan waagden aan vergelijkingen, welke niet ten voordeele van Java's onderneming uitvielen, en zelfs bij het Opperbestuur eene noodelooze bezorgdheid wekten."

Verslag over 1872.

„Naast het oordeelkundige onderhoud van den grond, wordt nu ook ongestoord de hand gehouden aan eene redelijke verzorging van de boomen. Het snoeien, — er werd in het vorige jaarbericht reeds op gewezen, — heeft eene allergunstigste uitwerking, en ook het gevaarlijk karakter der meermalen besproken ziekte gebroken. In Britsch-Indië moge men in den laatsten tijd, op grond van ervaringen, tegen het snoeien der kinaboomen waarschuwen, het vermoeden ligt voor de hand, dat de waarschuwing daar gewettigd werd, niet door het beginsel, maar door de minder goede toepassing."

In het verslag over 1873 wordt omtrent de kinaziekte niets vermeld, doch in het bericht over 1874 lezen wij weder: —

„Het blijkt meer en meer, dat het snoeien der kinaplanten onder de eerste voorwaarden eener rationeele kinateelt moet worden geacht, en deze arbeid vereischt te meer aandacht, naardien hij slechts aan geoefende werklieden vertrouwd kan worden."

Verslag over 1875, (opgemaakt door J. C. BERNELOT MOENS).

„Met het snoeien der kinaboomen gaat men voort, en het blijkt steeds, dat daardoor ook de ziekte, die zich nog altijd nu eens in het eene dan weder in het andere plantsoen vertoont, zoodanig wordt beperkt, dat zij slechts weinig blijvende schade aanricht. Zeer kundige thee-planters zijn van oordeel, dat deze ziekte dezelfde is, die in de theeheesters voorkomt (de z. g. roest), en dat de oorzaak zou zijn gelegen in den steek van een tot de orde der Hemipteren behoorend insekt. Het is nog niet gelukt, dit tot zekerheid te brengen."

Tot zooverre nu de officiëele verslagen, waaruit blijken kan,

dat de kina-ziekte, sinds zij het eerst werd opgemerkt, in 1868, onafgebroken en met aandacht en ernst is gevolgd en bestudeerd; dat er gestadig naar gestreefd is, om licht te zoeken en eenzijdige beschouwingen en beoordeelingen te verwijderen.

In 1874 meende de heer MEIJBOOM, thee-planter in het Bandoengsche, een insekt te hebben ontdekt waaraan men den „roest" in den theeheester dacht te kunnen toeschrijven. Gelijktijdig ongeveer kwam men in Bengalen tot soortgelijke verklaring, en werd daar eene brochure uitgegeven waarin men n.l. the flij-bug, — het door MOENS bedoelde insekt — beschreef.

Dr. MEIJBOOM verzekerde mij, dat men het diertje slechts bij avond kan opsporen, en inderdaad werd het nu ook op kinaboomen aangetroffen. Ik liet er naar de natuur eene vergroote afbeelding van maken, en het insekt werd inderdaad herkend als een hemipteer, dat op of achter den kop een verticaal staand hoorntje draagt den vorm van eene speld voorstellende.

In het begin van 1875 werd ik door de Regeering tot eenen anderen, ruimeren werkkring geroepen, en nam J. C. BERNELOT MOENS, die mij sedert Mei 1872 als scheikundige was toegevoegd geweest, het beheer der kinakultuur van mij over.

MOENS heeft ook de kina-ziekte trouw en, zooals dit van hem te verwachten was, met kennis en studie waargenomen. Bij particulier schrijven van 23 Juni ll. deelt hij mij nu het navolgende mede: —

„Van mijn verblijf in de kinaplantsoenen heb ik geprofiteerd, om de quaestie der ziekte uit te maken. Het staat nu volkomen vast, dat de ziekte veroorzaakt wordt, door dezelfde Hemipteer, die den thee-roest veroorzaakt. Ik ken nu het mannetje, het wijfje en het onvolkomen insekt in alle phasen van ontwikkeling. Ook de eitjes die ongeveer deze gedaante hebben, wit van kleur zijn en door het wijfje worden gelegd in de jonge stengels, oude blad-nerven, ook wel buiten op het blad enz. 't Wijfje heeft een leg-angel waarmee het eerst een steek geeft in het weefsel, om er vervolgens het eitje in te laten glijden.

Vooral de ongevleugelden vernielen in korten tijd alle jonge uitloopers; als zij één dag met eene jonge plant alleen worden gelaten, is het blad den volgenden reeds geheel gevlekt, en

begint zich spoedig te krommen. Zij steken met eene scherpe naald die in den zuig-snuit zit onder het weefsel, en schijnen dan den omtrek uit te zuigen.

Ook op de Datura's zitten zij met troepen, en brengen daar volkomen dezelfde verschijnselen teweeg. Kennis is macht, maar ik zie den weg nog niet, om de lieve diertjes kwijt te raken. In een klein tuintje kan men ze nog gedeeltelijk opvangen, en zoo in bedwang houden; maar hoe moet dat in uitgestrekte tuinen?

Snoeien, zonder gelijktijdig verbranden, helpt niets, en men kan niet zoo snoeien dat alle besmette deelen worden weggenomen.

Bovendien komt er dan telkens aanvoer van buiten. Ik zal de Ketjoeboen-, Datura-paggers (heggen) laten opruimen, maar dan zitten zij misschien nog elders.

Het heeft in ieder geval waarde, dat wij nu niet langer in 't onzekere zijn, en de oorzaak op den verkeerden weg zoeken.

Waarom de eene plant wel, de andere niet wordt aangetast? Maar het beest kan maar op één bepaalde plaats zijn eitjes leggen, en de ongevleugelden, — die verreweg de ergste verwoesting aanrichten, — kunnen zich niet van de eene plant naar de andere begeven. Hoe hooger boven zee de aanplant, hoe minder beesten en ik geloof dat men, onder gewone omstandigheden, boven de 5000 voet er geen last van zal hebben, tenzij exceptioneel mild weder de grens der gemiddelde temperatuur, waarbij zij het aangenaam vinden, wat naar boven schuift."

In een heden ontvangen briefje dd. 5 Juli, klaagt MOENS mij, dat de ziekte weder eene ontzettende uitbreiding genomen heeft, en schier al de officinalis-plantsoenen op het Malawar-, en het laagste deel van het Tiloe-gebergte zoo sterk zijn aangedaan, dat er weinig meer van te hopen schijnt.

Ik teeken aan, dat bedoelde plantsoenen voortdurend zeer te lijden hebben gehad, en er dientengevolge al niet weelderig uitzagen.

Het zal er nu in de eerste plaats op aankomen, om het schuldig insekt nauwkeurig gade te slaan in zijne levenswijze en gewoonten.

Is zijne huishouding volkomen aan het licht gebracht, dan maak ik mij wel geen illusiën van een absoluut onschadelijk maken van dit gedierte, doch bestaan de kansen, dat zijn invloed bij tijds getemperd wordt.

Bepaalde dit insekt zijne lusten tot de kinaplanten, het zoude althans mogelijk zijn om het uit de kinatuinen te weren, of wel het daar bij zijne verschijning te verdelgen.

Het diertje is echter, als sinds jaren aangeteekend, minder kieschkeurig, en zoo velen zal men in de kinaplantsoenen niet kunnen vernietigen of zij worden gestadig vervangen door nieuwlingen die van buiten komen, van buiten waar wij volmaakt machteloos zijn om een verdelgingskrijg te aanvaarden en vol te houden.

Daarom zie ik er ook geen heil in, dat MOENS die paggers van Datura, welke ik hier en daar aanlegde, deels om tegen den wind te beschutten, deels als versiering, — opruimt. Het schijnt wel dat de insekten eenige voorkeur geven aan bepaalde plantensoorten, en mochten de Datura's meer in hunnen smaak vallen dan de Cinchona's, zoo wordt, door opruiming der eersten, de intensiteit der kwaal op de laatsten wellicht nog versterkt.

Wij moeten weten, wanneer de eitjes gelegd en uitgebroed worden. Dan zal het wellicht het meest gunstige tijdstip zijn om de plantsoenen nauwkeurig in het oog te houden en naar eene zuivering te streven.

Ik voor mij heb nooit kunnen waarnemen, dat de plaag zich tot vastwederkeerende perioden zoude bepalen, en juist daarin lag eene zoo machtige aanleiding tot ontmoediging, ik zou haast zeggen, wanhoop.

Een merkwaardig feit daartegen is, dat de grenzen der door de ziekte aangetaste plantsoenen dikwerf, — als op het Tiloe-gebergte, — zeer scherp zijn afgeteekend, en als zeker neem ik ook aan: —

1°. dat het insekt bij uitzondering zekere hoogte boven zee overschrijdt (op het Tanghoeban-Prahoe-gebergte is die overschrijding sterk waargenomen).

2°. de onder schaduw groeiende kinaplanten minder lijden van, of wel minder blootstaan aan de werking der insekten, en

3°. de veroordeelde insekten bij voorkeur jonge planten en niet hooge boompjes aantasten, daar de tot zekere hoogte reeds ontwikkelde kinaboomen er geen last of schade meer van ervaren, en ook deze toch altijd voorzien zijn van jonge malsche toppen en bladeren.

Intusschen zal deze betreurenswaardige ziekte der kinaplanten met ongestoorde volharding in het oog gehouden worden, en zullen omtrent de vorderingen onzer waarnemingen en studiën getrouw berichten worden aangeboden.

Batavia, **7 Juli 1877.**

VOORLOOPIG VERSLAG

VAN

DR. VAN RIJCKEVORSEL'S

REIS IN DEN OOST-INDISCHEN ARCHIPEL,

TER BEPALING VAN

MAGNETISCHE CONSTANTEN.

MEDEGEDEELD DOOR

C. H. D. BUYS BALLOT.

„Ik heb in hoofdzaak niets gedaan dan de magnetische waarnemingen, en daarvan absolute bepalingen van Declinatie en horizontale Intensiteit met unifilar-magnetometer, en Inclinatie met den bekenden Dip-circle op honderd tot honderdvijftig plaatsen. Intusschen meen ik, wat de horizontale Intensiteit aangaat, ook eenige resultaten verkregen te hebben aangaande de dagelijksche variatie voor de uren van $6\frac{1}{2}$ tot $11\frac{1}{2}$ des morgens, doch hecht daaraan geen groote waarde."

„Geheel alleen zijnde, heb ik gemeend mij van de noodige plaatsbepalingen te kunnen onthouden. Ik had 1°. de verschillende punten door Dr. OUDEMANS bepaald, 2°. die door ELLIOTT, die in 1847—49 in een deel van den Archipel dergelijke waarnemingen deed. Enkele punten waren officieren der Kon. Ned. of der Gouvernements-marine zoo vriendelijk voor mij te bepalen. Andere bepalingen moest ik van de kaart nemen, en ten slotte stond mij de Regering voor eene reis in de binnenlanden van Palembang een harer ambtenaren als assistent toe, in wiens waarnemingen ik groot vertrouwen stel."

3°. de veroordeelde insekten bij voorkeur jonge planten en niet hooge boompjes aantasten, daar de tot zekere hoogte reeds ontwikkelde kinaboomen er geen last of schade meer van ervaren, en ook deze toch altijd voorzien zijn van jonge malsche toppen en bladeren.

Intusschen zal deze betreurenswaardige ziekte der kinaplanten met ongestoorde volharding in het oog gehouden worden, en zullen omtrent de vorderingen onzer waarnemingen en studiën getrouw berichten worden aangeboden.

Batavia, 7 Juli 1877.

VOORLOOPIG VERSLAG

VAN

DR. VAN RIJCKEVORSEL'S

REIS IN DEN OOST-INDISCHEN ARCHIPEL,

TER BEPALING VAN

MAGNETISCHE CONSTANTEN.

MEDEGEDEELD DOOR

C. H. D. BUYS BALLOT.

„Ik heb in hoofdzaak niets gedaan dan de magnetische waarnemingen, en daarvan absolute bepalingen van Declinatie en horizontale Intensiteit met unifilar-magnetometer, en Inclinatie met den bekenden Dip-circle op honderd tot honderdvijftig plaatsen. Intusschen meen ik, wat de horizontale Intensiteit aangaat, ook eenige resultaten verkregen te hebben aangaande de dagelijksche variatie voor de uren van $6\frac{1}{2}$ tot $11\frac{1}{2}$ des morgens, doch hecht daaraan geen groote waarde."

„Geheel alleen zijnde, heb ik gemeend mij van de noodige plaatsbepalingen te kunnen onthouden. Ik had 1°. de verschillende punten door Dr. OUDEMANS bepaald, 2°. die door ELLIOTT, die in 1847—49 in een deel van den Archipel dergelijke waarnemingen deed. Enkele punten waren officieren der Kon. Ned. of der Gouvernements-marine zoo vriendelijk voor mij te bepalen. Andere bepalingen moest ik van de kaart nemen, en ten slotte stond mij de Regering voor eene reis in de binnenlanden van Palembang een harer ambtenaren als assistent toe, in wiens waarnemingen ik groot vertrouwen stel."

„Na eenigen tijd geobserveerd te hebben, kwam ik tot de navolgende wijze van opnemen: — Ik verdeelde zoo veel mogelijk de punten eenigszins gelijkmatig, hoewel dit in eene moeijelijk te bereizen eilandengroep slecht gaat, en het zal dan ook blijken, dat de westelijke helft des Archipels veel beter bedeeld is, dan de Molukken. Alleen trachtte ik geen al te groote leemte te laten. Dan bleek mij ook weldra de wenschelijkheid om daar, waar veel vulkanen zijn, de punten digter opeen te hoopen, wegens de overgroote locale afwijkingen. De Declinatie heb ik zoo veel mogelijk overal waargenomen, omdat ik, door moeijelijkheden die ik met het instrument had, die voor de zwakste mijner waarnemingen houd, en er bovendien grooten invloed van locale storingen bij verwacht. Het minst deed ik Inclinatie-waarnemingen, omdat ik overtuigd ben, dat daarbij de locale storingen van minder grooten invloed zijn."

„Mijn zwakste punt was zeker de chronometer-gang. Om vele redenen, waaronder gewigtige, deed ik zelf geen tijdsbepalingen, en was dus afhankelijk van die van anderen, die ik steeds hoogst willig bevond. Maar soms liggen zij te ver uit elkander, soms maakte de gebrekkige plaatsbepaling de tijdsbepalingen zwak. Gelukkig is echter door de wijze van waarneming de invloed van de fouten in den waren tijd buitengewoon klein, zoodat ik meen dit bezwaar zeer ligt te kunnen tellen."

„Ik begon met Java overland te bereizen. De Declinatie kon ik toen nog niet observeeren, maar begon daarmede eerst van Soerabaja af; op een 15tal plaatsen deed ik toen Intensiteits- en Inclinatie-waarnemingen, in veel te groot aantal. Later bragt ik dit tot acht, enkele malen deed ik slechts zes waarnemingen van elke soort op elke plaats, op minstens twee verschillende ochtenden. Voor de Declinatie was vier het minimum. De enkele plaatsen waar ik door de reisgelegenheid of door gebrek an zon gedwongen was mij met minder te vergenoegen, of waar ik maar één dag kon blijven, denk ik bij de zamenstelling der plaatsen de uitkomst met half gewigt in rekening te brengen."

„Van Soerabaja uit bezocht ik Bawean, Madura, Java's oosthoek, Bali en Lombok, en deed daarna gedurende 14 maanden twee reizen door de Molukken, Celebes, Timor. De eilanden benoorden Celebes en Ternate liet ik buiten mijne grens, die

nu in tamelijk regte lijn over Ternate, Menado, Sarawak en Poeloe-Pinang loopt. In het oosten strekte ik de waarnemingen tot de Kei- en Aroe eilanden uit. De zuidooosthoek van den Archipel zal zeer zwak zijn. Ik had toch in de Molukken met zeer gebrekkige vervoermiddelen te werken, daar Atjeh alles absorbeerde; had zelf met steeds meer afmattende moeraskoortsen te kampen, en geen goede bedienden. Echter meen ik dat de Residentie Amboina een goede groep is, en Celebes redelijk. In 't geheel bezocht ik oostelijk van Java een 30tal punten, en deed toen nog overal waarnemingen van alle drie de constanten.

Te Soerabaja teruggekeerd, bezocht ik van daar uit Banjermasin, waarvan ik een achttal punten kon opnemen, en deed toen de terugreis naar Batavia nogmaals overland, ditmaal Declinatiewaarnemende, en slechts op enkele punten de andere elementen. Verscheidene malen doorreisde ik Java ook in de breedte, zoodat mijne punten ook daar nog al over het geheele eiland verstrooid liggen."

„Van Batavia uit deed ik eene reis in Bankam en de Lampongs, waarvan ik echter slechts een gedeelte aan de baai van Telok-Betong kon bereizen, — eene tweede reis naar Billiton en de westkust van Borneo, die een tiental punten opleverde. Ik begon toen reeds niet overal al de elementen waar te nemen, maar meest slechts twee van de drie."

„De laatste reis was de vruchtbaarste, tevens vaak de moeijelijkste, hoewel veel aangenamer dan die in de Molukken. Tusschen Benkoelen en Palembang en ten zuiden van laatste plaats kon ik een 20tal punten opnemen; deed toen Muntok en Riouw aan, Sarawah op Borneo en eenige punten tusschen Singapore op Malakka's westkust, en Poeloe Pinang, vanwaar ik naar Atjeh overstak, waar ik op vier punten kon waarnemen."

„Ten slotte reisde ik van Padang overland, rondom het Merapi-massief en van daar N.W. op tot Natal; in het geheel verkreeg ik in het Gouv^t. van Sumatra's Westkust ruim 20 observatie plaatsen. De waarde mijner waarnemingen kan hier iets geleden hebben door de zeer bezwaarlijke toevallige omstandigheden mijner reis, hoewel ik dit niet geloof."

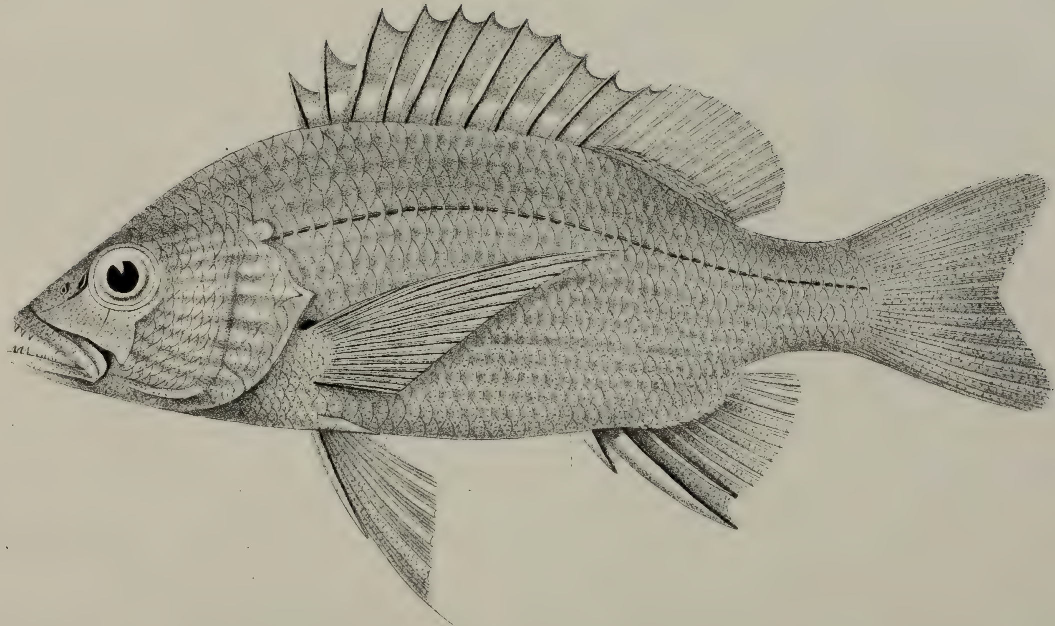
In het geheel is het natuurlijk nog onmogelijk over de waarde

mijner waarnemingen een oordeel te vellen, daar nog zeer weinig daarvan berekend is. Daarvoor had ik op reis geen tijd. Hoeveel tijd met die berekening gemoeid zal zijn, kan ik onmogelijk schatten; zeker niet weinig."

„Reeds hierbij zij het mij geoorloofd er op te wijzen, dat ik steeds van de Regering en al hare dienaren de meest welwillende hulp, in Indië zoo onschatbaar, mogt ondervinden, en dat ik ook op de enkele plaatsen buiten ons gebied die ik aandeed, zeer beleefd werd ontvangen."

Rotterdam, 18 Sept. 1877.

VAN RIJCKEVORSEL.



P. Bleeker, dir. L. Speigler, del. Lith. Emrik & Binger.

NOTICE

SUR LE

SPARUS CUVIERI (CHRYSOPHRYS CUVIERI DAY).

PAR

P. BLEEKER.

(Avec figure).

Dans un article intitulé: „Sur les espèces confondues sous les noms de Chrysophrys hasta, berda, calamara et Schlegeli" *) j'ai émis l'opinion que le Dentex hasta CV, reconnu par M. Day comme un vrai Sparus (Chrysophrys), pourrait bien être identique avec le Sparus Schlegeli Blkr.

M. Day m'ayant invité d'examiner le spécimen de son Chrysophrys Cuvieri (Dentex hasta CV), que, depuis la publication du dit article, il avait présenté au Muséum de Leide, et d'avoir mon opinion sur l'espèce en litige, j'ai comparé cet individu avec celui que je possède du Sparus Schlegeli et qui n'est que presque deux décimètres plus long que le poisson de M. Day.

La comparaison, bien que constatant la grande ressemblance des deux individus, apprend néanmoins qu'ils appartiennent à deux espèces parfaitement distinctes.

Le Chrysophrys Cuvieri de M. Day est nettement caractérisé, comme l'a déjà indiqué M. Day lui-même, par la dentition. Il a les canines plus fortes que le Sparus Schlegeli. Les postérieures ou externes, et non les antérieures, sont les plus longues. Les dents latérales de la rangée externe des deux mâchoires y sont beaucoup plus pointues, et, ce qui est surtout

*) Versl. Kon. Akad. Wet., Afd. Natuurk. 2e Reeks. XI p. 1.

caractéristique pour l'espèce, les dents molaires sont toutes fort petites, peu visibles dans l'adolescence et, par leur petitesse, ne formant qu'une bande fort étroite. C'est cette dentition, inexactement rendue par les auteurs de l'espèce, qui leur aura séduit a y voir un Dentex, mais l'examen un peu exact y fait reconnaître la même disposition et la même nature qu'elle présente dans les Sparus. Les dents diffèrent nullement par la disposition ni par la forme fondamentale, mais seulement par leur force relative, par la forme plus pointue de celles de la rangée latérale externe et par le peu de développement des molaires. Le système dentaire pharyngien est parfaitement semblable à celui du Sparus Schlegeli. C'est donc à juste titre que M. Day a retiré l'espèce du genre Dentex.

Le Sparus Cuvieri se distingue en outre du Sparus Schlegeli par les formules des écailles du tronc. Les rangées transversales y sont moins nombreuses et j'y compte deux rangées longitudinales de moins entre la ligne latérale et les épines dorsales médianes.

Pour faire mieux sentir les différences entre les deux espèces, telles qu'elles s'observent sur des individus de longueur presque égale, je fais suivre ici la description et la figure de l'individu, dont M. Day a doté le Muséum de Leide.

Sparus Cuvieri Blkr, Figur.

Spar. corpore oblongo valde compresso, altitudine $2\frac{2}{3}$ circ. in ejus longitudine absque, $3\frac{1}{3}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis $2\frac{1}{2}$ circ. in ejus altitudine; capite 3 circ. in longitudine corporis absque, $3\frac{3}{4}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali, aeque alto circ. ac longo; latitudine capitis 2 et paulo in ejus longitudine; fronte usque supra mediam pupillam squamata; fascia squamarum temporali parum distincta; linea rostro-dorsali capite rectiuscula nucha convexa; oculis diametro $3\frac{1}{2}$ circ. in longitudine capitis, minus diametro 1 distantibus; orbita antice leviter tumida; naribus posterioribus anterioribus valvula claudendis multo majoribus orbitae approximatis ante pupillam perforatis oblongis; rostro acutiusculo oculo non longiore; osse praeorbitali sub oculo oculi diametro longitudinali duplo fere

humiliore; maxillis subaequalibus, superiore sub medio oculo desinente; dentibus utraque maxilla antice serie externa utroque latere caninis 3 mediocribus conicis curvatis posteriore vel externo ceteris longiore, post caninos pluriseriatis parvis ex parte acutis ex parte graniformibus minimis; dentibus utraque maxilla lateribus serie externa conicis inaequalibus anterioribus acutiusculis posterioribus obtusiusculis, intra seriem externam graniformibus subaequalibus omnibus parvis dentibus serie externa valde multo minoribus parum conspicuis osse intermaxillari triseriatis osse mandibulari biseriatis; dentibus pharyngealibus conicis acutis, superioribus singulis ossibus serie anteriore, inferioribus serie postero-externo ceteris conspicue longioribus et magis curvatis; praeoperculo margine libero scabriusculo limbo alepidoto parte squamata postsuboculari plus duplo graciliore, parte squamata medio squamis in series 8 vel 9 transversas dispositis; operculo angulo spina parva, medio squamis transversim 4–5 seriatis; linea laterali mediocriter curvata; cauda parte libera paulo longiore quam postice alta; squamis trunco angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis supra lineam lateralem in series 46 circ., mox infra lineam lateralem in series 42 circ., mediis lateribus in series 36 circ. transversas dispositis; squamis 17 circ. in serie transversa basin pinnae ventralis inter et pinnam dorsalem quarum 4 vel $4\frac{1}{2}$ lineam lateralem inter et spinam dorsi 1m et 2m, 4 ($3\frac{1}{2}$) lineam lateralem inter et spinas dorsales ceteras; pinna dorsali spinis validis compressis valde heteracanthis apice non flexilibus, 3a 4a 5a et 6a ceteris longioribus capitis parte postoculari vix brevioribus, spina postica radio 1o breviore; dorsali radiosa dorsali spinosa paulo humiliore obtuse rotundata; pectoralibus falcatis capite paulo longioribus; ventralibus capite paulo brevioribus; anali spinis crassis 2a validissima spina 3a longiore et multo crassiore oculo plus duplo longiore; caudali mediocriter emarginata majore parte squamata lobis acutiusculis capite brevioribus; colore corpore superne viridescente, inferne argenteo; iride flavescente; regione praeopercular vittulis 8 vel 9 longitudinalibus plus minusve divergentibus argenteis; seriebus squamarum trunco longitudinalibus singulis medio vittula diffusa fuscescente; pinnis imparibus fuscescente marginatis, dorsali,

pectoralibus, ventralibus et caudali flavescentibus; dorsali spinosa dimidio basali inter singulas spinas ocello diffuso dilutiore; pectoralibus basi superne macula parva triangulàri fuscescente; anali tota fere nigricante vel fusca postice tantum flavescente vel albescente.

B. 6. D. 11/11 vel 11/12. P. 2/13. V. 1/5. A. 3/8 vel 3/9. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Dentex hasta* CV., Poiss. VI p. 189; Günth., Cat. Fish. 1 p. 373.

Chrysophrys Cuvieri Day, Fish. Ind. p. 141 tab. 34 fig. 3 (adult.)

Hab. India (Mangalore, Or. Malabar.); in mari.

Longitudo speciminis descripti et depicti 141‴.

Rem. L'espèce devient beaucoup plus grande que l'individu que je viens de décrire. M. Day dit qu'elle atteint une longueur d'au moins 14½ pouces anglais. C'est sur un individu de cette taille que M. Day a fait prendre la figure citée. Le corps, avec l'âge, devient plus allongé, la tête relativement plus courte et plus obtuse, le préorbitaire plus haut, les yeux plus petits et la seconde épine anale plus courte. La figure publiée par M. Day rend tous ces détails. Elle ne laisse à désirer que par rapport à l'écaillure du dos où il se trouve 5 ou 4½ rangées longitudinales d'écailles entre la ligne latérale et toute la dorsale épineuse et où la gaîne squammeuse de la dorsale molle a l'air de commencer déjà vers les epines médianes de la dorsale. Le nombre des rangées susdites, dans l'individu que j'ai devant moi, n'est que de 4 (3½) sous toute l'étendue de la dorsale osseuse excepté seulement les deux épines antérieures. Je ne pense pas qu'il s'y ajoute une cinquième rangée dans les adultes. M. Day, dans sa description, parle bien de „four entire and two half rows between the lateral-line and the base of the spinous dorsal" mais l'ichthyologiste éminent est arrivé manifestement à ces nombres en les prenant sous la première épine dorsale et en y comptant la moitié supérieure de l'écaille de la ligne latérale elle même.

La Haye, Octobre 1876.

RÉVISION

DES ESPÈCES INSULINDIENNES DU GENRE

URANOSCOPUS L.

PAR

P. BLEEKER.

URANOSCOPUS L. (nec Gronov.) = Nematagnus Gill.

Corpus squamatum. Caput superne post oculos ubique loricatum, rugoso-granosum. Ossa suborbitalia et opercularia rugoso-granosa. Praeoperculum inferne spinis deorsum spectantibus. Os humerale superne spina valida sursum spectante. Pinnae dorsales 2 basi tantum continuae vel contiguae, anterior spinis 3 ad 5 flexilibus, posterior radiis 12 ad 16.

Le genre fait partie des Uranoscopiformes sousfamille qui se compose d'espèces à dessus de la tête cuirassé et granuleux, à yeux placés à la face supérieure de la tête et à ligne latérale longeant de très-près le profil dorsal.

Ces espèces, bien que peu nombreuses (au nombre d'une vingtaine), recèlent plusieurs types parfaitement valides, sav. les genres Uranoscopus L., Upselonphorus Gill., Astroscopus Brev. (= Agnus Günth.), Ichthyscopus Swns. (= Ichthyoscopus Gill), Kathetostoma Günth. et Anema Günth. (= Genyagnus Gill = Gnathagnus Gill = Synnema Haast).

Les Uranoscopus sont nettement distincts par leur casque recouvrant entièrement le front et le vertex, par la

présence d'épines préoperculaires, par les écailles du tronc et par les deux dorsales plus ou moins complètement séparées. On en connaît actuellement une dizaine d'espèces, une de la Méditerranée, une seule aussi des côtes atlantiques de l'Amérique, et les autres du bassin Indo-pacifique. Une onzième espèce fut confondue avec l'Uranoscopus asper Schl., et je viens d'en découvrir une douzième, dans un individu provenant des mers du Cap.

L'Inde archipélagique nourrit au-moins quatre espèces du genre, les Uranoscopus asper, oligolepis, bicinctus et cognatus. Les trois premières espèces habitent aussi les mers de Chine et du Japon, mais le cognatus paraît propre à l'Insulinde.

Les espèces du genre se ressemblent tellement par la physionomie, par les formules des nageoires et, en partie aussi, par les couleurs, qu'il n'est pas facile à les reconnaître à première vue. Pour ce qui regarde les espèces insulindiennes, on arrive à les nettement distinguer par les caractères exposés ci-dessous.

I. Nuque sans écailles. Point de barbillon mentonnier. Epines surscapulaire postérieure et humérale fortes et érigées. Rangées d'écailles de la queue presqu'aussi larges que celles de la région antérieure du tronc.

1. Corps à plus de 50 rangées transversales d'écailles.

A. Tête $3\frac{2}{5}$ à $3\frac{1}{2}$ fois dans la longueur totale. Epines pelviennes ne dépassant pas l'aplomb de l'angle antéro-inférieur du maxillaire.

a. Hauteur du corps $4\frac{1}{2}$ fois dans sa longueur. Tête plus longue que large. Quatre épines préoperculaires. Epine humérale dirigée vers la première dorsale. Corps et nageoires à petites taches ou gouttelettes noirâtres.

1. *Uranoscopus cognatus* Cant.

b. Hauteur du corps 5 fois dans sa longueur. Tête aussi large que longue. Quatre (très-rarement six) épines préoperculaires. Epine humérale dirigée vers la dorsale molle et moins du double plus longue que l'oeil. Tronc sans taches noirâtres. Dos à deux larges bandes transversales brunes.

2. *Uranoscopus bicinctus* Schl.

B. Tête 4 à $4\frac{3}{5}$ fois dans la longueur totale, plus longue que large. Epines pelviennes dépassant l'aplomb de l'angle antéro-inférieur du maxillaire.
   a. Hauteur du corps $5\frac{1}{2}$ à 6 fois dans sa longueur. Trois (très-rarement quatre) épines préoperculaires. Epine humérale dirigée vers la dorsale molle et plus du double plus longue que l'oeil. Corps oeillé de rose, sans taches ni bandes foncées.

3. *Uranoscopus asper* Schl.

2. Corps à moins de 40 rangées transversales d'écailles.
   A. Tête moins de 4 fois dans la longueur totale. Epines pelviennes ne dépassant pas l'aplomb de l'angle antéro-inférieur du maxillaire.
   a. Hauteur du corps moins de 5 fois dans sa longueur. Quatre épines préoperculaires. Epine humérale dirigée vers la première dorsale et du double plus longue que l'oeil. Corps oeillé de rose, sans taches ni bandes foncées.

4. *Uranoscopus oligolepis* Blkr.

Uranoscopus cognatus Cant., Cat. Mal. Fish. p. 21; Blkr, Act. Soc. Sc. Ind. Neerl. VIII. Twaalfde bijdr. vischf. Amb. p. 3; Günth., Cat. Fish. II p. 227. — Atl. Ichth. Tab. 424 Trigl. Trach. tab. 4 fig. 3.

Uranosc. corpore subelongato, antice latiore quam alto, postice compresso, altitudine $3\frac{2}{5}$ circ. in ejus longitudine absque, $4\frac{1}{2}$ fere in ejus longitudine cum pinna caudali; capite *) $2\frac{2}{3}$ circ. in longitudine corporis absque, $3\frac{2}{5}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali, paulo longiore quam alto; altitudine capitis $1\frac{2}{5}$ circ. in ejus longitudine; oculis diametro $6\frac{2}{4}$ circ. in longitudine capitis, diametro $1\frac{2}{3}$ circ. distantibus; incisura rostro-interorbitali minus duplo longiore quam medio lata; dentibus maxillis antice triseriatis, lateribus bi- ad uniseriatis, mandibularibus posterioribus ceteris longioribus; dentibus vomero-pa-

*) La longueur de la tête est prise, pour toutes les espèces, entre le bout de la mâchoire inférieure fermée et le bord osseux de l'opercule.

latinis in vittam curvatam quadripartitam dispositis, vittulis vomerinis palatinis longioribus; membrana oris mandibulari dimidio basali latissima cirros plures elongatos edente cirro medio tentaculiformi ceteris crassiore et longiore inferne transversim multisulcato; mento cirro nullo; praeoperculo inferne quadripartito crura inter laevi, spinis 4 parum divergentibus; spina suboperculari spinis praeopercularibus paulo longiore; operculo duplo circ. altiore quam media ejus altitudine lato, cellulatim rugoso, inferne laevi; spinis suprascapularibus acutis oblique sursum spectantibus posteriore anteriore longiore; spina humerali superiore sulcata oculi diametro minus duplo longiore, apice partem dorsalis spinosae anteriorem versus spectante; spinis praeventralibus non ante angulum maxillae superioris antero-inferiorem porrectis; nucha alepidota; squamis trunco in series 55 circ. transversas dispositis, seriebus trunco postice quam antice vix gracilioribus sed magis obliquis; pinnis dorsalibus non continuis; dorsali spinosa dorsali radiosa plus duplo humiliore et paulo plus duplo breviore, triangulari, spina anteriore ceteris longiore; dorsali radiosa corpore non multo humiliore, non vel vix emarginata, antice quam postice duplo circ. altiore acutangula; pectoralibus rhomboideis obtusis capitis parte postoculari paulo longioribus; ventralibus capitis parte postoculari brevioribus; anali dorsali radiosa paulo longiore et multo humiliore, medio et postice quam antice altiore; caudali convexa capitis parte postoculari paulo longiore; colore corpore superne lateribusque et pinnis, dorsali spinosa excepta, purpureo-violascente, corpore inferne et basin pinnarum dilutiore, ventre griseo vel albido; iride pulchre viridi; capite, trunco pinnisque, dorsali spinosa tantum excepta, guttulis, maculis parvis et punctis numerosis nigris et profunde violaceis, maculis squamis oblique seriatis seriei squamarum partem anteriorem tantum tegentibus; pinnis, dorsali spinosa superne et postice nigra basi antice flavicante vel albescente, ceteris flavescente vel albido marginatis.

B. 6. D. 4—13 (2 anter. simpl.). P. 1/17. V. 1/5. A. 14. C. 1/10/1 et lat. brev.

Syn. *Kodoh* Amboin.

Hab. Pinang; Amboina; in mari.

Longitude speciminis descripti 270'''

Rem. L'Uranoscopus cognatus est une espèce fort-rare, dont on n'a trouvé jusqu'ici que deux individus, l'un à Pinang et l'autre, à plus de 30 degrés plus à l'est, à Amboine. Elle est bien caractérisée par son corps trapu, par sa grande tête, par la dentition, par l'épine humérale supérieure presque verticalement dirigée en haut, par la maculature noirâtre du corps et des nageoires, etc. — Le dernier rayon de l'anale, dans mon individu, s'est transformé en épine, mais je ne pense pas que cette épine représente l'état normal.

Uranoscopus bicinctus Schl., Faun. Jap. Poiss. p. 26 tab. 10^B; Blkr, Act. Soc. Sc. Ind. Neerl. II, Achtste bijdr. vischf. Amboina p. 41; Günth., Cat. Fish. II p. 228. — Atl. Ichth. Tab. 423 Trigl. tab. 3 fig. 6.

Uranosc. corpore subelongato antice latiore quam alto, postice compresso, altitudine 4 circ. in ejus longitudine absque, 5 circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; capite $2\frac{3}{5}$ ad $2\frac{2}{3}$ in longitudine corporis absque, $3\frac{2}{5}$ ad $3\frac{1}{2}$ in longitudine corporis cum pinna caudali, aeque lato circ. ac longo; altitudine capitis $1\frac{1}{2}$ circ. in ejus longitudine; oculis diametro $4\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ in longitudine capitis, diametro 1 ad $1\frac{1}{3}$ distantibus; incisura rostro-interoculari duplo ad sat multo minus duplo longiore quam medio lata; dentibus intermaxillaribus antice triseriatis lateribus biseriatis, mandibularibus antice biseriatis lateribus uniseriatis posterioribus ceteris longioribus; dentibus vomero-palatinis in vittam curvatam quadripartitam dispositis vittulis vomerinis palatinis longioribus; membrana oris mandibulari basi lata vulgo pluricirrata, cirro mediano ceteris multo longiore et latiore carnoso inferne transversim multisulcato; mento cirro nullo; praeoperculo inferne vulgo quadripartito, crura inter laevi, spinis vulgo 4 (rarissime 6); operculo junioribus duplo aetate provectioribus minus duplo altiore quam media ejus altitudine lato, cellulatim vel radiatim rugoso-granulato; spina suboperculari spinis praeopercularibus vulgo paulo longiore; spinis suprascapularibus acutis oblique sursum directis, posteriore anteriore longiore; spina humerali superiore sulcata, oculi diametro minus duplo longiore, apice pinnam dorsalem radiosam versus spectante; spinis praeventralibus usque

4*

ante angulum maxillae superioris antero-inferiorem porrectis; nucha alepidota; squamis trunco in series 55 circ. transversas dispositis, seriebus cauda quam trunco antice vix gracilioribus sed vulgo minus regularibus; pinnis dorsalibus non vel subcontinuis; dorsali spinosa radiosa duplo ad minus duplo humiliore eaque paulo plus duplo breviore, triangulari, acutiuscula vel obtusa, spina 1ª vel 2ª ceteris longiore; dorsali radiosa corpore non multo ad sat multo humiliore, parum vel non emarginata, antice quam postice plus duplo altiore obtusangula vel acutangula; pectoralibus rhomboideis obtusiusculis capitis parte postoculari paulo longioribus; ventralibus capitis parte postoculari brevioribus; anali dorsali radiosa paulo longiore sed conspicue humiliore, medio et postice quam antice altiore; caudali convexa capitis parte postoculari longiore; colore corpore superne rufescente-fusco vel violascente-fusco, inferne pallide roseo vel margaritaceo; iride viridi margine pupillari aurea; capite et pinnis pectoralibus punctis sparsis parcis vel numerosis nigricante-fuscis, adultis interdum deficientibus; regione suborbito-praeoperculari interdum fascia lata diffusa transversa profunde fusca; trunco superne vulgo fasciis 2 transversis latis diffusis profunde fuscis non vel vix infra media latera descendentibus, anteriore nucho-posthumerali, posteriore sub dimidio dorsalis radiosae posteriore; pinna dorsali spinosa nigricante-fusca, basi antice macula triangulari flava vel albida; pinnis ventralibus et anali aurantiacis; anali, basi et margine libero exceptis, frequenter fuscescente vel violascente; pinnis ceteris fuscis vel violascente-fuscis flavo marginatis et radiis et parte basali aurantiacis

B. 6. D. 3 ad 5—13 vel 14 (2 anter. simpl.). P. 1/16 vel 1/17. V. 1/5. A. 13 vel 14. C. 1/10/1 et lat. brev.

Syn. *Uranoscopus laevis* err. calami in Act. Soc. Sc. Ind. Neerl. I, Vischs. Amb. p. 14, nomen tantum (nec Bl. Schn.).

Hab. Amboina; in mari.

Longitudo 8 speciminum 100‴ ad 251‴.

Rem. Cette espèce est voisine, par les proportions du corps et de la tête et par l'écaillure, de l'Uranoscopus cognatus, dont cependant elle est bien distincte par le corps moins trapu, par sa tête aussi large que longue, par la direction de l'épine hu-

mérale supérieure, par des couleurs fort différentes, etc. Le nombre normal des épines préoperculaires est de quatre. Je ne trouve six de ces épines que sur un seul de mes huit individus.

Le bicinctus habite, hors l'Insulinde, les côtes de Chine et des îles méridionales du Japon.

Uranoscopus asper Schl., Faun. Japon. Poiss. p. 26 tab. 9 fig. 1; Rich., Rep. ichth. China in Rep. 15^h meet. Brit. Assoc. p. 211; Blkr, Verh. Bat. Gen. XXVI N. nal. ichth. Japan p. 66 (nec ibid. XXV Nal. ichth. Jap. p. 27); Günth., Cat. Fish. II p. 228. — Atl. Ichth. Tab. 424, Trigl. tab. 4 fig. 6.

Uranosc. corpore subelongato, antice aeque lato ac alto ad vix latiore quam alto, postice compresso, altitudine $4\frac{1}{3}$ ad $4\frac{1}{2}$ in ejus longitudine absque, 5^1 ad 6 in ejus longitudine cum pinna caudali, sat multo longiore quam lato; altitudine capitis $1\frac{2}{5}$ ad $1\frac{1}{2}$ in ejus longitudine; oculis diametro $4\frac{1}{2}$ ad 5 in longitudine capitis, diametro 1 circ. distantibus; incisura rostro-interoculari duplo circ. longiore quam medio lata; dentibus intermaxillaribus antic. tri- ad quinqueseriatis lateribus bi- ad uniseriatis, mandibularibus antice bi- ad triseriatis lateribus bi- ad uniseriatis posterioribus ceteris longioribus; dentibus vomero-palatinis in vittam curvatam quadripartitam dispositis vittulis vomerinis palatinis longioribus; membrana oris mandibulari in cirrum gracilem plus minusve fimbriatum producto, interdum deficiente; mento cirro nullo; praeoperculo inferne quadripartito, crures inter laevi, spinis 3 (rarissime 4) valde divergentibus; spina suboperculari spinis praeopercularibus longiore; operculo duplo circ. altiore quam media ejus altitudine lato, radiatim vel irregulariter rugoso-granoso, juvenilibus inferne laevi; spinis suprascapularibus oblique sursum spectantibus posteriore anteriore multo longiore acuta; spina humerali superiore sulcata, oculi diametro plus duplo longiore apice pinnam dorsalem radiosam versus spectante; spinis praeventralibus ante angulum maxillae superioris antero-inferiorem porrectis; nucha alepidota; squamis trunco in series 54 ad 58 transversas dispositis, seriebus postrorsum latitudine non vel vix decrescentibus: pin-

nis dorsalibus contiguis vel subcontinuis; dorsali spinosa dorsali radiosa multo humiliore et multo plus duplo breviore triangulari obtusiuscula spinis 2 anterioribus ceteris longioribus; dorsali radiosa corpore minus duplo humiliore, emarginata, antice quam postice duplo circ. altiore; pectoralibus rhomboideis capite vix brevioribus; ventralibus capitis parte postoculari non ad vix brevioribus; anali dorsali radiosa paulo longiore et multo humiliore, postice quam antice altiore; caudali truncato-convexa capite non ad vix breviore; colore corpore superne fuscescente-rufo, inferne pallide roseo vel margaritaceo; iride viridescente punctis nigris vel fuscis nullis; capite et trunco superne lateribusque maculis irregularibus polymorphis majoribus et minoribus pallide roseis vel aurantiacis, cephalicis ceteris minoribus aetate provectis confertissimis; pinna dorsali spinosa majore parte fusca vel nigra tota basi et apice spinarum flava: pinnis ceteris membrana violascente- vel roseo-hyalinis radiis flavescentibus vel aurantiacis; dorsali radiosa radiis juvenilibus interdum fusco variegatis adultis vulgo fuscescente limbatis; caudali membrana postice vulgo fuscescente.

B. 6. D. 4 vel 5—15 (rarius 14) anter. 2 simpl. P. 1/17 vel 1/18. V. 1/5. A. 15 (rarius 14). C. 1/10/1 et lat. brev.

Hab. Singapura; Bangka (Muntok); Amboina; in mari.

Longitudo 7 speciminum 88‴ ad 290‴.

Rem. Les deux individus du Japon cités dans les „Nieuwe nalezingen op de ichthyologie van Japan" sont en effet de l'espèce actuelle, mais celui décrit dans les „Nalezingen" comme un individu de l'asper est de l'espèce de l'oligolepis.

L'asper est fort voisin de l'Uranoscopus scaber L. par les couleurs et par la formule des écailles, mais il est bien distinct par une épine préoperculaire de moins et par les rangées d'écailles de la queue qui, dans le scaber, sont beaucoup moins larges et moins régulières. Le scaber diffère encore par sa tête plus grosse et plus large, par l'échancrure rostro-interorbitaire plus large, par des épines surscapulaires moins développées, par des sous-orbitaires s'approchant plus du bord préoperculaire, par l'épine humérale supérieure plus courte, par un ou deux rayons de moins à la seconde dorsale, par le noir qui occupe toute la

base médiane de la première dorsale, etc. Toutes ces différences s'observent parfaitement sur des individus d'égale longueur des deux espèces.

Uranoscopus oligolepis Blkr. — Atl. Ichth. Tab. 425, Trigl. tab. 5 fig. 7.

Uranosc. corpore subelongato, antice sat multo latiore quam alto, postice compresso, altitudine $3\frac{2}{3}$ ad $3\frac{4}{5}$ in ejus longitudine absque, $4\frac{2}{5}$ ad $4\frac{4}{5}$ in ejus longitudine cum pinna caudali; capite 3 fere in longitudine corporis absque, $3\frac{2}{3}$ ad $3\frac{3}{4}$ in longitudine corporis cum pinna caudali, paulo longiore quam lato; altitudine capitis $1\frac{1}{4}$ circ. in ejus longitudine; oculis diametro 5 ad 6 in longitudine capitis, diametro 1 ad 1^{1} distantibus; incisura rostro-interoculari duplo circ. longiore quam medio lata; dentibus, intermaxillaribus antice triseriatis lateribus bi- ad uniseriatis, mandibularibus antice biseriatis lateribus uniseriatis posterioribus ceteris longioribus; dentibus vomero-palatinis in vittam curvatam quadripartitam dispositis, vittulis vomerinis palatinis longioribus; membrana oris mandibulari in cirrum leviter fimbriatum producta; mento cirro nullo; praeoperculo inferne quinquepartito radiatim rugoso spinis 4; operculo duplo ad plus duplo altiore quam media ejus altitudine lato, radiatim granoso-rugoso; spina suboperculari spinis praeopercularibus longiore; spinis suprascapularibus oblique sursum spectantibus posteriore anteriore longiore; spina humerali superiore sulcata, oculi diametro duplo vel plus duplo longiore, apice mediam pinnam dorsalem spinosam versus spectante; spinis praeventralibus non ante angulum antero-inferiorem maxillae superioris porrectis; nucha alepidota; squamis trunco in series 38 circ. transversas dispositis seriebus postrorsum latitudine vix decrescentibus; pinnis dorsalibus contiguis, spinosa radiosa multo humiliore et minus triplo breviore obtusa, radiosa corpore minus duplo humiliore emarginata antice quam postice duplo circ. altiore; pectoralibus capite paulo brevioribus; ventralibus capitis parte postoculari non longioribus; anali dorsali radiosa paulo longiore et multo humiliore postice quam antice altiore; caudali truncato-convexa capite absque rostro non longiore; colore corpore superne fuscescente-rubro, inferne roseo vel margaritaceo;

iride viridescente margine pupillari punctis aliquot fuscis vel nigris; capite et trunco superne lateribusque ocellis irregularibus roseis vel flavescente-roseis cephalicis ceteris minoribus et magis confertis; pinna dorsali spinosa nigricante-fusca basi antice et postice et apice spinarum flavida; pinnis ceteris membrana violascente vel roseo-hyalinis radiis flavescentibus vel aurantiacis; dorsali posteriore radiis fusco pluri-annulatis; anali interdum vitta longitudinali mediana margaritacea.

B. 6. D. 5—13 vel 14 (2 anter. simpl.). P. 1/16. V. 1/5. A. 14. (2 poster. subcontig.). C. 1/10/1 et lat. brev.

Syn. *Uranoscopus scaber* Rich., Rep. ichth. Chin. in Rep. 15h meet. Brit. Assoc. p. 211? (nec L.).
Uranoscopus asper Blkr, Verh. Bat. Gen. XXV Nal. ichth. Japan p. 27 (nec Schl., nec Blkr Verh. Bat. Gen. XXVI Nieuwe nal. ichth. Japan p. 66.

Hab. Sumatra; Java; Amboina; in mari.

Longitudo 4 speciminum 81‴ ad 148‴.

Rem. L'Uranoscopus oligolepis, l'Uranoscopus scaber L. et l'Uranoscopus asper Schl. se ressemblent tellement par les formes et par les couleurs, qu'il faut de l'attention pour les bien distinguer. L'oligolepis, par ses affinités, tient le milieu entre l'asper et le scaber, mais il est essentiellement distinct par une vingtaine de rangées transversales d'écailles de moins. J'en possède deux individus, l'un provenant d'Amboine et l'autre du Japon, et j'en ai trouvé deux autres, pêchés dans les mers de la Sonde, qui font parti des collections de Musée de Leide. J'ai décrit autrefois l'individu du Japon sous le nom d'Uranoscopus asper Schl., mais une étude comparative des individus japonais et insulindiens des deux espèces apprend qu'elles sont bien distinctes, non seulement par l'écaillure, mais aussi par les proportions de la hauteur du corps, de la longueur et de la largeur de la tête, par le nombre des épines préoperculaires, par la longueur et la direction de l'épine humérale supérieure, etc. Richardson paraît avoir vu l'oligolepis dans un individu décoloré provenant de Chine, mais il l'a cru spécifiquement identique avec l'espèce de la Méditerranée. *) Cuvier-Valenciennes citent un individu

*) Pour mieux faire saisir les caractères des trois espèces, je fais suivre ici

du scaber comme provenant de la Mer des Indes. Cet individu mérite d'être examiné de nouveau, l'existence du scaber dans

---

une description diagnostique du scaber, telle que je l'ai pu prendre sur deux individus conservés au Musée de Leide. J'ajoute encore la description d'une espèce inédite, habitant les mers du Cap et dont un individu bien conservé appartient aux collections du même Musée.

Uranoscopus scaber L., Syst. nat. ed 10a I p. 250; Mus. Ad. Frid. II p. 59; L. Gom., Syst. Nat. ed. 13a p. 1156; Brünn., Ichth. Massil. n⁰. 29; Bl. Ausl. Fisch. II p. 90 tab. 163; Bl. Schn., Syst. p. 46; Bonnat., Ichth. p. 45, tab. 27 fig. 97; Lac., Poiss. II p. 349 tab. 11 fig. 1; Risso, Ichth. Nice p. 106; Eur. mérid. III p. 261; De la Roche, Ann. Mus. XIII p. 315; Martens, Reise Vened. II p. 430; CV., Poiss. III p. 214; Nordm., Voy. Russ. mérid. Poiss. p. 371; Val., Règn. an. éd. ill. Poiss. tab. 17 fig. 1; Rosenth., Ichthyot. Taf. 18 fig. 5 (scelet.); Günth., Cat. Fish. II p. 226.

Uranosc. corpore subelongato, antice sat multo latiore quam alto, postice compresso, altitudine $4\frac{1}{2}$ circ. in ejus longitudine absque, 6 circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; capite 3 circ. in longitudine corporis absque, 4 circ. in longitudine corporis cum pinna caudali, vix ad non longiore quam lato; altitudine capitis $1\frac{1}{2}$ circ. in ejus longitudine; oculis diametro 5 ad 6 in longitudine capitis, diametro 1 distantibus; incisura rostro-interoculari multo minus duplo longiore quam medio lata; dentibus maxillis antice biseriatis postice uniseriatis, mandibularibus serie externa inaequilongis distantibus dentibus ceteris longioribus; dentibus vomero-palatinis in vittam curvatam quadripartitam dispositis, vittulis vomerinis palatinis longioribus; membrana oris mandibulari in cirrum elongatum fimbriatum producta; mento cirro nullo; praeoperculo inferne quinquepartito radiatim rugoso, spinis 4; operculo minus duplo altiore quam media ejus altitudine lato, radiatim rugoso-granoso; spina suboperculari spinis praeopercularibus longiore; spinis suprascapularibus humilibus posteriore anteriore conspicue longiore; spina humerali superiore sulcata oculo minus duplo longiore, apice dorsalem radiosam versus spectante; spinis praeventralibus usque ante angulum maxillae superioris infero-anteriorem porrectis; nucha alepidota; squamis trunco in series 58 circ. transversas dispositis seriebus trunco antice quam postice conspicue latioribus; pinnis dorsalibus contiguis vel subcontinuis, spinosa radiosa multo humiliore et minus triplo breviore, obtusa, spinis anterioribus subaequilongis, radiosa corpore multo humiliore vix emarginata antice quam postice duplo circ. altiore; pectoralibus capite vix brevioribus; ventralibus capitis parte postoculari non longioribus; anali dorsali radiosa longiore et humiliore, postice quam antice altiore; caudali truncato-convexa capite non vel vix breviore; corpore superne lateribusque fuscescente-rufo pallide roseo ocellato-marmorato, inferne pallide roseo vel margaritaceo; iride aureo-viridi; pinnis, dorsali spinosa nigra basi antice et postice flava, caudali fuscescente vel purpurescente flavo vel albido marginata, ceteris roseo-flavescentibus vel aurantiacis.

B. 6. D. 5—13 (2 ant. simpl.). P. 1/16. V. 1/5. A. 14 vel 15. C. 1/10/1 et lat. brev.

Syn. *Kallioonumos* Arist. II c. 15, VIII c. 13; Aelian. XIII c. 4; Athen. VIII f. 177.

Ouranoskopos, *Agnos* Athen. VII f. 142, VIII f. 177.

Callionymus Plin. XXXII c. 7, 11; Gesn. p. 135, 158; Willughb. p. 287.

le bassin Indien étant peu probable. Peut-être n'est ce qu'un oligolepis.

Uranoscopus Plin., XXXII c. 7, 11; Galien. De usu part. III c. 3; Roudel. X c. 13; Salv. f. 196b, 197b, 198; Aldrov., II c. 51; Gesn. p. 135, 158; Will., p. 287; Ray, p. 97.
Trachinus cirris multis in maxilla inferiore Art., Gen. p. 42; Syn. p. 71.
Trachinus uranoscopus L., Syst. nat. ed. 6a p. 48.
Corystion facie plana sursum spectante Klein, Miss. IV p. 46.
Callionymus araneus Gron., Catal. ed. Gray p. 44.
Hab. Mare Mediterraneum.
Longitudo 2 speciminum 98‴ et 190‴.

Rem. L'espèce se fait aisément distinguer; de l'oligolepis par la formule de l'écaillure, par la forme plus allongée du corps, par la largeur de l'échancrure interorbitaire, par la direction de l'épine sushumérale, etc.; — et de l'asper, par sa tête plus large, par la large échancrure interorbitaire, par les quatre épines préoperculaires, etc.

Uranoscopus capensis Blkr.

Uranosc. corpore subelongato, antice latiore quam alto, postice compresso, altitudine 4⅔ circ. in ejus longitudine absque, 6 circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; capite 3 circ. in longitudine corporis absque, 4 circ. in longitudine corporis cum pinna caudali, sat multo longiore quam lato; altitudine capitis 1½ circ. in ejus longitudine; oculis diametro 7 circ. in longitudine capitis, diametro 1⅓ circ. distantibus; incisura rostro-interorbitali multo minus duplo longiore quam medio lata; dentibus intermaxillaribus antice triseriatis, lateribus bi- ad uniseriatis, mandibularibus antice biseriatis lateribus bi- ad uniseriatis posterioribus anterioribus longioribus; dentibus vomero-palatinis in vittam curvatum quadripartitam dispositis, vittulis vomerinis palatinis longioribus; membrana oris mandibulari in cirrum elongatum vix fimbriatum inferne transversim sulcatum producta; mento cirro nullo; praeoperculo inferne quinquepartito cruribus ubique granulatis, spinis 5 inaequilongis; spina suboperculari spinis praeopercularibus fortiore; operculo minus duplo altiore quam media ejus altitudine lato, ubique radiatim granoso-rugoso; spinis suprascapularibus 2 parum erectis posteriore anteriore multo longiore; spina humerali superiore sulcata, oculi diametro minus duplo longiore, apice dorsalem radiosam versus spectante; spinis praeventralibus non ante maxillae superioris angulum antero-inferiorem porrectis; nucha alepidota; squamis trunco in series 58 circ. transversas dispositis, seriebus postrorsum latitudine sensim decrescentibus anterioribus posterioribus duplo circ. latioribus; pinnis dorsalibus non continuis; dorsali spinosa dorsali radiosa duplo circ. humiliore et triplo breviore, triangulari, spinis 2 anterioribus subaequilongis ceteris longioribus; dorsali radiosa corpore duplo circ. humiliore, vix emarginata, antice quam positice duplo circ. altiore, obtusa; pectoralibus oblique rhomboideis obtusis capite vix brevioribus; ventralibus capitis parte postoculari vix brevioribus; anali dorsali radiosa non longiore eaque humiliore, medio et postice quam antice altiore; caudali truncato-convexa capite vix breviore; corpore superne lateribusque violascente-fusco vel violascente-aurantiaco, inferne dilute roseo vel margaritaceo; maculis vel fasciis corpore (specim. diu in spiritu vini conservatis) conspicuis

L'Insulinde nourrit une cinquième espèce d'Uranoscopini, trouvée sur la côte occidentale de Sumatra et brièvement indiquée, par Bennett, sous le nom d'Uranoscopus malacopterus. Cette espèce est manifestement du genre Kathetostoma et voisine du Kathetostoma laeve Günth., espèce des mers australasiennes méridionales. Le peu de probabilité que les espèces soient identiques fait préférer le maintien provisoire de l'espèce de Bennett, dont voici la courte diagnose donnée par son auteur.

Katethostoma malacopterus = Uranoscopus malacopterus Benn., Lif. Raffl. Coll. zool. specim. Sumatra p. 687.

„Uranoscopus pinna dorsali unica vix spinosa, anali longiore; pinnis pectoralibus rotundatis dorsalem vix attingentibus."

La Haye, Février 1877.

---

nullis; iride viridescente; pinna dorsali spinosa nigra basi antice et postice alba vel flava; pinna caudali violascente-fusca basi dilutiore, postice albido vel flavescente marginata; pinnis ceteris membrana albido-roseis vel hyalinis, radiis flavis vel aurantiacis.
B. 6. D. 4—14 (2 anter. simpl.). P. 1/16. V. 1/5. A. 14. C. 1/10/1 et lat. brev.
Hab. Promontorium bonae spei; in mari.
Longitudo speciminis descripti 270‴.

Rem. L'espèce est voisine de l'Uranoscopus scaber, mais distincte, outre les couleurs, par sa tête notablement plus longue que large, par les cinq épines du préopercule, par les dents intermaxillaires trisériales, par les épines préventrales ne s'étendant pas en avant de l'aplomb de l'angle maxillaire antéro-inférieur, etc.

THEORIE

DE LA

LUNETTE PANCRATIQUE DE M. DONDERS,

PAR

J. A. C. OUDEMANS.

§. 1. PROBLÈME DE LA LUNETTE PANCRATIQUE. DOUBLE SOLUTION, DONT L'UNE SEULEMENT SATISFAIT AUX CONDITIONS POSÉES. CETTE SOLUTION DONNE ENCORE DES LUNETTES DE DEUX CONSTRUCTIONS DIFFÉRENTES.

D'après les communications faites par M. DONDERS, tant à la séance du 30 juin de cette Académie que plus tard, j'ai posé le problème de la lunette pancratique comme suit:

„Composer au moyen de trois lentilles une lunette terrestre, „d'une longueur donnée et très petite a, (c. a. d. pas plus longue „qu'un décimètre, et si possible pas plus longue que cinq cen- „timètres) lunette telle que la lentille du milieu étant dé- „placée un peu en avant ou en arrière, le grossissement varie, „mais que la précision des images en souffre très peu; et que „le grossissement puisse varier entre les limites 1 et $\frac{n+1}{n}$, „sans que la distance focale équivalente de la lunette entière „descende au-dessous de $\pm$ F."

Comme l'a déjà dit M. DONDERS, M. GRINWIS aussi s'est occupé de la théorie de la lunette pancratique, cependant ma manière de traiter le problème diffère de la sienne, et a révélé quelques autres propriétés de cette lunette, c'est pourquoi je prends la liberté de donner ici ma solution.

Nommons φ_0, φ_1 et φ_2 les distances focales des trois lentilles; e la distance de la première lentille ou *objectif* à la *lentille du milieu*, alors la distance de la lentille du milieu à la troisième lentille ou *oculaire* sera $a-e$.

La distance focale d'une lunette étant infinie, nous avons l'équation:

$$f=\frac{\varphi_0\,\varphi_1\,\varphi_2}{\varphi_0\varphi_1+\varphi_0\varphi_2+\varphi_1\varphi_2-e(\varphi_1+\varphi_2)-(a-e)(\varphi_0+\varphi_1)+e(a-e)}=\infty^{*})\ (1)$$

c'est-à-dire, en nommant le dénominateur N,

$$N=\varphi_0\varphi_1+\varphi_0\varphi_2+\varphi_1\varphi_2-a(\varphi_0+\varphi_1)+e(\varphi_0-\varphi_2+a-e)=0 \quad (2)$$

première équation entre les quatre inconnues φ_0, φ_1, φ_2 et e.

La condition qu'un très petit déplacement de la lentille du milieu ne nuit pas à la précision des images, donne pour seconde équation

$$\frac{\partial N}{\partial e}=\varphi_0-\varphi_2+a-2e=0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

d'où l'on tire

$$e=\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_2+a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

et

$$\varphi_0-\varphi_2+a-e=e\,.$$

Substituant la dernière dans l'équation (2), nous aurons

$$\varphi_0\,\varphi_1+\varphi_0\,\varphi_2+\varphi_1\,\varphi_2-a\,(\varphi_0+\varphi_1)+e^2=0. \;.\; (5)$$

Pour trouver e, nous y substituerons la valeur de a, tirée de (3), ce qui donne

$$e^2-2\,(\varphi_0+\varphi_1)\,e+(2\,\varphi_1+\varphi_0)\,\varphi_0=0$$

---

*) GAVARRET, *des images par réflexion et par réfraction*, p. 140, corrigé par M. H. SNELLEN, dans sa description du *Phakomètre*, Maandblad voor natuurwetenschappen, 7e Année, n^0. 2.

c'est à dire :

$$\{e-(\varphi_0+2\,\varphi_1)\}\{e-\varphi_0\}=0$$

dont nous tirons pour e deux valeurs :

$$e=\varphi_0+2\,\varphi_1 \quad (6) \quad \text{et} \quad e=\varphi_0 \quad \ldots (6^*)$$

d'où :

$$a=\varphi_0+4\,\varphi_1+\varphi_2 \quad (7) \quad \text{et} \quad a=\varphi_0+\varphi_2 \quad \ldots (7^*)$$

$$a-e=2\,\varphi_1+\varphi_2 \quad (8) \quad \text{et} \quad a-e=\varphi_2 \quad \ldots (8^*)$$

Si l'on considère l'objectif comme composé de la première et de la seconde lentille réunies, la distance focale en est égale à

$$\frac{\varphi_0\,\varphi_1}{\varphi_0+\varphi_1-e}\;;$$

et le grossissement de la lunette sera :

$$V=-\frac{\varphi_0\,\varphi_1}{(\varphi_0+\varphi_1-e)\,\varphi_2} \quad \ldots\ldots\ldots (9_a)$$

Si, au contraire, la première lentille seule est considérée comme objectif, et les deux autres ensemble comme formant un oculaire, dont la distance focale est égale à

$$\frac{\varphi_1\,\varphi_2}{\varphi_1+\varphi_2-a+e}\,,$$

le grossissement s'exprimera encore par l'expression

$$V=-\frac{\varphi_0\,(\varphi_1+\varphi_2-a+e)}{\varphi_1\,\varphi_2} \quad \ldots\ldots (9_b)$$

Les deux valeurs trouvées pour V doivent être identiques : en les égalant l'une à l'autre, on retrouvera l'équation (2).

En substituant dans l'équation (9_a) les deux valeurs trouvées pour e, (6) et (6*), l'on aura

$$V=\frac{\varphi_0}{\varphi_2}\;(10) \quad \text{et} \quad V=-\frac{\varphi_0}{\varphi_2} \quad \ldots\ldots (10^*)$$

Or, a et e sont l'un et l'autre positifs, et $a>e$, donc, à

cause de (6*) et (7*), φ_0 et φ_2 seront positifs et à cause de (10*), V sera négatif. Cette solution ne satisfait donc pas aux conditions du problème, parce qu'une lunette composée d'après cette solution donnerait des images renversées.

Dans la première solution, on tire des équations (6) et (8), que $\varphi_0 + 2\varphi_1$ et $2\varphi_1 + \varphi_2$ seront aussi positifs, et de (10) que φ_0 et φ_2 auront le même signe. Provisionnellement nous ne savons pas davantage des signes de φ_0, φ_1 et φ_2. Mais si l'on prend en considération, que, d'après les conditions du problème, $a = \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2$ devra être très petit en comparaison de φ_0, φ_1 et φ_2, il s'en suivra que φ_1 aura un autre signe que φ_0 et φ_2, ce qui donnera une double construction:

1re construction: objectif et oculaire *négatifs*, lentille du milieu *positive;*

2me construction: objectif et oculaire *positifs*, lentille du milieu *négative.*

---

§ 2. DÉPLACEMENT NÉCESSAIRE DE L'OBJECTIF OU DE L'OCULAIRE POUR UN DÉPLACEMENT FINI DE LA LENTILLE DU MILIEU, CELLE-CI ÉTANT SUPPOSÉE POSITIVE. DISTANCE FOCALE DE LA LUNETTE ENTIÈRE, SI CE DÉPLACEMENT DE L'OBJECTIF OU DE L'OCULAIRE N'A PAS LIEU.

De l'équation

$$\frac{\partial N}{\partial e} = 0 \ ,$$

nous concluons que, pour une variation infiniment petite de e, le dénominateur N demeurera $= 0$, et $f = \infty$. Pour une variation plus grande de e, a devra changer aussi un peu, si l'on veut garder la distance focale $= \infty$. Nous chercherons donc d'abord le grossissement pour une variation finie $\triangle e$, accompagnée de la variation correspondante de a, et nous déterminerons ensuite la distance focale f, dans l'hypothèse que a ne change pas.

Il faudra observer d'abord qu'une variation de a peut être effectuée de deux manières, savoir en déplaçant soit l'objectif, soit l'oculaire. En déplaçant l'objectif, on change $\triangle e$, tandis que cette même valeur ne varie pas par le déplacement de l'oculaire.

Substituons, dans le dénominateur N, pour e et a, au lieu des valeurs données par (6) et (7), les valeurs suivantes:

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1 + \Delta e,$$
$$a = \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta a,$$

ou bien, ce qui mène encore plus vite au but, considérons ce dénominateur comme une fonction de a et de e, et remarquons, que pour les valeurs de a et de e, données dans (6) et 7

$$N = 0$$
$$\frac{\partial N}{\partial a} = -\varphi_0 - \varphi_1 + e = +\varphi_1$$
$$\frac{\partial N}{\partial e} = 0$$
$$\frac{\partial^2 N}{\partial a^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 N}{\partial a\, \partial e} = 1$$
$$\frac{\partial^2 N}{\partial e^2} = 0$$

et que tous les quotients différentiels d'un ordre plus élevé de N par rapport à a et e, sont aussi égaux à zéro, nous aurons, en appliquant le théorème de MACLAURIN, l'équation exacte

$$N = \varphi_1 \Delta a + \Delta a \Delta e - \Delta e^2 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Or, puisque N doit rester $= 0$,

$$\Delta a = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 + \Delta e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

et après la substitution dans (9) de l'équation

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1 + \Delta e$$

l'on aura

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} + \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

D'après ce qui a été remarqué plus haut, les équations (12) et (13) s'appliqueront au cas où l'oculaire serait employé pour ramener la distance focale à ∞ et rétablir ainsi la netteté des images.

Nommons maintenant les limites du grossissement $\frac{n+1}{n}$ et 1, où n est positif, et, pour fixer les idées, supposons que φ_1 soit positif, alors nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} &= \frac{n+1}{n}, \\ \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} &= 1 \quad , \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (14)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{n+1}{n}$$

et

$$\Delta e = \frac{\varphi_1}{2n+1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Ensuite, en prenant dans l'équation (12) Δe d'abord négatif, puis positif, nous aurons pour la limite supérieure du grossissement

$$\Delta a = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{\varphi_1}{2n(2n+1)} \quad \ldots \ldots (16)$$

et pour la limite inférieure

$$\Delta a = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)} \quad \ldots (17)$$

équations qui donnent le déplacement nécessaire de l'oculaire.

En général nous aurons, à cause de l'équation (11) :

$$f = \frac{\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2}{\varphi_1\, \Delta a + \Delta a\, \Delta e - \Delta e^2} \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

Si l'on prend $\Delta e = \mp \frac{\varphi_1}{2n+1}$, et, si l'on tire Δa de (16)

ou de (17), f sera $= \infty$; mais si $\Delta a = 0$, c'est-à-dire si l'on ne déplace que la lentille du milieu, l'on aura

$$f = -\frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\Delta e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Donc, si φ_0 et φ_2 sont négatifs et que φ_1 soit positif, comme nous l'avons déjà supposé en déduisant les équations (14), f sera toujours négatif. Posons donc, d'après les données du problème, la limite de f, prise positive, $= F$, nous aurons

$$F = \frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\Delta e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

ou bien, eu égard a l'équation (15) :

$$F = (2n+1)^2 \frac{\varphi_0 \varphi_2}{\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

En substituant (15) dans (14), nous aurons encore

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{2n+2}{2n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

pour le grossissement de la lunette, quand la lentille du milieu occupe sa position originale ou moyenne.

---

§ 3. CONSIDÉRATIONS SUR LE CAS OÙ, POUR LES DEUX LIMITES DU GROSSISSEMENT, LA LONGUEUR DE LA LUNETTE EST SUPPOSÉE LA MÊME.

Pour le grossissement $= 1$, il faut faire *reculer* la lentille du milieu, tandis que pour le grossissement $= \frac{n+1}{n}$, il faut la faire *avancer ;* si en la faisant avancer, on rend la longueur de la lunette égale à celle qu'elle a quand, pour obtenir le grossissement minimum, on fait reculer la lentille du milieu, Δe et V ne sont pas les mêmes qu'auparavant En combinant alors les équations (16) et (17), nous aurons pour une lentille du milieu positive

$$\frac{\Delta e^2}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)}$$

d'où l'on tire:

$$(2n+1)(2n+2)\Delta e^2 + \Delta e\,\varphi_1 - \varphi_1^{\,2} = 0$$

c'est à dire:

$$\{(2n+2)\Delta e - \varphi_1\}\ \{(2n+1)\Delta e + \varphi_1\} = 0$$

dont les deux racines sont :

$$\Delta e = \frac{\varphi_1}{2n+2} \quad \text{et} \quad \Delta e = -\frac{\varphi_1}{2n+1} \quad \ldots (23)$$

Le signe négatif de la seconde valeur donne un déplacement de la lentille du milieu dans le sens opposé à celui que nous cherchons, et correspond à la limite inférieure du grossissement, $V = 1$; la première valeur donne

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \dfrac{\varphi_1}{2n+2}}$$

Mais nous avons:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \dfrac{\varphi_1}{2n+1}} = 1$$

donc

$$V = \frac{\varphi_1 + \dfrac{\varphi_1}{2n+1}}{\varphi_1 - \dfrac{\varphi_1}{2n+2}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \quad \ldots (24)$$

Dans ce cas le grossissement sera donc égal à la deuxième puissance du grossissement que possède la lunette, quand la lentille du milieu occupe sa position originale.

---

§ 4. SOLUTION DU PROBLÈME, LORSQU'ON EMPLOIE L'OCULAIRE POUR CORRIGER LA DISTANCE FOCALE.

Les équations, dont il faudra tirer les quatre inconnues $\varphi_0 \cdot \varphi_1$, φ_2 et e, sont donc les suivantes

$$(6) \qquad e = \varphi_0 + 2\varphi_1$$
$$(7) \qquad \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = a$$
$$(22) \qquad \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

tandis que l'équation (21) nous fournit la quatrième

$$\frac{\varphi_0 \varphi_2}{\varphi_1} = \frac{F}{(2n+1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

La solution des trois dernières équations conduira évidemment à une équation du second degré. Pour simplifier la solution, posons

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

En observant que $a - e$ et φ_1 sont positifs et que φ_2 est négatif, on déduit de l'équation (8) que p sera un nombre négatif, un peu plus grand que 0,5.

En multipliant (26) par (25) nous aurons:

$$\varphi_0 = p \times \frac{F}{(2n+1)^2}$$

donc, à cause de (22)

$$\varphi_2 = p \times \frac{F}{(2n+1)(2n+2)} \qquad \ldots (27)$$

et enfin

$$\varphi_1 = p^2 \times \frac{F}{(2n+1)(2n+2)}$$

Et, en substituant ces trois équations dans (7), nous aurons après quelques réductions:

$$p^2 + \frac{4n+3}{4(2n+1)}\, p - \frac{(n+1)(2n+1)}{2} \cdot \frac{a}{F} = 0 \quad . (28)$$

Cette équation a une racine négative plus grande et une racine positive plus petite, dont la première seule pourra nous servir ; en y faisant attention, la solution goniométrique nous donnera

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha &= \frac{4(2n+1)}{4n+3}\sqrt{\frac{2(n+1)(2n+1)a}{F}} \\ p &= -\frac{(4n+3)\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{4(2n+1)\cos\alpha} \\ \varphi_0 &= \frac{pF}{(2n+1)^2} \\ \varphi_2 &= \frac{2n+1}{2n+2}\varphi^0 \\ \varphi_1 &= p\,\varphi_2 \\ e &= \varphi_0 + 2\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (29)$$

et la preuve du calcul sera donnée par l'équation

$$a = \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2.$$

---

§ 5. SOLUTION DU PROBLÈME EN EMPLOYANT L'OBJECTIF POUR CORRIGER LA DISTANCE FOCALE.

Si, au contraire, on veut corriger la distance focale en déplaçant l'objectif, il faut s'imaginer la lunette renversée bout pour bout, et remplacer φ_0 par φ_2 et réciproquement, nous aurons alors :

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} = 1$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{n}{n+1}$$

d'où l'on tire, en les divisant l'une par l'autre, comme dans le paragraphe 2 :

$$\Delta e = \frac{\varphi_1}{2n+1}$$

La formule

$$\Delta a = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 + \Delta e}$$

qui donne le déplacement de l'oculaire, (maintenant φ_0), est encore toujours applicable; on obtient donc pour Δa les mêmes valeurs qu'auparavant. Mais en renversant encore une fois la lunette, les limites du grossissement changent aussi, et nous aurons

pour la limite supérieure : $V = \frac{n+1}{n}$

$$\Delta a = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)} \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

et pour la limite inférieure $V = 1$:

$$\Delta a = \frac{\varphi_1}{2n(2n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Pour la position moyenne de la lentille du milieu, nous aurons

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \frac{\varphi_1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad \ldots (32)$$

Les trois équations à résoudre seront donc dans ce cas:

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = a \\ (32) & \dfrac{\varphi_0}{\varphi_2} = \dfrac{2n+1}{2n} \\ (21) & \dfrac{\varphi_0\varphi_2}{\varphi_1} = \dfrac{F}{(2n+1)^2} \end{array}\right\} \ldots\ldots (33)$$

Posons encore

$$\varphi_1 = q\varphi_0 ,$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2 = q \times \dfrac{F}{(2n+1)^2} \\ \varphi_0 = q \times \dfrac{F}{2n(2n+1)} \\ \varphi_1 = q^2 \times \dfrac{F}{2n(2n+1)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (34)$$

et, par substitution dans l'équation (7)

$$q^2 + \frac{4n+1}{4(2n+1)}\, q - \frac{n(2n+1)}{2}\,\frac{a}{F} = 0$$

dont la solution nous donne :

$$\left.\begin{aligned}
tg\ \alpha &= \frac{4(2n+1)}{4n+1}\sqrt{\frac{2n(2n+1)a}{F}} \\
q &= -\frac{(4n+1)\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{4(2n+1)\cos\alpha} \\
\varphi_2 &= q \times \frac{F}{(2n+1)^2} \\
\varphi_0 &= \frac{2n+1}{2n}\,\varphi_2 \\
\varphi_1 &= q\,\varphi_0 \\
e &= \varphi_0 + 2\varphi_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (35)$$

Il est aisé de trouver le grossissement en fonction du déplacement de la lentille du milieu, car, en changeant entre elles les deux lentilles extérieures, l'équation (13) devient évidemment, pour chaque valeur arbitraire de Δe :

$$\frac{1}{V} = \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \times \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e},$$

d'où

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \times \frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1},$$

donc, en nommant le grossissement dans la position moyenne de la lentille du milieu $\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = V'$, l'on aura

$$V = V'\left(1 + \frac{\Delta e}{\varphi_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

c'est-à-dire : *Qu'en employant l'objectif pour corriger la distance focale, le grossissement augmente uniformément en déplaçant la lentille du milieu, de sorte qu'une échelle divisée régulièrement pourra indiquer le grossissement*, — une propriété mise en pratique dès 1820 par PEARSON et ARAGO, pour construire leurs micromètres à cristal de roche.

---

§ 6. LIMITE SUPÉRIEURE DE F.

Nous voyons donc que, pour des valeurs données de a, n et F, il est possible de composer la lunette pancratique ; il y a pourtant une condition, dont nous n'avons par encore tenu compte, et qui donne une limite que F ne peut pas surpasser, savoir que le déplacement nécessaire Δe doit rester $< e$ et $< a - e$.

Ici l'épaisseur des lentilles est toujours négligée, nous en parlerons plus tard.

Or, nous avons

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1$$
$$a - e = 2\varphi_1 + \varphi_2 \quad ,$$

mais $\varphi_0 > \varphi_2$, et puisque φ_0 et φ_2 sont négatifs, tandis que φ_1 est positif,

$$e \text{ sera } < a - e \ ,$$

et il faudra donc satisfaire à la condition

$$\Delta e < e \ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_1}{2n + 1} < \varphi_0 + 2\varphi_1$$

ou bien

$$(4n + 1)\varphi_1 > -(2n + 1)\varphi_0 \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

et, en substituant dans cette équation φ_1 et φ_0 de (27), nous trouvons après quelques réductions :

$$\sec\alpha + 1 = \frac{1 + \cos\alpha}{\cos\alpha} > \frac{8(2n + 1)(2n + 2)}{(4n + 1)(4n + 3)} \quad \ldots \quad (38)$$

donc

$$\sec^2\alpha > \frac{(16n^2 + 32n + 13)^2}{(4n + 1)^2(4n + 3)^2}$$

Mais

$$tg^2\alpha = \frac{32(n + 1)(2n + 1)^3}{(4n + 3)^2} \times \frac{a}{F}$$

donc on déduira des deux dernières équations

$$F < \frac{(2n + 1)^2(4n + 1)^2}{8n + 5}a \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

et c'est là la limite que F ne peut pas surpasser.

En posant $n = 2$, 3 , 4 , etc., nous aurons

$$
\begin{array}{lll}
\text{pour } n = 2\,, & F < & 96\,\frac{3}{7}\,a\,, \\
\quad {''} \quad n = 3\,, & F < & 285\,{}^{1}_{2}\,\frac{6}{9}\,a\,, \\
\quad {''} \quad n = 4\,, & F < & 632\,{}^{2}_{3}\,\frac{5}{7}\,a\,, \\
\quad {''} \quad n = 5\,, & F < & 1185\,\frac{4}{5}\,a\,,
\end{array}
$$

Il résulte donc de ce calcul, que si, par exemple, on désire composer une lunette pancratique dont le grossissement varie entre l'unité et $\frac{4}{3}$, cette composition est possible en prenant pour la lentille du milieu une lentille positive, pourvu qu'on prenne $F < 28{,}5$ mètres, c'est-à-dire, en supposant qu'on veuille seulement déplacer la lentille du milieu, il faudra, aux limites du grossissement, $\frac{4}{3}$ et 1, accommoder l'oeil à une distance inférieure de 28,5 mètres. Au cas qu'on ne voulût pas exiger autant de l'accommodation de l'oeil, φ_0 , φ_1 et φ_2 deviendraient plus grands, mais $\triangle e$ aussi, et ce déplacement dépasserait e , c'est-à-dire la lunette n'offrirait pas assez d'espace pour le déplacement nécessaire de la lentille du milieu.

D'un autre côté, par le déplacement de l'objectif ou de l'oculaire, la distance focale peut toujours être corrigée; si donc on voulait prendre F beaucoup plus petit que la limite trouvée, $\triangle e$ pourrait devenir trop petit; alors l'échelle qui doit servir pour lire le grossissement, serait trop serrée et une petite erreur en $\triangle e$ causerait une erreur notable dans le grossissement V. Il s'agira donc de tenir le milieu entre ces deux extrêmes.

Si l'on veut tirer les valeurs de φ_0 et φ_1 des équations (35), qui s'appliquent au cas où l'on emploie l'objectif pour corriger la distance focale, il faudra observer qu'on n'aura plus $\triangle e < e$ mais $\triangle e < e + \triangle a$, c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_1}{2n+1} < \varphi_0 + 2\,\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{(2n+1)\,(2n+2)} \,.$$

En prenant les valeurs de φ_0 et φ_1 de (34) et la valeur de q de (35), le résultat sera le même que celui que nous avons déjà trouvé. Mais on y parviendra encore d'une autre manière. Car, si on avance la lentille du milieu jusqu'au contact avec l'objectif, on aura, en négligeant l'épaisseur des lentilles :

$$e = 0$$

La distance focale de tout le système, devient donc d'après les équations (1) et (2):

$$f = \frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_0\varphi_1 + \varphi_0 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 - a(\varphi_0 + \varphi_1)},$$

ou bien, d'après l'équation (5):

$$f = -\frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{e^2}$$

qu'on aurait pu déduire aussi de (19) en posant $\triangle e = e$. Cette valeur, prise avec signe contraire, est donc plus petite que F, c'est-à-dire, en empruntant à l'équation (27) les valeurs de φ_0, φ_1 et φ_2:

$$\frac{p^2 F}{\{2n + 2 + 2p(2n + 1)\}^2} < F,$$

donc

$$p < 2n + 2 + 2p(2n + 1)$$

$$(4n + 1) \times -p < 2n + 2$$

$$-p < \frac{2n + 2}{4n + 1}$$

ou, ayant égard à (29):

$$\frac{4n + 3}{8(2n + 1)}(1 + sec\,\alpha) < \frac{2n + 2}{4n + 1}$$

$$1 + sec\,\alpha < \frac{8(2n + 1)(2n + 2)}{(4n + 1)(4n + 3)}$$

équation que nous avons trouvée déjà plus haut, (éq. 38).

---

§ 7. LUNETTE PANCRATIQUE À LENTILLE DU MILIEU NÉGATIVE. SOLUTION DU PROBLÈME. LIMITE INFÉRIEURE DE f.

Jusqu'ici nous avons supposé que la distance focale φ_1 était positive. Si nous la supposons négative, et que nous corrigions la distance focale de la lunette par un déplacement de

l'oculaire, les équations (14) deviendront, vu que Δe est toujours positif:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} = 1 \qquad \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{n+1}{n}$$

donc

$$\frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{n}{n+1}$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \Delta e &= \frac{-\varphi_1}{2n+1} \\ \frac{\varphi_0}{\varphi_2} &= \frac{2n+2}{2n+1} \\ f &= -\frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\Delta e^2} = \frac{\varphi_0 \varphi_2}{-\varphi_1}(2n+1)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (40)$$

Dans ce cas, f devient donc positif, c'est-à-dire que, la lentille du milieu étant déplacée, la lunette entière équivaut à une lentille *positive;* donc, si la distance focale n'est pas corrigée par l'objectif ou par l'oculaire, il faudra ajuster l'oeil pour les rayons *convergents.*

Les trois équations, dont il faudra tirer φ_0, φ_1 et φ_2, sont donc les mêmes qu'au § 4, sauf qu'au lieu de F nous écrirons $-f$:

$$\left.\begin{aligned} &(7) & \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 &= a \\ &(22) & \frac{\varphi_0}{\varphi_2} &= \frac{2n+2}{2n+1} \\ &(40) & \frac{\varphi_0 \varphi_2}{\varphi_1} &= -\frac{f}{(2n+1)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Donc, comme dans (27)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= -p \times \frac{f}{(2n+1)^2} \\ \varphi_2 &= -p \times \frac{f}{(2n+1)(2n+2)} \\ \varphi_1 &= -p^2 \times \frac{f}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Mais en substituant ces valeurs dans (7), nous aurons, au lieu de l'équation (28), l'équation suivante :

$$p^2 + \frac{4n+3}{4(2n+1)}p + \frac{(n+1)(2n+1)}{2}\frac{a}{f} = 0 \quad . \; . \; (43)$$

Pour que cette équation ait des racines réelles, il faudra que

$$\frac{(4n+3)^2}{64(2n+1)^2} > \frac{(n+1)(2n+1)}{2}\frac{a}{f}$$

ou bien que

$$f > \frac{32(n+1)(2n+1)^3}{(4n+3)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

Si f est plus petit, il sera impossible de construire la lunette pancratique avec une lentille négative au milieu. Si f est plus grand que la limite trouvée, p aura deux racines négatives, car, en posant

$$\sin\alpha = \frac{4(2n+1)}{4n+3}\sqrt{2(n+1)(2n+1)\frac{a}{f}}$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{4n+3}{8(2n+1)}(1 \pm \cos\alpha) \\ \varphi_0 &= -p \times \frac{f}{(2n+1)^2} \\ \varphi_2 &= \frac{2n+1}{2n+2}\varphi_0 \\ \varphi_1 &= p\,\varphi_2 \\ e &= \varphi_0 + 2\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

Si, au contraire, la distance focale est corrigée par un déplacement de l'objectif, nous pourrons renverser en imagination la lunette, remplacer φ_0 par φ_2 et réciproquement, et nous aurons encore

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \times \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{n}{n+1} \qquad \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \times \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = 1$$

donc

$$\frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{n}{n+1}$$

et

$$\Delta e = \frac{-\varphi_1}{2n+1}$$

comme auparavant, mais

$$\frac{\varphi}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{2n+1}{2n}$$

et enfin

$$f = -\frac{\varphi_0\ \varphi_1\ \varphi_2}{\Delta e^2} = \frac{\varphi_0\,\varphi_2}{-\varphi_1}\ (2n+1)^2$$

Les équations à résoudre deviendront donc les mêmes que (33), sauf qu'au lieu de F, il faudra mettre $-f$:

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & \varphi_0 + 4\,\varphi_1 + \varphi_2 = a \\ (32) & \dfrac{\varphi_0}{\varphi_2} = \dfrac{2n+1}{2n} \\ (21) & \dfrac{\varphi_0\varphi_2}{\varphi_1} = -\dfrac{f}{(2n+1)^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

donc, en posant encore $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_0} = q$,

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2 = -q \times \dfrac{f}{(2n+1)^2} \\ \varphi_0 = -q \times \dfrac{f}{2n\,(2n+1)} \\ \varphi_1 = -q^2 \times \dfrac{f}{2n\,(2n+1)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

et ensuite

$$q^2 + \frac{4n+1}{4\,(2n+1)}\ q + \frac{n\,(2n+1)}{2}\ \frac{a}{f} = 0 \ \ldots \quad (48)$$

équation qui aura des racines réelles, si

$$f > \frac{32n\,(2n+1)^3}{(4n+1)^2}\ a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

alors on aura, en posant

$$\sin\,\alpha = \frac{4\,(2n+1)}{4n+1} \sqrt{2n\,(2n+1)\,\frac{a}{f}}\;,$$

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{4n+1}{8\,(2n+1)}\,(1 \pm \cos\alpha) \\ \varphi_2 &= -q \times \frac{f}{(2n+1)^2} \\ \varphi_0 &= \frac{2n+1}{2n}\,\varphi_2 \\ \varphi_1 &= q\,\varphi_0 \\ e &= \varphi_0 + 2\,\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (50)$$

§ 8. LIMITE SUPÉRIEURE DE *f*.

Aussitôt que *f* dépasse la limite trouvée en (44) ou (49), il existe pour chaque cas deux solutions. Mais pour la même raison que pour la lunette pancratique à lentille du milieu positive, il existe une limite supérieure que *f* ne peut pas dépasser, afin qu'il y ait assez d'espace pour le déplacement nécessaire de la lentille du milieu.

Si cette lentille est négative, $a - e$ sera $< e$, car

$$e = \varphi_0 + 2\,\varphi_1$$
$$a - e = \varphi_2 + 2\,\varphi_1$$

où φ_0 est positif, φ_1 est négatif, et d'après (45) et (50), $\varphi_2 < \varphi_0$. Notre équation de condition sera donc

$$\Delta\, e < a - e$$

ou bien

$$\frac{-\varphi_1}{2n+1} < 2\,\varphi_1 + \varphi_2$$

d'où l'on tire

$$-(4n+3)\,\varphi_1 < (2n+1)\,\varphi_2\,.$$

A présent il ne faudra pas employer les équations (42) mais bien les équations (47), et nous trouverons après la substitution des valeurs de φ_1 et φ_2 :

$$\frac{4n+3}{2n(2n+1)} q^2 f < -\frac{q f}{2n+1}$$

$$-q < \frac{2n}{4n+3}$$

ou bien, à cause de (45) ou (50) :

$$\frac{4n+1}{8(2n+1)}(1 \pm \cos\alpha) < \frac{2n}{4n+3}$$

$$1 \pm \cos\alpha < \frac{16n(2n+1)}{(4n+1)(4n+3)}$$

$$1 \pm \cos\alpha < \frac{32n^2+16n}{16n^2+16n+3} .$$

Or n étant toujours > 1, il sera toujours satisfait à cette équation quand on prend le signe inférieur; mais cette solution n'est pas celle qui correspond à la seule solution possible du problème de la composition d'une lunette pancratique à lentille de milieu positive. En prenant le signe supérieur, nous aurons

$$\cos\alpha < \frac{16n^2-3}{16n^2+16n+3}$$

donc

$$\cos^2\alpha < \frac{(16n^2-3)^2}{(16n^2+16n+3)^2}$$

d'où il résulte

$$\sin^2\alpha > 1 - \frac{(16n^2-3)^2}{(16n^2+16n+3)^2}$$

ou bien

$$\frac{32n(2n+1)^3}{(4n+1)^2}\,\frac{a}{f} > \frac{(16n+6)(32n^2+16n)}{(4n+1)^2(4n+3)^2}$$

d'où l'on tire

$$f < \frac{(2n+1)^2 (4n+3)^2}{8n+3} \, a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Prenons n successivement $= 2, 3, 4$ et 5, en y joignant les limites déjà trouvées, nous aurons la table suivante, où A indique que la distance focale est réglée par l'oculaire, et B, qu'elle est réglée par l'objectif.

n	Lentille du milieu positive Limites de F		Lentille du milieu négative Limites de f			
	Lim. inf.	Limite supérieure	Limite inférieure		Limite supérieure	
			A	B	Première solution (signe + dans l'équation (50))	Seconde solution signe — dans l'équ. (50)
2	0	$96\frac{3}{7}a$	$99\frac{21}{121}a$	$98\frac{62}{81}a$	$159\frac{4}{19}a$	Point
3	0	$285\frac{16}{29}a$	$195\frac{31}{225}a$	$194\frac{142}{169}a$	$408\frac{1}{3}a$	de
4	0	$632\frac{25}{37}a$	$323\frac{37}{361}a$	$322\frac{254}{289}a$	$835\frac{16}{35}a$	limite.
5	0	$1185\frac{4}{5}a$	$483\frac{45}{529}a$	$482\frac{398}{441}a$	$1488\frac{35}{43}a$	

§ 9. EXEMPLE DE CALCUL.

Posons, pour exemple de calcul, $a = 100$ millimètres, $n = 3$, (alors le grossissement s'étendra de 1 à $\frac{4}{3}$), et F ou $f = 230\,a = 23$ mètres, et nous serons sûrs que toutes les solutions seront possibles.

Le calcul me donna les résultats suivants :

	Lentille du milieu positive		Lentille du milieu négative			
	A	B	A		B	
			1e solution	2e solution	1e solution	2e solution
Formules employées.	(29)	(35)	(45)		(50)	
φ_0	−296,6	−299,8	+174,7	+ 76,8	+176,7	+ 77,5
φ_1	+164,025	+164,2	− 56,875	− 11,0	− 57,05	− 10,97
φ_2	−259,5	−257,0	+152,8	+ 67,2	+151,5	+ 66,4
e	31,45	28,6	60,95	54,8	62,6	55,6
$a-e$	68,55	71,4	39,05	45,2	37,4	44,4
Δe	23.4	23,45	8,13	1,57	8,15	1,57
$\frac{\varphi_0}{\varphi_2}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$
Lentille déplacée pour rétablir la distance focale	φ_2	φ_0	φ_2	φ_2	φ_0	φ_0
Quantité du déplacement — lim.sup.	+ 3,90	+ 2,93	− 1,03	− 0,20	− 1,36	− 0,26
Quantité du déplacement — lim. inf.	+ 2,93	+ 3,90	− 1,36	− 0,26	− 1,02	− 0,20

Dans les deux dernières lignes, le signe + signifie un déplacement par lequel la longueur de la lunette a est augmentée, et le signe —, un déplacement par laquel la lunette est raccourcie.

Il est évident que, dans la pratique, il n'existe pas de différence réelle entre les deux solutions A et B, car on évitera en tous cas les limites des inconnues. Prenons, pour chacun des cas, la moyenne arithmétique des deux solutions, et nous aurons:

	Lentille du milieu positive	Lentille du milieu négative 1e solution	2e solution
φ_0	— 298	+ 176	+ 77
φ_1	+ 164	— 57	— 11
φ_2	— 258	+ 152	+ 67
e	30	62	55
$a-e$	70	38	45

Ou bien, si l'on préfère que nous donnions les pouvoirs des lentilles en dioptries:

φ_0	— 3,35	+ 5,69	+ 12,96
φ_1	+ 6,09	— 17,56	— 90,91
φ_2	— 3,87	+ 6,57	+ 14,97.

La planche ci-jointe représente ces trois réponses. L'expérience devra montrer si la troisième solution vaut les deux premières. Elle a le désavantage que $\Delta\, e$ y est très petit, et que par conséquent les divisions del'échelle, qui donnera le grossissement, seront très serrées.

---

§ 10. ÉPAISSEUR DES LENTILLES.

Jusqu'ici nous avons négligé l'épaisseur des lentilles, mais elle ne peut être l'objet d'aucune difficulté, pourvu que, conformément à la théorie de Möbius, les distances focales soient comptées à partir des points principaux, et non à partir des surfaces. Les formules restent les mêmes, pourvu que, pour chaque lentille, on introduise tout l'espace entre les deux plans principaux, et que par chaque distance de deux lentilles l'on entende la distance des deux points principaux les plus rapprochés des deux lentilles. La seule quantité changée, c'est la limite supérieure de f; car quand la lentille du milieu est poussée contre l'objectif ou contre l'oculaire, ces deux points principaux restent encore à quelque distance l'un de l'autre; mais il n'y aura aucune difficulté à en tenir compte.

---

11. DÉDUCTION PLUS SIMPLE DES ÉQUATIONS PRINCIPALES DU PROBLÈME.

Les deux formules:

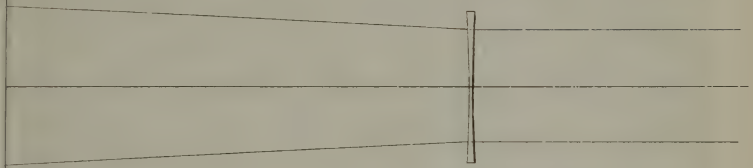
$$e = \varphi_0 + 2\,\varphi_1$$
$$a - e = \varphi_2 + 2\,\varphi_1$$

dont on tire aussi:

$$a = \varphi_0 + 4\,\varphi_1 + \varphi_2$$

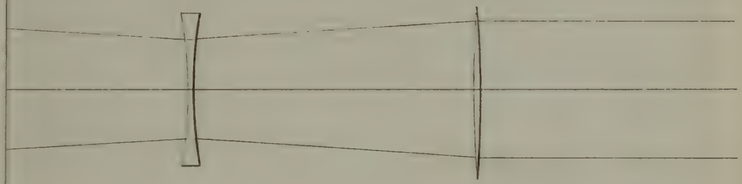
unette pancratique de M. DONDERS.

$F = 23000$ m.m. , $n = 3$.



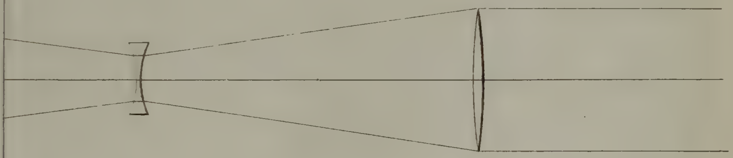
$= -298$, $\varphi_1 = +164$, $\varphi_2 = -258$ m m.

$e = 30$ $a - e = 70$ m m



$= +176$, $\varphi_1 = -57$, $\varphi_2 = +152$ m m.

$e = 62$ $a - e = 38$ m m



$= 77$, $\varphi_1 = -11$, $\varphi_2 = 67$ m m.

$e = 55$ $a - e = 45$ m m.

Gebr.s Reimeringer, Amst.

Ou bien, si l'on préfère que nous donnions les pouvoirs des lentilles en dioptries:

φ_0	$-3,35$	$+5,69$	$+12,96$
φ_1	$+6,09$	$-17,56$	$-90,91$
φ_2	$-3,87$	$+6,57$	$+14,97.$

La planche ci-jointe représente ces trois réponses. L'expérience devra montrer si la troisième solution vaut les deux premières. Elle a le désavantage que Δe y est très petit, et que par conséquent les divisions del'échelle, qui donnera le grossissement, seront très serrées.

---

§ 10. ÉPAISSEUR DES LENTILLES.

Jusqu'ici nous avons négligé l'épaisseur des lentilles, mais elle ne peut être l'objet d'aucune difficulté, pourvu que, conformément à la théorie de Möbius, les distances focales soient comptées à partir des points principaux, et non à partir des surfaces. Les formules restent les mêmes, pourvu que, pour chaque lentille, on introduise tout l'espace entre les deux plans principaux, et que par chaque distance de deux lentilles l'on entende la distance des deux points principaux les plus rapprochés des deux lentilles. La seule quantité changée, c'est la limite supérieure de f; car quand la lentille du milieu est poussée contre l'objectif ou contre l'oculaire, ces deux points principaux restent encore à quelque distance l'un de l'autre; mais il n'y aura aucune difficulté à en tenir compte.

---

11. DÉDUCTION PLUS SIMPLE DES ÉQUATIONS PRINCIPALES DU PROBLÈME.

Les deux formules:

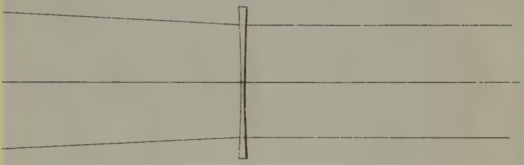
$$e = \varphi_0 + 2\,\varphi_1$$
$$a - e = \varphi_2 + 2\,\varphi_1$$

dont on tire aussi:

$$a = \varphi_0 + 4\,\varphi_1 + \varphi_2$$

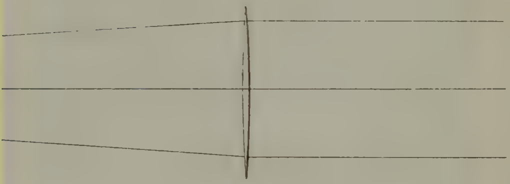
ue de M. DONDERS.

$n = 3.$



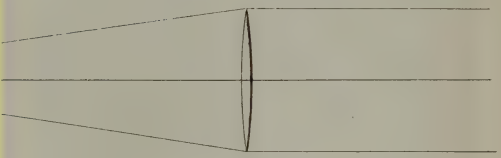
64 , $\varphi_2 = -258$ m m.

$a - e = 70$ m m



57 , $\varphi_2 = +152$ m m.

$a - e = 38$ m m



11 , $\varphi_2 = 67$ m m.

$a - e = 45$ m m.

Ou bien, si l'on préfère que nous donnions les pouvoirs des lentilles en dioptries:

φ_0	$-3{,}35$	$+5{,}69$	$+12{,}96$
φ_1	$+6{,}09$	$-17{,}56$	$-90{,}91$
φ_2	$-3{,}87$	$+6{,}57$	$+14{,}97.$

La planche ci-jointe représente ces trois réponses. L'expérience devra montrer si la troisième solution vaut les deux premières. Elle a le désavantage que Δe y est très petit, et que par conséquent les divisions de l'échelle, qui donnera le grossissement, seront très serrées.

§ 10. ÉPAISSEUR DES LENTILLES.

Jusqu'ici nous avons négligé l'épaisseur des lentilles, mais elle ne peut être l'objet d'aucune difficulté, pourvu que, conformément à la théorie de Möbius, les distances focales soient comptées à partir des points principaux, et non à partir des surfaces. Les formules restent les mêmes, pourvu que, pour chaque lentille, on introduise tout l'espace entre les deux plans principaux, et que par chaque distance de deux lentilles l'on entende la distance des deux points principaux les plus rapprochés des deux lentilles. La seule quantité changée, c'est la limite supérieure de f; car quand la lentille du milieu est poussée contre l'objectif ou contre l'oculaire, ces deux points principaux restent encore à quelque distance l'un de l'autre; mais il n'y aura aucune difficulté à en tenir compte.

11. DÉDUCTION PLUS SIMPLE DES ÉQUATIONS PRINCIPALES DU PROBLÈME.

Les deux formules:

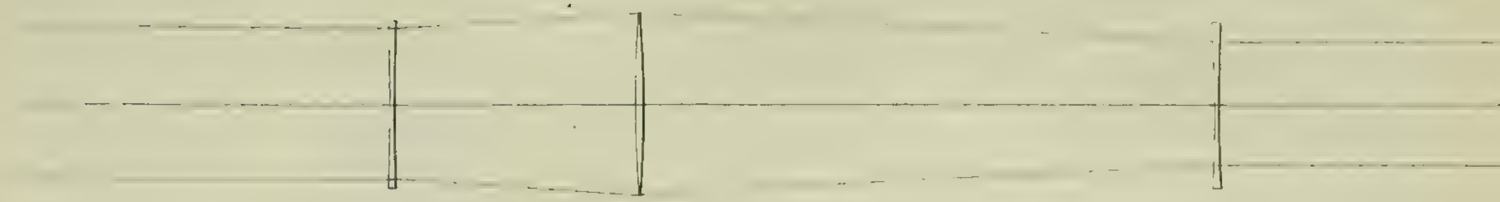
$$e = \varphi_0 + 2\,\varphi_1$$
$$a - e = \varphi_2 + 2\,\varphi_1$$

dont on tire aussi:

$$a = \varphi_0 + 4\,\varphi_1 + \varphi_2$$

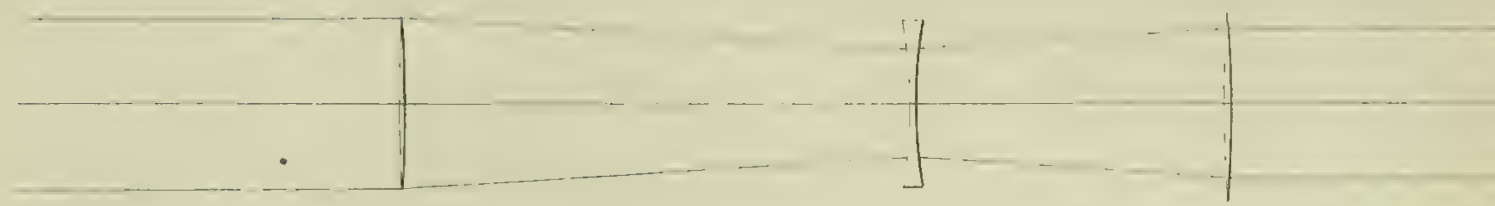
J. A. C. OUDEMANS, Lunette pancratique de M. DONDERS.

$a = 100$ m m , $F = 23000$ m m , $n = 3$.



Première Solution $\varphi_0 = -298$, $\varphi_1 = +164$, $\varphi_2 = -258$ m m.

$e = 30$ $a - e = 70$ m m



Deuxième Solution $\varphi_0 = +176$, $\varphi_1 = -57$, $\varphi_2 = +152$ m m.

$e = 62$ $a - e = 38$ m m

Troisième Solution $\varphi_0 = 77$, $\varphi_1 = -11$, $\varphi_2 = 67$ m m.

$e = 55$ $a - e = 45$ m m.

auraient pu être trouvées par un raisonnement très simple, car en considérant les lentilles comme positives, les rayons incidents parallèles, après avoir passé à travers l'objectif, se réuniront dans son foyer F. De là ils divergent vers la lentille du milieu, et après l'avoir passée ils se réunissent dans le foyer F', qui sera le foyer conjugué de F. De là ils divergent encore vers l'oculaire qu'ils quittent parallèlement à l'axe. Donc F' est aussi le foyer de l'oculaire, comme F est le foyer de l'objectif.

Si en déplaçant *un peu* la lentille du milieu, la netteté des images ne doit pas en souffrir, il faut qu'il n'y ait aucun changement dans la distance des deux foyers conjugués F et F', ce qui, comme on sait, n'est le cas que lorsque leur distance de la lentille moyenne est $2\varphi_1$ et que leur distance mutuelle est $4\varphi_1$.

Les deux équations :

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1$$
$$a - e = \varphi_2 + 2\varphi_1$$

s'en déduisent immédiatement.

---

§ 12. SOLUTION PLUS SIMPLE, EN NÉGLIGEANT LE DÉPLACEMENT DE L'OBJECTIF OU DE L'OCULAIRE.

Quand la lentille du milieu occupe sa position originale ou moyenne, la première image n'est ni agrandie ni réduite par cette lentille, le grossissement de la lunette est donc égal à $\frac{\varphi_0}{\varphi_2}$.
Mais si la lentille du milieu est avancée de la quantité très petite Δe, la distance de la première image à la lentille du milieu devient $2\varphi_1 - \Delta e$, et la distance de la lentille à la seconde image $2\varphi_1 + \Delta e$. Les dimensions des images sont proportionnelles à leur distance de la lentille; donc si la distance des deux foyers conjugués restait la même, nous aurions:

$$\frac{2\varphi_1 + \Delta e}{2\varphi_1 - \Delta e} \times \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{2\varphi_1 - \Delta e}{2\varphi_1 + \Delta e} \times \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = 1$$

d'où suivrait

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{2\,\varphi_1 + \Delta\, e}{2\,\varphi_1 - \Delta\, e} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\ .$$

La théorie plus exacte, donnée plus haut, nous donnait pour cette proportion $\frac{2n+2}{2n+1}$ ou $\frac{2n+1}{2n}$, selon que l'oculaire ou l'objectif était employé pour régler la distance focale.

---

§ 13. LIEU DES DIAPHRAGMES INTERNES OU EXTERNES.

Les figures de la planche montrent clairement que, dans aucune des trois constructions de la lunette pancratique, il ne se forme une image réelle dans la lunette, donc il ne faudra mettre nullepart des diaphragmes. Reste à examiner si on ne pourrait pas placer près de l'oeil un diaphragme laissant passer tous les rayons venant de l'objectif, ce qui est le cas lorsqu'il s'y forme une image réelle de l'objectif.

Nommons x la distance de la lentille du milieu jusqu'à l'image qu'elle forme de l'objectif, y la distance de l'oculaire jusqu'à l'image qu'il forme de cette image, et prenons x et y positifs quand ces distances sont du côté de l'oeil, nous aurons

$$x = \frac{\varphi_1\, e}{e - \varphi_1}$$

$$y = \frac{\varphi_2\,(a - e - x)}{a - e - x - \varphi_2}\ .$$

En y substituant $e = \varphi_0 + 2\,\varphi_1$, on aura

$$x = \frac{\varphi_1\,(\varphi_0 + 2\,\varphi_1)}{\varphi_0 + \varphi_1}$$

$$y = \frac{\varphi_2\,(\varphi_0\,\varphi_1 + \varphi_0\,\varphi_2 + \varphi_1\,\varphi_2)}{\varphi_0\,\varphi_1}.$$

Dans les trois solutions données plus haut, ces deux quantités sont négatives, savoir

$$x = -36{,}7 \qquad -29{,}7 \qquad -9{,}2$$
$$y = -75{,}5 \qquad -122{,}1 \qquad -283{,}7$$

il ne faut donc pas mettre de diaphragme du côté de l'oeil.

Mais en général x et y seront négatifs. En effet, en prenant d'abord la lentille du milieu positive, nous avons

$$e = 2\varphi_1 + \varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_0 \quad .$$

Mais $\varphi_1 - \varphi_0$ est négatif, donc $e < \varphi_1$. Les rayons partant du centre de l'objectif *divergent* donc après avoir traversé la lentille du milieu, et par conséquent y sera négatif.

Des rayons divergents traversant une lentille négative divergent encore davantage, l'oculaire est négatif; il n'y a donc pas d'image réelle derrière l'oculaire.

Considérons à présent la deuxième construction de la lunette pancratique, à lentille du milieu négative. Les rayons convergents, dessinés dans les figures, entre l'objectif et la lentille du milieu, deviennent divergents après avoir traversé celle-ci; et leur degré de divergence est précisément tel qu'après avoir traversé l'oculaire, ils quittent la lunette parallèlement à l'axe.

Mais les rayons qui partent du centre de l'objectif sont divergents; après avoir traversé la lentille du milieu, leur divergence est augmentée, et est toujours plus forte que celle des rayons dessinés dans la figure, et en considérant qu'après avoir traversé l'oculaire, ces derniers rayons sortent parallèles entre eux, nous en concluons que les premiers seront, en sortant, des rayons divergents.

---

§ 14. LA LUNETTE PANCRATIQUE PEUT-ELLE ÊTRE CONSTRUITE ACHROMATIQUEMENT ?

Pour répondre à cette question, nommons les rayons de courbure des lentilles, dont est composé la lunette, r_1, r_2; r_3, r_4; r_5, r_6; positifs, quand la convexité est tournée vers l'objet; les indices de réfraction pour la rouge et le violet n_r et n_v, n'_r et n'_v, n''_r et n''_v. Nous aurons

pour le rouge : pour le violet :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_0 &= \frac{1}{n_r-1}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1} & \varphi_0 &= \frac{1}{n_v-1}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}\\
\varphi_1 &= \frac{1}{n'_r-1}\cdot\frac{r_3 r_4}{r_4-r_3} & \varphi_1 &= \frac{1}{n'_v-1}\cdot\frac{r_3 r_4}{r_4-r_3}\\
\varphi_2 &= \frac{1}{n''_r-1}\cdot\frac{r_5 r_6}{r_6-r_5} & \varphi_2 &= \frac{1}{n''_v-1}\cdot\frac{r_5 r_6}{r_6-r_5}
\end{aligned}\right\} . \quad (52)$$

Si la lunette satisfait aux propriétés de la lunette pancratique pour les deux couleurs, les deux intervalles

(6) $$e = \varphi_0 + \varphi_1$$

et (8) $$a - e = 2\varphi_1 + \varphi_2$$

doivent être égaux pour ces deux couleurs. Supposons l'objectif et la lentille du milieu formés de la même espèce de verre, et substituons les valeurs (52) de φ_0 et de φ_2 pour les deux couleurs dans l'équations (6), nous aurons l'équation

$$\frac{1}{n_r-1}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1} + 2\,\frac{r_3 r_4}{r_4-r_3}\right) = \frac{1}{n_v-1}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1} + 2\,\frac{r_3 r_4}{r_4-r_3}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n_r-1} = \frac{1}{n_v-1},$$

équation fausse. L'équation $a - e = 2\varphi_1 + \varphi_2$ donnerait une équation analogue, il s'en suit donc qu'il n'est pas possible que la lentille pancratique soit achromatique en employant une seule espèce de verre pour les lentilles.

Supposons donc ces espèces différentes, alors nous aurons les deux équations

$$e = \frac{1}{n_r-1}\,\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1} + \frac{2}{n'_r-1}\,\frac{r_3 r_4}{r_4-r_3} = \frac{1}{n_v-1}\,\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1} + \frac{2}{n'_v-1}\,\frac{r_3 r_4}{r_4-r_3}$$

donc :

$$\left(\frac{1}{n_r-1} - \frac{1}{n_v-1}\right)\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1} + \left(\frac{1}{n'_r-1} - \frac{1}{n'_v-1}\right)\frac{2 r_3 r_4}{r_4-r_3} = 0$$

ou bien

$$\frac{n_v - n_r}{(n_r - 1)(n_v - 1)} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + \frac{n'_v - n'_r}{(n'_r - 1)(n'_v - 1)} \frac{2 r_3 r_4}{r_4 - r_3} = 0 \quad (53)$$

Prenons une couleur intermédiaire pour laquelle les indices de réfraction des verres sont n_m ; n'_m et n''_m , et pour laquelle on aura rigoureusement:

$$\varphi_0 = \frac{1}{n_m - 1} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \qquad \varphi_1 = \frac{1}{n'_m - 1} \frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3}$$

Supposons ensuite :

$$(n_r - 1)(n_v - 1) = (n_m - 1)^2$$
$$(n'_v - 1)(n'_v - 1) = (n'_m - 1)^2$$

ce qui ne peut pas être loin de la vérité, — du moins on pourra choisir les deux couleurs que nous avons nommées rouge et violet, de sorte que ces équations soient vraies à peu de chose près, et nous aurons:

$$\frac{n_v - n_r}{n_m - 1} \varphi_0 + 2 \frac{n'_v - n'_r}{n' - 1} \varphi_1 = 0$$

donc:

$$\frac{n'_v - r_r}{n'_m - 1} = - \tfrac{1}{2} \frac{\varphi_0}{\varphi_1} \frac{n_v - n_r}{n_m - 1} \; \ldots\ldots\ldots \; (54)$$

De même nous aurons par l'équation (8) :

$$\frac{n'_v - n'_r}{n'_m - 1} = - \tfrac{1}{2} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \frac{n''_v - n''_r}{n''_m - 1} \; \ldots\ldots \; (55)$$

Les fractions:

$$\frac{n_v - n_r}{n_m - 1} \; , \; \frac{n'_v - n'_r}{n'_m - 1} \; , \; \frac{n''_v - n''_r}{n''_m - 1}$$

peuvent être regardées comme les pouvoirs dispersifs des trois

lentilles, dont se compose la lunette, nommons les d, d' et d'' alors on tirera de (54) et (55):

$$d' = -\tfrac{1}{2}\frac{\varphi_0}{\varphi_1}\, d = -\tfrac{1}{2}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\, d''$$

ou bien:

$$d : d' : d'' = \frac{2}{\varphi_0} : \frac{-1}{\varphi_1} : \frac{2}{\varphi_2}$$

ou en l'appliquant à notre exemple,

pour la lunette de la 1re construction $= \frac{1}{149} : \frac{1}{164} : \frac{1}{129}$;

〃 〃 〃 〃 〃 2e 〃 $= \frac{1}{88} : \frac{1}{57} : \frac{1}{76}$;

〃 〃 〃 〃 〃 3e 〃 $= \frac{2}{77} : \frac{1}{11} : \frac{2}{67}$.

Si nous voulons nous contenter d'une approximation, nous pourrons supposer l'objectif et l'oculaire formés de la même espèce de verre; il faudra alors prendre les moyennes de la première et de la troisième fraction. On voit en tout cas que le pouvoir dispersif des lentilles négatives doit être le plus fort, savoir dans la 1re construction, le rapport est 1,18

〃 〃 2e 〃 〃 〃 〃 1,44

〃 〃 3e 〃 〃 〃 〃 6,5.

Les colonnes 1re, 4me et 7me de la table bien connue des coëfficients de réfraction de FRAUNHOFER (SCHUMACHER, Astron. Abhandlungen, 2e Heft, p. 31; HERSCHEL, traité de la lumière, traduit par VERHULST et QUÉTELET, I, 243), m'ont donné pour les pouvoirs dispersifs

du crown-glass n°. 9 0,0389
〃 〃 n°. 13 0,0383
〃 〃 lettre *M* 0,0439
〃 flint-glass n°. 13 0,0675
〃 〃 n°. 3 0,0650
〃 〃 n°. 30 0,0667
〃 〃 n°. 23 0,0673

En cas de besoin il ne serait donc pas difficile de trouver deux espèces de verre, dont les pouvoirs dispersifs fussent dans la proportion de 1 à 1,18, ou de 1 à 1,44.

Pour rendre achromatique la lunette pancratique de la troisième espèce, le rapport des pouvoirs dispersifs devrait être de 1 à 6,5. Il n'est pas probable qu'on puisse composer deux espèces de verre qui satisfassent à cette condition, mais il resterait alors toujours un moyen, celui de rendre tous les trois verres achromatiques. Mais pour l'usage ordinaire il n'est pas probable que le manque d'achromatisme soit génant.

Utrecht, 30 juillet 1877.

Cette note était déjà terminée, lorsque je reçus un exemplaire de la description très-claire de la lunette pancratique donnée par M. DONDERS lui-même. (Een pancratische kijker, door F. C. DONDERS, tiré des *Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool*, 3e reeks, deel V, blz. 1.). L'auteur à donné la préférence à la première construction, celle dans laquelle la lentille du milieu est positive. On y trouve les formules suivantes de M. GRINWIS :

Lentilles :

I. (Oculaire).	II. (Lentille du milieu).	III. (Objectif).
f	f'	f''

Soit :

$$-\frac{1}{f} = a \qquad \frac{1}{f'} = b \qquad -\frac{1}{f''} = c$$

la distance de I et II $= \Delta$
" " " II et III $= \Delta'$

Etant donnés Δ et Δ', trouver le grossissement m :

$$m = \frac{b - a + ab\,\Delta}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$m = \frac{a}{b - c + bc\,\Delta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En comparant les notations de M. GRINWIS avec les miennes, on verra que

$$a \qquad b \qquad c \qquad \Delta \qquad \Delta' \qquad m$$

de M. GRINWIS sont identiques à

$$-\frac{1}{\varphi_2} \qquad -\frac{1}{\varphi_1} \qquad -\frac{1}{\varphi_0} \qquad a-e \qquad e \qquad V$$

dont je me suis servi dans mes calculs.

En remplaçant ses lettres par les miennes, on retrouve les équations (9_a) et (9_b).

Les équations (3), (4) et (5) citées pas M. DONDERS se déduisent de ses équations (1) et (2).

L'on verra que M. DONDERS désire avoir la lunette pancratique encore plus courte que nous ne l'avons supposée; (dans l'exemple qu'il cite $a = 36{,}28$ millimètres); mais ça ne change pas notre théorie qui reste toujours applicable.

Pour retrouver l'exemple $a = 12$, $b = 19$, $c = 11$ qu'il a choisi, il faudra mettre selon notre notation $a = 36{,}28$, $n = 5{,}5$ et $F = 20727$, en appliquant alors les formules (35), on trouvera

$$\begin{aligned} \alpha &= 45^\circ\ 5',6 \\ log\ q &= 9{,}7626 \text{ donc } q = 0{,}5789 \\ \varphi_2 &= -83{,}33 \\ \varphi_0 &= -90{,}91 \\ \varphi_1 &= +52{,}63 \end{aligned}$$

qui correspondent à 12, 11 et 19 dioptries.

Pour la position moyenne de la lentille du milieu on aura :

$$\begin{aligned} e &= \varphi_0 + 2\,\varphi^1 = 14{,}35 \\ a - e &= 21{,}93 \end{aligned}$$

ensuite

$$\Delta e = \frac{\varphi_1}{2n+1} = 4{,}39$$

enfin pour la limite supérieure de $V = \frac{13}{11}$

$$\Delta a = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)} = 0{,}34$$

et pour la limite inférieure $V = 1$

$$\Delta a = \frac{\varphi}{2n\,(2n+1)} = 0{,}40$$

ce qui s'accorde parfaitement avec les nombres de M. DONDERS, car

$$21{,}93 - 17{,}54 = 4{,}39$$
$$\text{et } 36{,}68 - 36{,}28 = 0{,}40$$

Pour construire une lunette pancratique à lentille du milieu négative, il faudra prendre la valeur de f plus grande ; car on trouve pour cette quantité, en posant $n = 5{,}5$:

une limite inférieure. . . . . = 575 a ,
et une limite supérieure . . . . = 1915 a ,
tandis que chez nous . . . . $F =$ 571 a.

En prenant par exemple $n = 5{,}5$, $a = 36{,}28$, $F = 700a = 25396$, on aura les trois solutions suivantes :

	φ_0	φ_1	φ_2	e	$a-e$
1re Solution	− 108,1	+ 61,0	− 99,5	13,9	22,5
2e 〃	+ 65,4	− 22,3	+ 60,2	20,8	15,6
3e 〃	+ 26,6	− 3,7	+ 24,4	19,2	17,0

Utrecht, 28 septembre 1877.

RAPPORT

VAN DEN HEER

D. BIERENS DE HAAN,

OMTRENT

DE STUKKEN VAN EDWARD SANG

OVER DE TAFELS DER SINUSSEN VAN IEDER $\frac{1}{10000}$ VAN DEN RECHTEN HOEK, BEREKEND TOT 33 EN GEGEVEN IN 25 DECIMALEN.

In die Tafels vindt men de voormelde sinussen, in twee kolommen op iedere bladzijde; onder, niet naast, iedere waarde zijn de eerste, en daaronder weder de tweede verschillen geplaatst, de eerste met het teeken $+$, dus de tweede met het teeken $-$. Op die wijze geeft iedere folio bladzijde 40 waarden, voor opeenvolgende $\frac{1}{10000}$ deelen van den rechten hoek. Deze inrichting der tafel, geheel in strijd met de tegenwoordige, is eene navolging der eerste Logarithmen-sinus-tafels van BRIGGS en zijne opvolgers, ook van de eerste van onzen VLACK. Eerst in 1633 in zijne Trigonometria Artificialis brengt VLACK de verschillen in eene afzonderlijke kolom, naast de waarden zelve; en deze inrichting is sedert algemeen gevolgd. Waar het trouwens een snel gebruik der tafels geldt, is die nieuwe inrichting veel gemakkelijker.

Vraagt men nu, of deze Tafel eene aanwinst is voor het dagelijksch gebruik: dan moet het antwoord ontkennend luiden. Immers zij is van te grooten omvang; de inrichting belet een snel overzicht; de verdeeling in $\frac{1}{10000}$ deelen van den rechten hoek is niet overeenkomstig het gebruik; en, last but not least,

het zijn geene logarithmen, die men hier vindt, maar eenvoudig de sinussen zelve. In dit opzicht kan zij niet in de schaduw staan van de kleinere tafels met vijf of zeven decimalen die voldoende en veel beter voor dat doel zijn.

Maar wendt men het oog naar berekeningen in de hoogere wiskunde, dan keeren zich al die beweegredenen ten voordeele.

De *uitgebreidheid*, ontstaande door een opnemen van 25 decimalen uit een berekend aantal van 33 decimalen, is voor juistheids-berekeningen van groot gewicht, indien slechts de opgegevene waarden volkomen te vertrouwen zijn. Daartoe behoorde voorzeker een stereotyp-druk; hiervan echter scheen de schrijver te hebben moeten afzien wegens de kosten, maar gelukkig is hij sedert daarop weder teruggekomen. Overigens evenwel heeft hij geen arbeid geschroomd. Zoo heeft hij bijv. de geheele tafel opnieuw opgebouwd, alleen uit de reeds verkregen tweede verschillen; waren deze dus onzuiver geweest, dan moesten de fouten zich door ophooping hebben verraden. Vervolgens heeft hij eerst den boog van 100 graden (den rechten hoek) in vijf deelen verdeeld, door eene vijfde machtsvergelijking, dan vier maal den hoek gehalveerd door eene tweede machtsvergelijking, dan verder drie maal in vijf deelen verdeeld, om te komen tot $\frac{1}{5} \times 100^0 \times \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{5^3}$, dat is tot $1'$. Daarbij berekende hij de veelvouden van cosvers $25'$, cosvers $5'$, cosvers $1'$, ten einde de grootte der onzekerheid op een derde terug te brengen; en gebruikte in het algemeen al zulke proef-formulen, als dienen om telkens, langs verschillenden weg, den graad van nauwkeurigheid te toetsen, en te waarschuwen als er iets misdreven was.

De *inrichting* heeft, zoo als VLACK reeds deed opmerken, het groote voordeel, dat zij gereedelijk aanleiding geeft, om op het gezicht alleen reeds, op de waarden door middel van hunne verschillen, en wederkeerig op die verschillen door de naastbij staande waarden, toezicht te houden. Zij is juist van dien aard, dat zij het op den voet volgen van berekeningen gemakkelijk maakt, vooral, waar het bijv. geldt de berekening en tabuleering van opvolgende waarden eener functie; en dit groote voordeel weegt stellig veel meer, dan het minder snelle overzicht, hier

is toch *snelheid* alles behalve hoofdzaak, *bespoediging* onzer uitkomsten volstrekt noodzakelijk.

De *verdeeling* der tafel, die bij onze sexagesimale indeeling in de praktijk moeijelijkheden zoude kunnen geven, levert die volstrekt niet op bij hetgeen wij hier op het oog hebben. Wil men bijv. eene reeks berekenen, die naar den sinus of den cosinus van opvolgende veelvouden van eenig argument geordend is, dan is er volstrekt geen bezwaar in gelegen, dat argument als $\frac{1}{10000}$ deel (of een veelvoud daarvan) van den rechten hoek te bepalen.

De *natuurlijke sinussen* zijn bij ons onderwerp juist van evenveel, soms zelfs van veel grooter waarde dan de logarithmische; waar het bijv. geldt reeksen als bovenvermelde, met eenvoudigen, algemeenen term; vordert zulk een term berekening met logarithmen, dan ware zeker een tafel der logarithmische sinussen, mits van dezelfde naauwkeurigheid, te verkiezen; maar ook deze wil de heer SANG ons toezeggen.

De gestelde vraag, of deze tafels eene aanwinst voor de wetenschap zouden zijn, behoort nog op geheel anderen grond bevestigend beantwoord te worden.

Thans wordt er van juistheids-berekeningen veel meer gevorderd dan voorheen. De logarithmentafels van SCHRÖN bijv. hebben geleid tot het ontdekken van 456 fouten in de vroeger beroemde tafels van CALLET (zie mijn opstel „Iets over logarithmentafels", Verslagen en Meded., Afd. Natuurk. XIV. 1862). Een belangrijk overzicht over de naauwkeurigheid der verschillende logarithmentafels gaf ons GERNETH. En nu zijn in dit opzicht door de berekeningen van SANG onverwachte uitkomsten verkregen. Reeds in 1874 toch gaf deze zijne logarithmen met 9 decimalen uit, opgemaakt naar zijne tot 15 decimalen berekende logarithmen; terwijl hij tot 10000 deze logarithmen in 26 decimalen berekend had.

Bij die berekening van de logarithmen van priemgetallen in 28 decimalen, gebruikte hij telkens twee verschillende formulen; bijv. voor 8447 de volgende twee

$$2.3769.10^8 + 1 = 3.37.251.3203.8447$$

en

$$643.10^7 - 1 = 3.89.2851.8447\,;$$

terwijl hij later denzelfden logarithmus toetste aan de twee formulen

$$2017.10^6 + 1 = 73.3271.8447$$

$$\text{en } 8447.10^4 + 1 = 3.7.11.37.9883\,;$$

zoodat nu die logarithmus van 8447 wel zeker juist was.

Met zijne uitkomsten, en hare eerste en tweede verschillen vergeleek SANG de standaard-logarithmentafels van HENRY BRIGGS (1620), van ADRIAAN VLACK (1628), van GEORG VEGA (1794), — die eenvoudig een juiste afdruk van VLACK's tafelen (met hare fouten) bleken te zijn; en eindelijk ook de manuscript-logarithmen, door het Fransche Cadaster onder PRONY berekend. Omtrent deze laatste is er in den laatsten tijd door LEFORT en SANG o. a. veel geschreven.

Het is toch bekend, dat LEGENDRE in zijne Exercices de Calcul Intégral, Tome III, uit die tafels overnam de logarithmen der priemgetallen tusschen 1163 en 10007, in 19 decimalen. SANG vergeleek deze met de door hem tot 28 decimalen berekende, en vond toen boven de 1900 (dat is, na de reeds door ABRAHAM SHARP berekende logarithmen) slechts 6, die niet fautief waren, tegen 887, die valsch waren; bij 33 daarvan bedroeg de fout meer dan 9. En, wat zeker tegen eene goede berekeningsmethode pleitte, de fouten waren meerendeels alle in dezelfde richting. SANG heeft daarop, en m. i. terecht beweerd, dat de methode, hoezeer er tot zesde verschillen werden gebruikt, verkeerd was, en wel niet tot juiste uitkomsten kon voeren; dat men dus eigenlijk het best deed, deze berekeningen als niet bestaande te beschouwen.

Zoowel dus, omdat er gebleken is gebrek te zijn aan genoegzaam betrouwbare tafels van zulke uitbreiding, als omdat de tafels van EDWARD SANG belooven in die leemte te zullen voorzien; en ten derde nog, omdat uit den aard der zake zulke uitgaven, wegens de kosten, niet in het bereik van bijzondere personen liggen; heb ik de eer aan de Akademie voor te stellen

1°. voor een exemplaar van de tafels van EDWARD SANG in te teekenen;

2°. aan Zijne Exc. den Minister van Binnenl. Zaken in overweging te geven, ten behoeve der Bibliotheeken onzer Akademiën voor drie exemplaren in te teekenen.

Leiden, 24 November 1877.

is toch *snelheid* alles behalve hoofdzaak, *bespoediging* onzer uitkomsten volstrekt noodzakelijk.

De *verdeeling* der tafel, die bij onze sexagesimale indeeling in de praktijk moeijelijkheden zoude kunnen geven, levert die volstrekt niet op bij hetgeen wij hier op het oog hebben. Wil men bijv. eene reeks berekenen, die naar den sinus of den cosinus van opvolgende veelvouden van eenig argument geordend is, dan is er volstrekt geen bezwaar in gelegen, dat argument als $\frac{1}{10000}$ deel (of een veelvoud daarvan) van den rechten hoek te bepalen.

De *natuurlijke sinussen* zijn bij ons onderwerp juist van evenveel, soms zelfs van veel grooter waarde dan de logarithmische; waar het bijv. geldt reeksen als bovenvermelde, met eenvoudigen, algemeenen term; vordert zulk een term berekening met logarithmen, dan ware zeker een tafel der logarithmische sinussen, mits van dezelfde naauwkeurigheid, te verkiezen; maar ook deze wil de heer SANG ons toezeggen.

De gestelde vraag, of deze tafels eene aanwinst voor de wetenschap zouden zijn, behoort nog op geheel anderen grond bevestigend beantwoord te worden.

Thans wordt er van juistheids-berekeningen veel meer gevorderd dan voorheen. De logarithmentafels van SCHRÖN bijv. hebben geleid tot het ontdekken van 456 fouten in de vroeger beroemde tafels van CALLET (zie mijn opstel „Iets over logarithmentafels", Verslagen en Meded., Afd. Natuurk. XIV. 1862). Een belangrijk overzicht over de naauwkeurigheid der verschillende logarithmentafels gaf ons GERNETH. En nu zijn in dit opzicht door de berekeningen van SANG onverwachte uitkomsten verkregen. Reeds in 1874 toch gaf deze zijne logarithmen met 9 decimalen uit, opgemaakt naar zijne tot 15 decimalen berekende logarithmen; terwijl hij tot 10000 deze logarithmen in 26 decimalen berekend had.

Bij die berekening van de logarithmen van priemgetallen in 28 decimalen, gebruikte hij telkens twee verschillende formulen; bijv. voor 8447 de volgende twee

$$2.3769.10^8 + 1 = 3.37.251.3203.8447$$

en

$$643.10^7 - 1 = 3.89.2851.8447\,;$$

terwijl hij later denzelfden logarithmus toetste aan de twee formulen

$$2017.10^6 + 1 = 73.3271.8447$$

$$\text{en } 8447.10^4 + 1 = 3.7.11.37.9883;$$

zoodat nu die logarithmus van 8447 wel zeker juist was.

Met zijne uitkomsten, en hare eerste en tweede verschillen vergeleek SANG de standaard-logarithmentafels van HENRY BRIGGS (1620), van ADRIAAN VLACK (1628), van GEORG VEGA (1794), — die eenvoudig een juiste afdruk van VLACK's tafelen (met hare fouten) bleken te zijn; en eindelijk ook de manuscript-logarithmen, door het Fransche Cadaster onder PRONY berekend. Omtrent deze laatste is er in den laatsten tijd door LEFORT en SANG o. a. veel geschreven.

Het is toch bekend, dat LEGENDRE in zijne Exercices de Calcul Intégral, Tome III, uit die tafels overnam de logarithmen der priemgetallen tusschen 1163 en 10007, in 19 decimalen. SANG vergeleek deze met de door hem tot 28 decimalen berekende, en vond toen boven de 1900 (dat is, na de reeds door ABRAHAM SHARP berekende logarithmen) slechts 6, die niet fautief waren, tegen 887, die valsch waren; bij 33 daarvan bedroeg de fout meer dan 9. En, wat zeker tegen eene goede berekeningsmethode pleitte, de fouten waren meerendeels alle in dezelfde richting. SANG heeft daarop, en m. i. terecht beweerd, dat de methode, hoezeer er tot zesde verschillen werden gebruikt, verkeerd was, en wel niet tot juiste uitkomsten kon voeren; dat men dus eigenlijk het best deed, deze berekeningen als niet bestaande te beschouwen.

Zoowel dus, omdat er gebleken is gebrek te zijn aan genoegzaam betrouwbare tafels van zulke uitbreiding, als omdat de tafels van EDWARD SANG belooven in die leemte te zullen voorzien; en ten derde nog, omdat uit den aard der zake zulke uitgaven, wegens de kosten, niet in het bereik van bijzondere personen liggen; heb ik de eer aan de Akademie voor te stellen

1°. voor een exemplaar van de tafels van EDWARD SANG in te teekenen;

2°. aan Zijne Exc. den Minister van Binnenl. Zaken in overweging te geven, ten behoeve der Bibliotheeken onzer Akademiën voor drie exemplaren in te teekenen.

Leiden, 24 November 1877.

EENIGE BESCHOUWINGEN

NAAR AANLEIDING VAN HET

GROOTSTE AANTAL VEELVOUDIGE PUNTEN EENER ALGEBRAÏSCHE KROMME.

DOOR

P. H. SCHOUTE.

1. In de theorie der vlakke kromme lijnen komt de bekende stelling voor:

> "Een enkelvoudige kromme van den n^{den} graad (d. i. een kromme van den n^{den} graad, die niet uit krommen van lageren graad is samengesteld) kan hoogstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ dubbelpunten hebben."

Het bewijs van deze stelling wordt gewoonlijk *) aldus gegeven: Had de kromme C_n een dubbelpunt meer, dan zou men door deze $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ en nog $n-3$ andere punten van C_n een juist door deze

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+1+n-3=\tfrac{1}{2}(n-2)(n-2+3)$$

punten bepaalde kromme H_{n-2} van den $n-2^{den}$ graad kunnen brengen, die met de gegevene

$$2\left\{\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right\}+n-3=n(n-2)+1$$

*) L. CREMONA, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*, übersetzt von M. CURTZE, Greifswald 1865, blz. 49.
G. SALMON, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, übersetzt von Dr. W. FIEDLER, Leipzig 1873. blz. 34.

snijpunten oplevert. En daar dit getal hoogstens $n\,(n-2)$ zijn kan, wanneer de krommen C_n en H_{n-2} geen kromme van lageren graad gemeen hebben — welk geval zich hier niet kan voordoen, omdat C_n enkelvoudig verondersteld en H_{n-2}, die niet enkelvoudig behoeft te zijn, van lageren graad is dan C_n — voert het aannemen van een dubbelpunt meer tot een ongerijmdheid en moet $\frac{1}{2}(n-1)\,(n-2)$ dus als een grens van grootheid voor het aantal dubbelpunten eener enkelvoudige kromme C_n beschouwd worden.

---

2. De behandelde stelling is voor de kromme lijnen, wier graad niet meer dan acht bedraagt, meer bewaarheid dan bewezen door CRAMER *). Zij is in haar algemeenen vorm het eerst door PLÜCKER †) uitgesproken. Afgescheiden van haar juistheid moet echter het bovenstaande bewijs veroordeeld worden. Want de gegevene redeneering heeft weinig of geen waarde, zoolang daarbij niet tevens aangetoond is, dat het aannemen van een hulpkromme H van een anderen dan den $n-2^{\text{den}}$ graad in geen geval tot een *geringere* waarde van het grootste aantal dubbelpunten voeren kan.

Ik heb dus bij verschillende schrijvers naar de bedoelde toevoeging aan bovengenoemd bewijs gezocht. Bij SALMON-FIEDLER §) vond ik de geheel juiste, maar wel wat machtspreukige opmerking: „Wir bemerken, dass dieser Beweiss nur zeigt, dass Curven nicht mehr als eine gewisse Anzahl von Doppelpunkten haben können, aber nicht, was jedoch wirklich der Fall ist, dass sie auch eben so viele besitzen können." Bij CLEBSCH-LINDEMANN **), die $n - 2$ door $n-1$ vervangt, was ook de onmis-

---

*) CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1750, § 175—181.

†) Dr. J. PLÜCKER, *Theorie der Algebraïschen Curven*, Bonn 1839, blz. 215.

§) t. a. p.

**) A. CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, bearbeitet von Dr. F. LINDEMANN, Leipzig 1875, blz. 352.

bare toevoeging achterwege gebleven. Alleen bij PLÜCKER *) vond ik de keus van den graad der hulpkromme gerechtvaardigd; evenwel bleek het mij daarbij spoedig, dat de opsteller van het theorema door een onjuiste redeneering tot het juiste resultaat gekomen en het bewijs van de bekende stelling tot dus ver nog niet geleverd is.

---

3. Ik laat het bewijs van PLÜCKER hier volgen:

„Es ist leicht, wenn die Ordnung n einer Curve gegeben ist, das Maximum ihrer möglichen Doppelpuncte, unter welche hier auch ihre Spitzen mitzuzählen sind, zu bestimmen. Es betrage überhaupt die Anzahl der Doppelpuncte z. Dann lässt sich durch diese z Doppelpuncte und durch $\left(\frac{p(p+3)}{1.\,2}-z\right)$ beliebig auf dem Umfange der Curve angenommene Puncte eine Curve der p Ordnung legen. Somit ist nothwendig, weil in jedem Doppelpuncte zwei Durchschnitte der beide Curven zusammenfallen,

$$2z+\left(\frac{p(p+3)}{1.\,2}-z\right) \overline{\overline{<}}\; np\ ,$$

mithin

$$z \overline{\overline{<}}\; np-\frac{p(p+3)}{1.\,2}$$

Hierdurch ist das Maximum fur solche Doppelpuncte einer Curve der n Ordnung, durch welche eine Curve der p Ordnung sich legen lässt, gegeben: *das absolute Maximum* ist also das Maximum des Ausdrückes

$$np-\frac{p(p+3)}{1.\,2}=\frac{p(2n-3-p)}{1.\,2},$$

---

*) t. a p.

wenn wir nach einander für p alle möglichen ganzen Zahlen einsetzen. Dieses Maximum entsprecht überhaupt:

$$p = 2n - 3 - p$$

und, wenn p eine ganze Zahl sein soll, gleichmässig:

$$p = n - 1, \qquad p = n - 2.$$

Das gesuchte Maximum wird hiernach

$$z = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.$$

---

4. Uit het voorgaande blijkt, dat PLÜCKER het grootste aantal dubbelpunten z, dat een hulpkromme Γ_p aan C_n toestaat te bezitten, als een functie van p beschouwd en hij de geheele waarde van p zoekt, die deze functie tot een *maximum* maakt. Dit laatste is echter klaarblijkelijk de eisch van het vraagstuk niet. Veeleer moet de geheele waarde van p bepaald worden, waarvoor het grootste aantal dubbelpunten een *minimum* is. Hiermee is de fout aangewezen, die PLÜCKER heeft begaan.

---

5. Omdat de vorm $\frac{p(2n-3-p)}{1.2}$, als functie van p beschouwd, voor geen analytisch minimum vatbaar is, zal dit evenmin met z, het grootste geheele getal dat in dien vorm vervat is, het geval kunnen zijn. Wat hiermee samenhangt, de tweedemachtsvorm in p zal, zooals bekend is, hoe langer zoo kleiner worden, wanneer men aan p waarden toekent, die steeds meer van $n - \frac{3}{2}$ verschillen. Het oplossen van de vraag moet dus bestaan in het vinden van de geheele waarde van p, die zoo veel van $n - \frac{3}{2}$ verschilt als de beperking van het vraagstuk dit toelaat. Hiertoe ben ik den gang van het onvolledige bewijs, waarvan ik uitging, gevolgd.

---

6. Is z als boven het grootste aantal dubbelpunten, dat een hulpkromme van den p^{den} graad H_p aan C_n toestaat te bezitten en stelt y het aantal der punten van C_n voor, die men ter bepaling van H_p aan $z+1$ dubbelpunten van C_n zou moeten toevoegen, dan moeten deze grootheden aan de twee vergelijkingen

$$(z+1)+y=\frac{p(p+3)}{2}$$

$$2(z+1)+y > np$$

voldoen. Want in dit geval voert het aannemen van $z+1$ dubbelpunten tot een ongerijmdheid.

Is k een geheel getal, dat niet negatief kan zijn, dan mag de laatste van deze twee vergelijkingen vervangen worden door

$$2(z+1)+y=np+1+k$$

Hieruit volgt dat k nul gesteld moet worden. Want, zijn de grootheden z, y en p zoo bepaald, dat zij voldoen aan de vergelijkingen

$$(z+1)+y=\frac{p(p+3)}{2}$$

$$2(z+1)+y=np+1+k\ ,$$

dan voldoen $z-k$, $y+k$ en p ook aan

$$(z-k+1)+(y+k)=\frac{p(p+3)}{2}$$

$$2(z-k+1)+(y+k)=np+1\ ;$$

zoodat het grootste aantal dubbelpunten niet z maar $z-k$ zou zijn. En vervangt men dan $z-k$ door z_1 en $y+k$ door y_1, dan vindt men

$$\left.\begin{aligned}(z_1+1)+y_1&=\frac{p(p+3)}{2}\\ 2(z_1+1)+y_1&=np+1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Met weglating der accenten geeft oplossing naar y en z

$$\left.\begin{array}{l} y = p^2 - (n-3)p - 1 \\ z = \dfrac{p}{2}(2n - 3 - p) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2),$$

van welke vergelijkingen de laatste boven reeds gevonden is.

---

7. Ter beantwoording van de vraag kan, zooals van zelf spreekt, slechts een positieve waarde van p in aanmerking komen. Verder moet de verlangde p kleiner dan n zijn. Want het aannemen van de onderstelling, dat p grooter of gelijk aan n is, verlamt de kracht van het bewijs; wijl dan het geval, dat C_n een samenstellend deel van H_p uitmaakt of dat beide krommen identisch zijn, niet is uitgesloten. Eindelijk moet de verlangde waarde van p het aantal dubbelpunten z positief en het aantal toegevoegde punten y niet negatief maken. Aan dit alles wordt tegelijkertijd alleen voldaan wanneer

$$n - 3 < p < n$$

is; zoodat men aan p slechts de waarden $n-2$ en $n-1$ toekennen kan. En deze geven aan z, omdat zij evenveel van $n - \frac{3}{2}$ verschillen, dezelfde waarde, nl. de door PLÜCKER aangegevene.

Dat $p > n - 3$ moet zijn, volgt onmiddellijk uit de eerste vergelijking (2), wanneer men haar in den vorm

$$y + 1 = p\{p - (n-3)\}$$

schrijft. Want terwijl $y+1$ en dus ook y voor $p < n - 3$ negatief wordt, wordt $y+1$ nul en y dus nog negatief voor $p = n - 3$.

Deze voorwaarde verklaart ook waarom de bepaling van het minimum van het maximum van z tot dezelfde uitkomst voert als die van het absolute maximum. Het is namelijk niet mogelijk het grootste aantal dubbelpunten van C_n met behulp van een kromme H van lageren dan den $n-2^{\text{den}}$ graad te

beperken; omdat het grootste aantal $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, dat zoo als straks blijken zal werkelijk voorkomen kan, het aantal bepalende punten dier hulpkrommen van lageren graad overtreft.

---

8. Is door het bovenstaande de bewering van PLÜCKER gerechtvaardigd, er is nog niet mee aangetoond, dat er werkelijk kromme lijnen van den n^{den} graad voorkomen, die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dubbelpunten hebben. Hoewel er bewezen is, dat de hulpkromme H_p, die het grootste aantal dubbelpunten van C_n een minimum maakt, van den $n-1$ of $n-2^{den}$ graad is en dit aantal dubbelpunten daardoor $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ zijn kan, is het nog zeer goed mogelijk, dat geheel andere beschouwingen het gezochte aantal tot een geringer bedrag terugvoeren. Ten einde dit goed in het oog te doen springen, wil ik — alvorens tot de behandeling der vraag of er werkelijk enkelvoudige krommen C_n met $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dubbelpunten voorkomen, over te gaan — het grootste aantal k-voudige punten bepalen, dat een enkelvoudige kromme C_n zou kunnen bezitten, wanneer een geheel met de voorgaande overeenstemmende redeneering den eenigen weg ter bepaling vau dit aantal aangaf. Werkelijk zal uit het bekende verband tusschen veelvoudige en dubbelpunten dan blijken, dat het door mij gevondene maximum in de meeste gevallen door een veel kleiner getal vervangen moet worden, maar dit neemt niet weg, dat mijne uitkomsten de reeds bekende in die enkele gevallen aanvullen en de wijze, waarop zij verkregen worden, haar gewicht kan blijven behouden. Na het voorgaande zal het niet noodig zijn aan te wijzen, welke toevoeging de uitdrukking „het grootste aantal veelvoudige punten" in de eerstvolgende bladzijden met het oog op de mogelijkheid om dit aantal langs anderen weg nog meer te beperken eigenlijk wel behoeven zou.

---

9. De bepaling van het grootste aantal drievoudige punten eener kromme C_n levert geen moeielijkheden op, zoodra men dit getal voor een kromme C_{n-1} en bovendien den graad p van de hulpkromme H_p, die dit laatste beperkt, kent. Weet men eenmaal dat een kromme C_{12} hoogstens 22 drievoudige punten heeft, omdat 23 drievoudige punten met vier andere punten van C_{12} een kromme H_6 bepalen, die meer dan 72, namelijk $23 \times 3 + 4$ of 73 punten met C_{12} gemeen heeft, dan vindt men ook onmiddellijk, dat een kromme C_{13}, die met de door 27 punten bepaalde kromme H_6 nu 78 punten gemeen hebben kan, hoogstens 25 drievoudige punten heeft, wijl $26 \times 3 + 1 = 79$ is. Hierbij kan het natuurlijk gebeuren, dat men tot een hulpkromme van hoogeren graad zijn toevlucht nemen moet; zoo vindt men voortgaande, dat het aantal drievoudige punten van C_{14} niet door een hulpkromme H_6 beperkt wordt, want al zijn de 27 bepalende punten van H_6 allen drievoudige punten, dan komen deze nog slechts met 81 der 84 mogelijke snijpunten overeen. Maar dan blijkt ook dadelijk dat een hulpkromme H_7, die door 35 punten bepaald is, aan C_{14} slechts 31 drievoudige punten toestaat, omdat $32 \times 3 + 3 = 99$ weer een meer is dan het aantal gemeenschappelijke punten van C_{14} en H_7 bedragen mag. Zoo is men dus in staat om met een kromme C_4 beginnende — want C_1 en C_2 kunnen geen drievoudig punt hebben en C_3 kan dit, als zij enkelvoudig zijn wil, evenmin — geregeld tot C_n op te klimmen en de uitkomsten te verkrijgen, die in de volgende tabel voor drievoudige punten zijn opgegeven. Om enkele regelmatigheden te doen uitkomen is langs denzelfden weg het grootste aantal vier-, vijf- en zesvoudige punten gezocht. Voor ieder dier vier gevallen is, behalve het grootste aantal z, de graad p der hulpkromme en de rest r opgeteekend, die men verkrijgt door het onmogelijke aantal snijpunten van C_n en H_p, dat door de aanneming van een veelvuldig punt te veel wordt opgeleverd, met het werkelijke aantal np dier punten te verminderen.

n	DRIEVOUDIG.			VIERVOUDIG.			VIJFVOUDIG.			ZESVOUDIG.		
	z	*p*	*r*	*z*	*p*	*r*	*z*	*p*	*r*	*z*	*p*	*r*
4	1	1	2									
5	1	1	1	1	1	3						
6	3	2	1	1	1	2	1	1	4			
7	4	2	1	1	1	1	1	1	3	1	1	5
8	7	3	1	3	2	1	1	1	2	1	1	4
9	11	4	2	4	2	2	1	1	1	1	1	3
10	13	4	2	7	3	3	3	2	1	1	1	2
11	17	5	1	8	3	3	4	2	3	1	1	1
12	22	6	1	11	4	2	4	2	1	3	2	1
13	25	6	1	12	4	1	7	3	2	4	2	4
14	31	7	1	16	5	1	8	3	3	4	2	2
15	38	8	2	18	5	2	11	4	2	7	3	4
16	42	8	2	23	6	3	12	4	2	7	3	1
17	49	9	1	25	6	3	13	4	2	8	3	3
18	57	10	1	30	7	2	17	5	2	11	4	2
19	62	10	1	32	7	1	18	5	1	12	4	3
20	71	11	1	38	8	1	23	6	3	13	4	4
21		12	2	41	8	2	24	6	1	17	5	5
22		12	2	48	9	3	26	6	3	18	5	5
23		13	1	51	9	3	31	7	2	19	5	5
24		14	1		10	2	33	7	2	23	6	3
25		14	1		10	1	39	8	4	24	6	2
26		15	1		11	1	41	8	4	25	6	1
27		16	2		11	2	43	8	4	30	7	1
28		16	2		12	3	49	9	2	32	7	4
29		17	1		12	3	51	9	1	33	7	2
30		18	1		13	2	58	10	1	39	8	4
31		18	1		13	1	61	10	3	40	8	1
32		19	1		14	1		10	1	42	8	3
33		20	2		14	2		11	2	48	9	2
34		20	2		15	3		11	3	50	9	3
35		21	1		15	3		12	2	52	9	4
36		22	1		16	2		12	2	59	10	5
37		22	1		16	1		12	2	61	10	5
38		23	1		17	1		13	2	63	10	5
39		24	2		17	2		13	1	70	11	3
40		24	2		18	3		14	3	72	11	2

Uit deze tabel blijkt duidelijk, dat de bovenbedoelde regelmatigheden bij de getallen p en r schuilen. Vooreerst keeren de in een zelfde kolom geplaatste getallen r na een zeker aantal waarden doorloopen te hebben in dezelfde volgorde terug. Het aantal dier waarden, dat men de periode van r kan noemen, is bij een drievoudig punt 6, bij een viervoudig punt 6, bij een vijfvoudig punt 20 en bij een zesvoudig punt 15. En de veranderingen, die p ondergaat, verschillen naarmate men met een drie- of vijfvoudig punt ter eene, of met een vier- of zesvoudig punt ter andere zij te doen heeft. Terwijl de getallen p van boven naar beneden voortgaande steeds toenemen, volgen bij een drievoudig punt op twee evene waarden een onevene, bij een viervoudig punt op twee evene waarden twee evene, bij een vijfvoudig punt op drie evene waarden twee onevene en bij een zesvoudig punt op drie evene waarden drie onevene. Evenwel beginnen deze regelmatigheden zich in de behandelde gevallen bij een k-voudig punt eerst met $n = 2k$ te vertoonen; vandaar dat de verschillende perioden van r en die van de veranderingen van p — in de tabel door afscheidingen aangegeven — steeds beginnen met $n = 2k$.

---

10. Wil men in het algemeen nagaan in hoever de aangewezene regelmatigheden in p en r zich bij k-voudige punten voordoen, dan brengt men het vraagstuk van het grootste aantal k-voudige punten in vergelijking. Met behoud van dezelfde notatie komt men dan geheel langs den bij dubbelpunten gevolgden weg tot de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} (z+1)+y &= \frac{p(p+3)}{2} \\ k(z+1)+y &= np+r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

waarin r, de in de tabel aangegevene rest, positief en kleiner dan k is. Oplossing naar y en z geeft hier

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{kp^2+(3k-2n)p-2r}{2(k-1)} \\ z &= \frac{-p^2+(2n-3)p+2r}{2(k-1)}-1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Deze vergelijkingen moeten de kleinste waarde van z doen kennen, die met de voorwaarden van het vraagstuk vereenigbaar is. Wil y niet negatief zijn, dan moet

$$p \leqq \frac{2n - 3k - \sqrt{(2n - 3k)^2 + 8kr}}{2k}$$

of

$$p \geqq \frac{2n - 3k + \sqrt{(2n - 3k)^2 + 8kr}}{2k}$$

zijn. Aan de eerste van deze voorwaarden kan echter niet voldaan worden, omdat p positief zijn moet. En omdat z een tweedemachtsvorm in p is, die een maximum wordt voor $p = n - \frac{3}{2}$, moet z zoo klein mogelijk worden voor die waarde van p, welke zooveel van $n - \frac{3}{2}$ verschilt, als de betrekking

$$\frac{2n - 3k + \sqrt{(2n - 3k)^2 + 8kr}}{2k} < p < n \quad . \; . \; . \; (5)$$

maar toelaat.

---

11. Omdat de eenige waarde van p grooter dan $n - \frac{3}{2}$, die ter bepaling van de minimumwaarde van z in aanmerking komen kan, $n - 1$ is en de waarde die z voor $p = n - 1$ verkrijgt ook door het stellen van $p = n - 2$ wordt opgeleverd, zal de waarde van p, die bij het verlangde minimum van z behoort, steeds onder $n - \frac{3}{2}$ gezocht *moeten* worden, wanneer $n - 3$ niet kleiner is dan het eerste lid van de ongelijkheid (5) en daar *kunnen* gezocht worden, wanneer dit wel het geval is. Derhalve is het van belang het kleinste geheele getal te kennen, dat niet kleiner is dan het eerste lid van de ongelijkheid (5); want is dit getal niet grooter dan $n - 2$, — en dit kan het

zooals spoedig blijken zal niet wezen — dan heeft men het slechts in de tweede vergelijking (4) in de plaats van p te stellen, om daardoor het onderzoek naar de wijze, waarop z van n afhangt, terug te brengen tot het opsporen van de betrekking tusschen r en n. En deze laatste is gemakkelijk te vinden.

---

12. Uit vergelijking (5) volgt, dat p de ongelijkheid

$$p > \frac{2n - 3k}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

bevredigen moet. Evenwel is daarmeê nog niet gezegd, dat de kleinste waarde van p, die aan de nieuwe ongelijkheid voldoet, tot het antwoord op de vraag voert. Want de mogelijkheid bestaat, dat deze kleinste geheele waarde van p niet meer aan (5) voldoet. Stelt men in (6) voor n de waarde $mk + q$ (waarbij m het quotient en q de rest der deeling van k in n voorstelt) in de plaats, dan gaat zij over in

$$p > 2m - 3 + \frac{2q}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

en deze voorwaarde vereischt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{voor } 2q < k \ \ldots\ldots\ldots & p = 2m - 2 \\ \text{voor } 2q \overline{\overline{>}} k \ \ldots\ldots\ldots & p = 2m - 1 \end{array}\right\} \ldots \quad (8)$$

In de onderstelling $2q < k$ is dus $2m - 2$, in de onderstelling $2q \overline{\overline{>}} k$ is evenzoo $2m - 1$ de kleinste geheele waarde van p, die aan (6) voldoet. Wordt nu nog bewezen, dat deze waarden ook aan (5) voldoen, dan zijn zij de kleinsten, die in aanmerking kunnen komen en moeten zij tot het gevraagde minimum van z leiden.

---

13. Geval: $2q < k$

Omdat y niet negatief zijn mag, is

$$\frac{1}{2} k p^2 + \left(\frac{3}{2} k - n\right) p \geqq r.$$

Door invoeging van $2m-2$ voor p en van $mk+q$ voor n wordt dit

$$2k(m-1)^2 + \{(3-2m)k - 2q\}(m-1) \geqq r$$

of

$$(m-1)(k-2q) \geqq r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9^a)$$

Door vermenigvuldiging van beide leden met $8k$ vindt men

$$8(m-1)k^2 - 16(m-1)qk \geqq 8kr;$$

dit gaat door vermeerdering van beide leden met

$$\{(2m-3)k + 2q\}^2$$

over in

$$\{(2m-1)k - 2q\}^2 \geqq \{(2m-3)k + 2q\}^2 + 8kr$$

Nu geeft worteltrekking, omdat $(2m-1)k - 2q$ steeds positief is wanneer $m \geqq 1$ is,

$$(2m-1)k - 2q \geqq + \sqrt{\{(2m-3)k + 2q\}^2 + 8kr};$$

evenzoo vermeerdering der beide leden met $(2m-3)k + 2q$

$$4(m-1)k \geqq (2m-3) + 2q + \sqrt{\{(2m-3)k + 2q\}^2 + 8kr}$$

en eindelijk deeling van beide leden door $2k$ en invoeging van n voor $mk+q$

$$2m - 2 \geqq \frac{2n - 3k + \sqrt{(2n-3k)^2 + 8kr}}{2k};$$

zoodat de waarde $2m-2$ van p voor het behandelde geval $(2q < k)$ aan (5) voldoet.

14. Geval $2q \geqq k$.

Geheel langs den zelfden weg vindt men nu, omdat p hier door $2m-1$ vervangen moet worden, uit

$$\frac{1}{2}kp^2 + \left(\frac{3}{2}k - n\right)p \geqq r$$

$$(2m-1)(k-q) \geqq r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9^b)$$

Verder

$$\{(2m+1)k - 2q\}^2 \geqq \{(2m-3)k + 2q\}^2 + 8kr$$

$$(2m+1)k - 2q \geqq + \sqrt{\{(2m-3)k+2q\}^2 + 8kr}$$

$$2(2m-1)k \geqq (2m-3)k + 2q + \sqrt{\{(2m-3)k + 2q\}^2 + 8kr}$$

en

$$2m-1 \geqq \frac{2n - 3k + \sqrt{(2n-3k)^2 + 8kr}}{2k}$$

zoodat de waarde $2m-1$ van p voor het nu behandelde geval ($2q \geqq k$) aan (5) voldoet.

---

15. Nu de uitkomsten (8) gerechtvaardigd zijn, kunnen de vroeger besprokene regelmatigheden in p en r onmiddellijk aangetoond worden. De vergelijkingen (8) zelve zijn de uitdrukking van de regelmatige wijze, waarop p met n verandert. En de periodiciteit van r moet hieruit worden afgeleid, dat y een geheel getal voorstelt en

$$\frac{1}{2}kp^2 + \left(\frac{3}{2}k - n\right)p - r$$

dus door $k-1$ deelbaar is. Schrijft men de uitdrukking „a laat bij deeling door b een rest c over" in den vorm $a_b \equiv c$, dan is derhalve

$$\frac{1}{2}kp^2 + \left(\frac{3}{2}k - n\right)p_{k-1} \equiv r$$

En uit deze voorwaarde leidt men, op dezelfde wijs als (9^a) en (9^b) gevonden zijn, af, dat voor

$$2q < k \ldots . (m-1)(k-2q)_{k-1} \equiv r \quad \ldots \quad (10^a)$$

en voor

$$2q \geqq k \ldots . (2m-1)(k-q)_{k-1} \equiv r \quad \ldots \quad (10^b)$$

moet zijn. Waaruit weer volgt, dat r een periode van $k(k-1)$ termen vertoonen zal. Want vermeerdert men n met $k(k-1)$, dan vermeerdert m met $k-1$, terwijl q onveranderd blijft; zoodat de eerste leden van (10^a) en (10^b) met een veelvoud van $k-1$ vermeerderd worden en r dus geen verandering ondergaat.

---

16. De in de tabel opgemerkte regelmatigheden zijn nu gebleken bizondere gevallen uit te maken, van andere, die zich bij een willekeurige k in meer algemeenen vorm voordoen. Alleen bij de perioden van r is nog geen volkomene overeenstemming. Terwijl het aantal termen dier periode in het algemeen $k(k-1)$ bedraagt en men bij een viervoudig punt dus een periode van twaalf en bij een zesvoudig punt een periode van dertig termen moet aantreffen, geeft de tabel voor die gevallen perioden van de halve grootte aan. Deze afwijking kan men echter tot regel maken door aan te wijzen, dat de bedoelde periode in r zich bij even k's in het algemeen tot op de helft reduceert.

Is namelijk $k = 2l$, dan doet vermeerdering met $\frac{1}{2}k(k-1)$ de n overgaan in $n + \frac{1}{2}k(k-1)$ of $\left\{m + \frac{k-1}{2}\right\}k + q$; waarvoor men in geval $2q < k$ is

$$\left(m + \frac{k-2}{2}\right)k + \left(\frac{1}{2}k + q\right) = (m + l - 1)k + (q + l)$$

en in geval $2q \geqq k$ is

$$\left(m + \frac{k}{2}\right)k + \left(q - \frac{1}{2}k\right) = (m + l)k + (q - l)$$

schrijven kan. In het eerste geval gaat men dan van (10^a)

op (10^b) met een nieuwe $m\,(= m + l - 1)$ en een nieuwe $q\,(= q + l)$ over; in het tweede geval gaat men van (10^b) op (10^a) met een nieuwe $m\,(= m + l)$ en een nieuwe $q\,(= q - l)$ over. Voor het eerste geval geeft invoeging van de nieuwe waarden in het linkerlid van (10^b)

$$\{2\,(m + l - 1) - 1\}\ \{k - (q + l)\}$$

of

$$\{(2\,m - 2) + (k - 1)\}\,(l - q);$$

wat door vermindering met $(k - 1)\,(l - q)$ overgaat in

$$2\,(m - 1)\,(l - q)$$

of

$$(m - 1)\,(k - 2\,q),$$

d. i. in het linkerlid van (10^a). Voor het tweede geval geeft invoeging van de nieuwe waarden in het linkerlid van (10^a)

$$(m + l - 1)\,\{k - 2\,(q - l)\}$$

of

$$\{(2m - 1) + (k - 1)\}\,(k - q);$$

wat door vermindering met $(k - 1)\,(k - q)$ overgaat in

$$(2\,m - 1)\,(k - q)$$

d. i. in het linkerlid van (10^b). Hiermee is voor beide gevallen het bestaan der verkorte periode voor een even k aangetoond.

---

17. Stelt men de in vergelijking (8) voor p gevondene waarden in de tweede vergelijking (4) voor p in de plaats, dan vindt men het grootste aantal k-voudige punten eener kromme C_n.

In geval $2\,q < k$ is vindt men

$$z + 1 = \frac{-\frac{1}{2}\,(2m - 2)^2 + \left(m\,k + q - \frac{3}{2}\right)(2\,m - 2) + r}{k - 1}$$

of

$$z + 1 = \frac{(m - 1)\,(2\,m\,k - 2\,m + 2\,q - 1) + r}{k - 1}$$

Schrijft men nu de uitdrukking „a is het grootste geheele getal begrepen in de breuk $\frac{b}{c}$" in den vorm $a = \frac{b}{c}$, dan kan men — omdat $\frac{r}{k-1}$ hoogstens gelijk aan de eenheid is — deze vergelijking vervangen door de volgende

$$z = \frac{(m-1)(2mk-2m+2q-1)}{k-1} \quad . \; . \; . \; . \; (11^a).$$

In geval $2q \geqq k$ is, vindt men langs denzelfden weg

$$z = \frac{(2m-1)(mk-m+q-1)}{k-1} \quad . \; . \; . \; . \; (11^b).$$

Met deze vergelijkingen (11) is het onderzoek naar het grootste aantal k-voudige punten eener kromme C_n, zooals dit door een hulpkromme H_p beperkt wordt, afgesloten.

---

18. In art. 8 is terloops opgemerkt, dat het daar aan de orde gestelde onderzoek tot uitkomsten leiden zou, die voor het grootste deel door het verband tusschen veelvoudige en dubbelpunten hun beteekenis zouden moeten verliezen. Zooals bekend is, bewijst men werkelijk in de theorie der algebraïsche krommen *), dat een k-voudig punt met k van elkaar verschillende raaklijnen — en daarmee heeft men in het algemeen te doen — te beschouwen is als een vereeniging van $\frac{k(k-1)}{2}$ dubbelpunten en het aantal k-voudige punten eener kromme C_n dus nooit grooter zijn kan dan $\frac{(n-1)(n-2)}{k(k-1)}$, wanneer de onderstelling dat $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ een grens is voor het aantal dubbelpunten waarheid bevat. En nu is voor een eenigzins belangrijke n de waarde $\frac{(n-1)(n-2)}{k(k-1)}$ kleiner dan de door de

*) CLEBSCH-LINDEMANN t. a. p., blz. 329 en blz. 354.

vergelijkingen (11) opgeleverde. Want de vorm $\frac{(n-1)(n-2)}{k(k-1)}$ nadert bij het grooter worden van n tot $\frac{k}{k-1}m^2$, terwijl de uit (11) afgeleide z de voor $k > 2$ steeds grootere waarde $2m^2$ tot limiet heeft. Dat het zelfs niet noodig is aan n een groote waarde toe te kennen, om de door (11) opgeleverde waarde van z grooter te maken dan $\frac{(n-1)(n-2)}{k(k-1)}$, dit kan blijken uit de tabel in art. 9, waarin de uitkomsten, die hun beteekenis niet verliezen, met dikke cijfers aangewezen zijn. Voorloopig als bewezen aangenomen de stelling, op welke ik dadelijk terugkom, dat $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ het grootste aantal dubbelpunten eener enkelvoudige kromme C_n aangeeft, moeten de boven verkregene uitkomsten dus eene beperking ondergaan en kunnen zij in de volgende woorden worden opgesteld:

„Het grootste aantal k-voudige punten, dat een enkelvoudige kromme van den $n = mk + q^{\text{den}}$ graad hebben kan, wordt voorgesteld door het grootste geheele getal, dat begrepen is in

$$2m(m-1) + \frac{(m-1)(2q-1)}{k-1}$$

of in

$$m(2m-1) + \frac{(2m-1)(q-1)}{k-1}$$

naarmate $2q < k$ of $2q \geqq k$ is; tenzij deze getallen grooter zijn dan $\frac{(n-1)(n-2)}{k(k-1)}$, in welk geval deze laatste uitdrukking het maximum van k-voudige punten aangeeft."

---

19. Uit bovenstaande beschouwingen omtrent veelvoudige punten blijkt, dat men uit het voorgaande alleen nog niet besluiten mag tot het werkelijk voorkomen van krommen C_n met

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dubbelpunten. Wel is het zeker, dat er enkelvoudige krommen bestaan van het *geslacht* nul, d. w. z. krommen, waarvan het aantal dubbelpunten, dat men verkrijgt door ook de drie-, vier- en meervoudige punten als boven is opgegeven tot dubbelpunten te herleiden, gelijk is aan $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Want is φ_n een homogene functie van den n^{den} en ψ_{n-1} een homogene functie van den $n-1^{sten}$ graad in x en y, dan stelt $\varphi_n + \lambda\,\psi_{n-1}\,z = 0$ in het trilineaire coördinatenstelsel een bundel van enkelvoudige krommen voor, die allen in het punt $x = 0$, $y = 0$ een $n-1$-voudig punt hebben. En een $n-1$-voudig punt geldt juist voor $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dubbelpunten.

Een andere vraag is het echter of er enkelvoudige krommen C_n bestaan, die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ buiten elkaar gelegen dubbelpunten bezitten; deze krommen zal ik ter bekorting en ter onderscheiding van de meer omvattende *unicursaalkrommen* (d. w. z. van krommen van het geslacht nul) *dubbelpuntskrommen* noemen. Met behulp van de CREMONA'sche transformatie *) is deze vraag reeds in bevestigenden zin beantwoord †). Bij het onderzoek naar het aantal der willekeurig aan te nemen dubbelpunten eener dubbelpuntskromme is het mij echter gebleken, dat men ook buiten deze transformatie om tot dit resultaat komen kan.

---

20. Bij de afleiding van de merkwaardige betrekkingen, die er bestaan tusschen de verschillende bizonderheden van algebraïsche krommen, heeft PLÜCKER deze lijnen verdeeld in meetkundige plaatsen en omhullenden (Ortscurven und Einhüllenden); in het eerste geval ontstaat de kromme door vereeniging van de achtereenvolgende standen van een zich bewegend punt, in het tweede ontstaat zij door vereeniging van de snijpunten van

---

*) CLEBSCH-LINDEMANN, t. a. p. blz. 478.
SALMON-FIEDLER, t. a. p. blz. 366.

†) CLEBSCH-LINDEMANN, t. a. p. blz. 883—891.

de achtereenvolgende standen van een zich bewegende lijn. En terwijl nu iedere algebraïsche kromme èn als meetkundige plaats èn als omhullende beschouwd kan worden, heeft PLÜCKER toch reeds aangewezen, dat een meetkundige plaats in het algemeen geen dubbelpunten, een omhullende in het algemeen geen dubbelraaklijnen heeft Zoo als bekend is, moet het hebben van een dubbelpunt op een nog onbepaalde plaats dan ook werkelijk als een der $\frac{n(n+3)}{2}$ voorwaarden beschouwd worden, die men aan een door punten bepaalde meetkundige plaats stellen kan. Want het verplaatsen van den oorsprong van evenwijdige coördinaten naar een willekeurig punt voert *twee* onbekenden, de coördinaten van dit punt, in, ter bepaling waarvan de voorwaarde, dat de nieuwe oorsprong dubbelpunt der kromme is, *drie* vergelijkingen oplevert, namelijk die, welke men door het nul stellen van den nieuwen bekenden term en de nieuwe coëfficienten van de eerste machten van x en y verkrijgt. Eveneens moet het hebben van d dubbelpunten, waarvan de plaats niet aangewezen is, voor d dier $\frac{n(n+3)}{2}$ voorwaarden gelden; zulk een kromme is derhalve door het aannemen van $\frac{n(n+3)}{2} - d$ enkelvoudige punten bepaald. Voor ik dit op de dubbelpuntskrommen toepas, wil ik eerst in het algemeen nagaan, hoe de waarde van d, het aantal der op onbekende plaats gelegen dubbelpunten, in sommige gevallen *den aard der kromme* bepaalt.

---

21. Kan bij een enkelvoudige kromme C_n het aantal der dubbelpunten hoogstens $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bedragen, bij een kromme C_n, die ook samengesteld mag zijn, heeft dit getal $\frac{n(n-1)}{2}$ tot grens. Want de theorie der poolkrommen *) leert, dat de

*) CREMONA-CURTZE, t. a. p. blz. 99.
CLEBSCH-LINDEMANN, t. a. p. blz. 305.
SALMON-FIEDLER, t. a. p. blz. 56.

dubbelpunten van C_n allen gelegen moeten zijn op de eerste poolkromme van ieder punt met betrekking tot C_n. En daar nu het aantal snijpunten van C_n met een dier poolkrommen, die allen van den $n-1^{\text{sten}}$ graad zijn, $n(n-1)$ bedraagt en ieder dubbelpunt van C_n voor twee dier snijpunten geldt, is het aantal dubbelpunten hoogstens $\frac{n(n-1)}{2}$. Alleen wanneer C_n een meetkundige plaats van dubbelpunten, een *dubbelkromme*, bevat en zij deze kromme (of rechte) met ieder van haar eerste poolkrommen gemeen heeft, kan het aantal dubbelpunten grooter worden dan $\frac{n(n-1)}{2}$; dan is het steeds oneindig groot.

Aan de andere zij verdient het vermelding, dat het aantal dubbelpunten eener samengestelde kromme C_n minstens $n-1$ bedragen moet. Want bestaat de samengestelde kromme uit enkelvoudigen van den l^{den}, m^{den}, ... p^{den} en $n-(l+m \ldots + p)^{\text{den}}$ graad, dan zal het aantal dubbelpunten alleen kunnen *verminderen*, wanneer men de krommen van den l^{den}, m^{den} .... en p^{den} graad gezamenlijk door een enkelvoudige kromme van den $l+m+\ldots p = k^{\text{den}}$ graad zonder dubbelpunten vervangt; in welk geval C_n nog samengesteld blijft en zij minstens de snijpunten van de samenstellende deelen nog tot dubbelpunten heeft. Het aantal $k(n-k)$ dier punten wordt echter zoo klein mogelijk, wanneer k de kleinste waarde heeft, d.i. omdat C_n samengesteld blijven moet, wanneer k de eenheid is. En dan gaat $k(n-k)$ in $n-1$ over; wat met het voorgaande het bewijs oplevert van de volgende stelling:

„Een kromme C_n met d dubbelpunten is enkelvoudig als $d < n-1$ is, ze kan zoowel enkelvoudig als samengesteld zijn als $n-1 \leqq d \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ is, ze is samengesteld als $d > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ is en ze bevat een dubbelkromme als $d > \frac{n(n-1)}{2}$ is."

22. Naar aanleiding van deze laatste stelling nog een paar opmerkingen. Duidelijker dan ergens anders blijkt uit de behandeling der samengestelde krommen — en naar ik meen is hierop tot nu toe nog niet gewezen — dat men ook van *onbestaanbare dubbelpunten* spreken en bijv. de vereeniging van twee kegelsneden, die geen bestaanbare punten met elkaar gemeen hebben, als een samengestelde kromme van den vierden graad met vier onbestaanbare dubbelpunten beschouwen moet. Het behoeft niet gezegd te worden, dat deze onbestaanbare dubbelpunten wel onderscheiden zijn van de (bestaanbare) dubbelpunten met een onbestaanbaar paar raaklijnen, de afgezonderde punten, en zij een afdeeling vormen, die hoewel gelijkwaardig met die der bestaanbare dubbelpunten toch niet als deze naar de bestaanbaarheid der raaklijnen in drie onderafdeelingen kan worden verdeeld. Omdat men onder de $\frac{n(n+3)}{2}$ punten, die een kromme C_n bepalen, tweemaal het punt $x = a + bi$, $y = c + di$ opnemen kan en men dit dan ook met het punt $x = a - bi$, $y = c - di$ doen moet, wanneer men een kromme bepalen wil, waarvan de vergelijking alleen bestaanbare coëfficienten heeft, komen deze onbestaanbare punten zoowel bij enkelvoudige krommen als bij samengestelde, maar altijd paarsgewijs, voor. Natuurlijk kunnen er van de dubbelpunten eener dubbelpuntskromme eenige twee aan twee toegevoegd onbestaanbaar zijn, zonder dat deze daarom ophoudt dubbelpuntskromme te zijn.

---

23. Een tweede opmerking betreft het aantal enkelvoudige voorwaarden (d. w. z. het aantal voorwaarden, waarvan ieder met het gaan der kromme door een punt gelijkwaardig is) begrepen in den eisch, dat C_n een nog geheel onbepaalde dubbelkromme D_k heeft. Omdat een bekende dubbelkromme D_k met een aanvullingskromme van den $n - 2k^{\text{den}}$ graad vereenigd een kromme C_n oplevert, is het aantal der voorwaarden, die uitdrukken, dat een bepaalde kromme D_k dubbelkromme van C_n is

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-2k)(n-2k+3)}{2} = k(2n-2k+3).$$

En wijl de kennis van D_k weer met $\frac{k(k+3)}{2}$ voorwaarden gelijk staat, is het gevraagde getal

$$k(2n - 2k + 3) - \frac{k(k+3)}{2} = \frac{k}{2}(4n - 5k + 3).$$

Zoodat men van een meetkundige plaats C_n, die ergens een dubbelkromme van den k^{den} graad hebben moet, nog

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{k(4n - 5k + 3)}{2} = \frac{n^2 - n(4k-3) + k(5k-3)}{2}$$

punten willekeurig aannemen kan.

---

24. Voor ik tot de dubbelpuntskrommen terugkeer enkele voorbeelden ter toepassing en uitbreiding van het voorgaande en ter voorbereiding van het volgende.

Voorbeeld 1. Men vraagt door $2n$ gegeven punten een kromme C_n te brengen, die $\frac{n(n-1)}{2}$ dubbelpunten heeft.

Men verdeelt de $2n$ gegeven punten in paren en vereenigt de twee punten van ieder paar door een rechte lijn. De zoo gevormde n lijnen stellen dan met hun allen een kromme C_n voor, die aan de vraag voldoet. Men verkrijgt aldus $1.3.5.\ldots 2n-1$ of met de bekende notatie der analytische faculteit $1^{n/2}$ antwoorden (voor $n = 10$ bedraagt dit aantal reeds meer dan 750 millioen).

Dat deze oplossingen de eenige zijn, dit kan afgeleid worden uit de PLÜCKER'sche formule, die de klasse m eener kromme C_n behalve in den graad in het aantal der dubbelpunten d en het aantal der keerpunten k uitdrukt. Zij is, zoo als bekend is,

$$m = n(n-1) - 2d - 3k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

en leert, dat de verlangde kromme van de nulde klasse is. Dit is alleen mogelijk, wanneer zij uit louter rechte lijnen is samengesteld.

Het verdient opmerking, dat de gevraagde kromme, ook in het algemeene geval dat n zeer groot is, bepaald moet heeten, al is het aantal oplossingen ook nog zoo groot. Werkelijk kan

men geen punt aan de gegevene toevoegen, of men heeft een voorwaarde te veel.

Voorbeeld 2. Men vraagt door $2n+1$ gegeven punten een kromme C_n te brengen, die $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ dubbelpunten heeft.

Men zondert eerst vijf punten van de $2n+1$ gegevene af eu verdeelt de overige in $n-2$ paren. Brengt men dan door de eerstgenoemde vijf punten een kegelsnee en vereenigt men de twee punten van ieder paar door een rechte lijn, dan zullen de $n-2$ lijnen met de kegelsnee een kromme C_n opleveren, die aan de vraag voldoet. Deze oplossingen ten getale van $1^{n-2/2} \frac{2n-4^{5/1}}{1^{5/1}}$ zijn weer de eenige mogelijke. Want uit (12) volgt, dat de klasse der verlangde kromme twee bedraagt. En dit is alleen mogelijk, wanneer de kromme uit een kegelsnee met $n-2$ rechte lijnen bestaat. (Onmogelijkheid voor $n < 2$.)

Voorbeeld 3. Men vraagt door $2n+2$ gegeven punten een kromme C_n te brengen, die $\frac{n(n-1)}{2} - 2$ dubbelpunten heeft.

Men zondert eerst tien punten van de $2n+2$ gegevens af, verdeelt deze in twee groepen van vijf en de overige in paren. Door ieder der twee groepen van vijf punten brengt men een kegelsnee, door de twee punten van ieder paar een rechte lijn. Zoo verkrijgt men twee kegelsneden en $n-4$ lijnen, die alles saamgenomen een kromme C_n opleveren, zoo als er verlangd wordt. Aantal oplossingen $1^{n-4/2} \frac{2n-7^{10/1}}{2(1^{5/1})^2}$.

Uit (12) volgt, dat de gevraagde kromme van de vierde klasse is. Deze kan behalve uit twee kegelsneden en $n-4$ rechte lijnen ook uit een kromme van den derden graad met een dubbelpunt en $n-3$ rechte lijnen bestaan, in welk geval zij ook het begeerde aantal dubbelpunten bezit. Daar het aantal der krommen C_3 met een dubbelpunt die door acht gegeven punten gaan, 12 is *), is het aantal der nieuwe oplossingen $1^{n-3/2} \frac{2n-5^{8/1}}{2 \times 5^{4/1}}$.

---

*) CREMONA-CURTZE, t. a. p. blz. 123 Lehrsatz XV.

(Terwijl de eerste oplossingen onmogelijk worden voor $n < 5$, zijn de tweeden dit eerst voor $n < 4$.).

Voorbeeld 4. Men vraagt door $\frac{n^2 - n(4k-3) + k(5k-3)}{2}$ gegeven punten een kromme C_n te brengen, die een dubbelkromme van den k^{den} graad heeft.

Men verdeelt de gegeven punten in twee groepen, waarvan de een $\frac{k(k+3)}{2}$, de ander de overige d. i. $\frac{(n-2k)(n-2k+3)}{2}$ punten bevat. Legt men dan door de $\frac{k(k+3)}{2}$ punten de door deze bepaalde kromme C_k en door de overigen de door deze bepaalde kromme C_{n-2k}, dan vormt C_k tweemaal genomen met C_{n-2k} een kromme C_n, die aan de vraag voldoet.

Het aantal oplossingen is $$\frac{\left(\frac{k(k+3)+2}{2}\right)^{\frac{(n-2k)(n-2k+3)}{2}/1}}{1^{\frac{(n-2k)(n-2k+3)}{2}/1}};$$

het zijn weer de eenige mogelijke. Omdat de kromme alleen uit C_k en C_{n-2k} bestaat, moeten de gegeven punten die niet op C_k liggen tot C_{n-2k} behooren. En daar nu maar $\frac{k(k+3)}{2}$ van deze punten tot C_k gebracht kunnen worden, moeten de overige $\frac{(n-2k)(n-2k+3)}{2}$ tot C_{n-2k} behooren en omgekeerd.

---

25. Ik keer thans tot de dubbelpuntskrommen terug. Boven (art. 20) is gevonden, dat zulk een kromme van den n^{den} graad door $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ of $3n-1$ enkelvoudige voorwaarden bepaald is. Omdat nu het aanwijzen van de plaats van een dubbelpunt, van welks aanwezigheid men reeds kennis draagt, voor twee dier voorwaarden telt, kan men slechts een dubbelpuntskromme C_n van oneven graad door $\frac{3n-1}{2}$ dubbel

punten alleen bepalen en moet men, wanneer n even is, naast $\frac{3n-2}{2}$ dubbelpunten nog een enkelvoudige voorwaarde als het gaan door een enkelvoudig punt aannemen. Hieruit volgt ook de stelling:

„De $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dubbelpunten eener dubbelpuntskromme worden door $\frac{(3n-1)}{2}$ van deze bepaald als n oneven is; als n even is, zijn zij niet door een zeker aantal van hen te bepalen, al kan men in dit geval ook $\frac{3n}{2}-1$ dubbelpunten onder de bepalende gegevens der dubbelpuntskromme opnemen."

Want terwijl het eerste deel van deze stelling onmiddellijk in het voorgaande vervat is, zou het tweede deel alleen dan een onwaarheid kunnen inhouden, wanneer alle dubbelpuntskrommen van denzelfden evenen graad n, die $\frac{3n}{2}-1$ dubbelpunten gemeen hebben, een bundel vormden met gemeenschappelijke dubbelpunten. Maar dit is niet mogelijk, omdat ieder paar dier krommen elkaar in $4 \times \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ of $2(n-1)(n-2)$ — want ieder gemeenschappelijk dubbelpunt staat met vier snijpunten gelijk — punten snijden zou.

Tot goed begrip van bovenstaande stelling moet hier reeds worden bijgevoegd, wat later (art. 29) blijken zal, dat de bovenbedoelde bepaling eener dubbelpuntskromme van onevenen graad alleen door dubbelpunten tot meer dan een antwoord voert.

De zooeven gevondene stelling, die voor dubbelpuntskrommen geldt, is een bijzonder geval van de meer algemeene:

„Van een enkelvoudige kromme C_n, die d dubbelpunten op bepaalde plaatsen en d_1 dubbelpunten op nog onbepaalde plaatsen hebben moet, kan men bovendien nog $\frac{n(n+3)}{2}-(3d+d_1)$ enkelvoudige punten willekeurig

aannemen, wanneer aan de voorwaarden

$$d + d_1 \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$3d + d_1 \leqq \frac{n(n+3)}{2}$$

voldaan is.”

In welk geval men hier een of meer oplossingen verkrijgt kan ook eerst later blijken.

---

26. Met het oog op de eerste der beide stellingen, moet ik dadelijk een bezwaar uit den weg ruimen. Bij de toepassing van de CREMONA'sche transformatie op krommen van het geslacht nul *) wordt aangetoond, dat de homogene coördinaten eener kromme van het geslacht nul (die in het algemeene geval dubbelpuntskromme is) zich als bepaalde n^{de}-machtsfunctiën van een veranderlijken parameter λ laten voorstellen; zoodat men iedere dubbelpuntskromme door de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, x &= a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \\ \varrho\, y &= b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + b_1 \lambda + b_0 \\ \varrho\, z &= c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + c_1 \lambda + c_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (13)$$

bepaald denken kan. En omgekeerd bewijst men onweerlegbaar, dat iedere kromme, waarvan de coördinaten van de verschillende punten door de vergelijkingen (13) worden voorgesteld, een dubbelpuntskromme is. Dit schijnt te strijden met de bewering, dat zulk een kromme door $3n - 1$ voorwaarden bepaald is. Want in aanmerking genomen, dat ϱ een willekeurige grootheid is, die bij het invoegen van de uit (13) volgende waarden van x, y en z in de algemeene homogene vergelijking van den n^{den} graad in die veranderlijken wegvalt en deze ϱ gelegenheid geeft aan een der $3n + 3$ coëfficiënten van de

---

*) SALMON-FIEDLER, t. a. p. blz. 35.
CLEBSCH-LINDEMANN, t. a. p. blz. 883.

tweede leden van (13) onafhankelijk van de te bepalen kromme een bepaalde waarde toe te kennen, bevatten bedoelde vergelijkingen (13) nog $3n+2$ onderling onafhankelijke coëfficienten. Zoodat men naar het schijnt niet $3n-1$ maar $3n+2$ punten der dubbelpuntskromme willekeurig aannemen kan. Dit bezwaar vervalt echter met de opmerking, dat de $3n+2$ coëfficienten slechts in schijn van elkaar onafhankelijk zijn. Wat hieruit blijkt, dat de substitutie

$$\lambda = \frac{p\mu+q}{r\mu+1} \qquad \varrho = \frac{s}{(r\mu+1)^n},$$

waardoor μ in de plaats van λ en s in de plaats van ϱ treedt, vier nieuwe willekeurige grootheden p, q, r en s invoert, die toelaten, dat men, onafhankelijk van de te bepalen kromme, aan vier van de $3n+3$ nieuwe coëfficienten a b en c bepaalde waarden toekent.

---

27. In het meermalen aangehaalde werk van SALMON-FIEDLER *) lees ik het volgende:

„Sieben und zwanzig Bedingungen bestimmen eine Curve sechster Ordnung; es könnte daher scheinen, dass eine solche Curve müsse beschrieben werden können, welche neun gegebene Punkte zu Doppelpunkten hat. Diess ist aber nicht der Fall; denn durch die neun gegebene Punkte geht eine bestimmte Curve dritter Ordnung $U=0$ und im Allgemeinen ist die einzige Curve sechster Ordnung, welche dieselben neun Punkte zu Doppelpunkten hat, die Curve $U^2=0$, d. h. die zweifach gezählte Curve dritter Ordnung. *Man kann in diesem Falle selbst nicht acht der neun Doppelpunkte willkürlich annehmen.* In analoger Art müssen für Curven höherer Ordnung, wenn sie die Maximalzahl oder selbst eine geringere Zahl von Doppelpunkten haben, gewisse verbindende Beziehungen zwischen denselben bestehen. Den Fall der Curven vierter Ordnung ausgenommen kennen wir aber keinen Versuch, diese Relationen

---

*) t. a. p. blz. 36.

geometrisch auszudrücken; es ist also noch eine ausgedehnte Classe von Sätzen dieser Art zu entdecken."

Blijkt uit het laatste deel van deze aanhaling, dat de stellingen in art. 25 geheel nieuw zijn, aan den anderen kant is het zeker dat ze beiden moeten vallen, wanneer de cursief gedrukte woorden waarheid bevatten. Want volgens beide stellingen kan men van een dubbelpuntskromme C_6 behalve acht dubbelpunten nog een enkelvoudig punt willekeurig aannemen. Hier dient dus te worden aangewezen, dat de cursief gedrukte woorden onwaarheid behelzen.

Wat de schrijver omtrent het aannemen van negen dubbelpunten aanvoert, is geheel juist. Omdat ik hier van dubbelpuntskrommen spreek, zou ik er aan willen toevoegen, dat men van zulk een kromme geen negen dubbelpunten willekeurig aannemen kan, eenvoudig wijl men aan de kromme geen $9 \times 3 + 1$ of 28 voorwaarden, het hebben van tien dubbelpunten waarvan er negen een bepaalde plaats hebben, stellen kan. Evenwel is de eenige kromme C_6, die negen gegeven punten tot dubbelpnnten heeft, werkelijke de dubbel getelde kromme van den derden graad, die door de negen punt gaat. Want zij is natuurlijk een kromme, die aan de vraag voldoet en omdat er — zoo als straks nader blijken zal — maar een antwoord mogelijk is, is zij de eenige.

Nu zou men de redeneering van den schrijver met betrekking tot duppelpuntskrommen aldus kunnen aanvullen. Gegeven acht dubbelpunten van C_6, dan kan men nog een enkelvoudig punt willekeurig aannemen. Brengt men dan weer een kromme C_3 door de negen gegeven punten, dan is deze dubbel geteld weer een antwoord op de vraag. Want deze C_6 kan eenigermate als een kromme met tien dubbelpunten beschouwd worden. Immers iedere willekeurige kromme C_3 gaande door de acht tot dubbelpunten bestemde punten vormt met de kromme C_3, die door de negen punten bepaald is, een kromme C_6 met negen dubbelpunten, waarvan er een door de acht gegevene bepaald is en nu kan het samenvallen van beide krommen C_3 een uitvloeisel geacht worden van den eisch dat de verlangde C_6 tien dubbelpunten heeft en de samenstellende krommen C_3 dus tien punten met elkaar gemeen hebben. Dit aangenomen bevatten

de cursief gedrukte woorden der aanhaling waarheid, zoodra men bovendien nog weet, dat er slechts van een antwoord sprake zijn kan. Om dit na te gaan zal ik een paar eenvoudige voorbeelden tot toelichting doen voorafgaan en daarna in het algemeen uitmaken, wanneer men bij het bepalen van duppelpuntskrommen door punten en dubbelpunten een en wanneer men meer dan een antwoord verkrijgt.

---

28. *Voorbeeld* 5. Men vraagt een dubbelpuntskromme C_4 te vinden, die drie gegeven punten tot dubbelpunten heeft en door vijf andere gegevene punten gaat.

Neemt men de gegeven dubbelpunten tot hoekpunten aan van den coördinatendriehoek, dan is de vergelijking van iedere kromme C_4, die deze drie punten tot dubbelpunten heeft

$$A x^2y^2 + (B x^2y + C xy^2) z + (Dx^2 + E xy + F y^2) z^2 = 0 \,. \; (14).$$

Zijn nu $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, enz... x_5 y_5 z_5 de coördinaten van de vijf gegevene enkelvoudige punten, dan worden de vijf verhoudingen van de coëfficienten A, B.... F bepaald door de vijf voorwaardevergelijkingen, die uitdrukken dat de kromme (14) door de vijf gegeven punten gaat. Eliminatie van A, B.... F uit (14) en deze vijf voorwaardevergelijkingen geeft de vergelijking der verlangde kromme in determinantenvorm als

$$\Sigma \pm x^2y^2 \,.\, x_1^2 y_1 z_1 \,.\, x_2 y_2^2 z_2 \,.\, x_3^2 z_3^2 \,.\, x_4 y_4 z_4^2 \,.\, y_5^2 z_5^2 = 0.$$

Aldus in dit geval een antwoord op de vraag.

Voorbeeld 6. Men vraagt een dubbelpuntskromme C_4 te vinden, die twee gegeven punten tot dubbelpunten heeft en door zeven andere gegevene punten gaat.

Neemt men de twee gegeven dubbelpunten tot twee der hoekpunten van den coördinaten-driehoek bijv. $x = 0$, $z = 0$ en $y = 0$, $z = 0$ en een der zeven enkelvoudige punten tot het derde hoekpunt (dan $x = 0$, $y = 0$) aan; zoo is de vergelijking van iedere kromme C_4, die de twee aangewezen punten tot dubbelpunten heeft en door het derde gaat,

$$Ax^2y^2+(Bx^2y+Cxy^2)z+(Dx^2+Exy+Fy^2)z^2+(Gx+Hy)z^3=0. \; (15).$$

Zijn nu x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, enz... x_6 y_6 z_6 de coördinaten

van de zes overige gegevene punten en is x_d, y_d, z_d het derde dubbelpunt van nog onbekende ligging, dan moeten de zes stel coördinaten $x_1\ y_1\ z_1, \ldots x_6\ y_6\ z_6$ voldoen aan (15), terwijl de coördinaten $x_d\ y_d\ z_d$ voldoen moeten aan de drie vergelijkingen, die men verkrijgt door (15) achtereenvolgens naar x, y en z te differentieeren. *) Ter bepaling van de zeven verhoudingen der acht coëfficienten A, B.... H en van de twee verhoudingen der drie coördinaten $x_d\ y_d\ z_d$, in het geheel dus van negen grootheden, heeft men nu ook negen vergelijkingen. Maar terwijl de zes vergelijkingen, die alleen A, B... H bevatten, in deze coëfficienten lineair zijn, bevatten de drie anderen $x_d\ y_d\ z_d$ tot de derde macht en de coëfficienten A... H weer tot de eerste macht. Zoodat de theorie der eliminatie †) leert, dat er in het behandelde geval 21 krommen zijn, die aan de vraag voldoen. §) En omdat er onder deze maar een samengestelde kromme kan voorkomen, namelijk de vereeniging van de kromme C_3, die door alle gegevene punten gaat, met de rechte lijn, die de tot dubbelpunten bestemde punten verbindt, zijn er 20 enkelvoudige krommen, die aan de vraag voldoen. Natuurlijk kunnen onder deze ook krommen voorkomen, wier vergelijkingen gemengd onbestaanbare coëfficienten bevatten, omdat bedoelde coëfficienten als wortels van hoogeremachtsvergelijkingen worden gevonden. Wijl naast een stel waarden $A = a_1 + i a_2$ $B = b_1 + i b_2 \ldots . H = h_1 + i h_2$ een ander stel $A = a_1 - i a_2$, $B = b_1 - i b_2 \ldots . H = h_1 - i h_2$ voorkomt, treft men naast een kromme $P + i Q = 0$ een tweede $P - i Q = 0$ aan. Zoo als uit den vorm hunner vergelijking blijkt, kenmerken zij zich door het gemis van bestaanbare takken, daar zij wat hun bestaanbaar gedeelte betreft alleen uit onsamenhangende punten, de bestaanbare snijpunten van $P = 0$ en $Q = 0$ (hier hoogstens 16 in getal) zijn samengesteld. Zulke krommen zal ik om

---

*) CLEBSCH-LINDEMAN t. a. p. blz. 313.

†) G. SALMON, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, übersetzt von Dr. W. FIEDLER, blz. 64.

§) Men vergelijke CREMONA-CURTZE, t. a. p. blz. 123 (Lehrsatz XV) en brenge hierbij in rekening, dat, wanneer er onder de basispunten van een krommenbundel van den $n$den graad p dubbelpunten voorkomen, het getal $3(n-1)^2$ in $3(n-1)^2-3p$ overgaat.

later te vermelden redenen *gemengd onbestaanbare krommen* noemen.

---

29. Na deze voorbeelden is het niet moeielijk in het algemeen aan te geven, wanneer de bepaling van een dubbelpuntskromme door enkelvoudige en dubbelpunten tot een, wanneer zij tot meer dan een oplossing aanleiding geeft. Klaarblijkelijk is het eerste het geval wanneer alle dubbelpunten onder de gegevens zijn opgenomen en komt men alleen tot meer oplossingen dan een, wanneer van een of meer der dubbelpunten de plaats nog onbepaald gebleven is.

De bepaling, die tot één oplossing voert, laat mij zeggen de *ondubbelzinnige bepaling* der dubbelkrommen, is dus alleen mogelijk bij krommen waarvoor $3n - 1 \geqq (n-1)(n-2)$ is; waaraan voldaan is voor $n < 6$. Is $n \overline{\overline{>}} 6$, dan kan men alleen den tweeden weg inslaan.

Met het voorgaande is nu het bezwaar gelegen in de onderschrapte woorden uit de aanhaling in art. 27 vervallen. Want zij bevatten, zoo als nu gemakkelijk aan te wijzen is, een onwaarheid. Langs den weg van het zesde voorbeeld vindt men namelijk, dat het aantal krommen C_6 met negen dubbelpunten, die door acht dubbelpunten en twee andere punten bepaald worden, 51 bedraagt en onder deze komt een samengestelde voor, de kromme C_6 bestaande uit de twee verschillende krommen C_3 die ieder door de acht dubbelpunten en een der twee enkelvoudige punten gaan. Zoodat er 50 krommen C_6 zijn, die aan deze vraag voldoen. En uit de theorie der krommennetten *) kan, zoo als terloops mag worden aangemerkt, afgeleid worden, dat het aantal der enkelvoudige krommen van den zesden graad, die door acht dubbelpunten en een enkelvoudig punt worden bepaald, in het algemeen ook vrij aanzienlijk is.

Uit het bovenstaande blijkt, dat de bepaling van de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dubbelpunten eener dubbelpuntskromme van onevenen graad (zie de eerste stelling in art. 25) alles behalve

---

*) Men vergelijke in CREMONA-CURTZE, t. a. p. het als toevoegsel gegevene hoofdstuk „*Ueber geometrische Netze*", blz. 265—274.

ondubbelzinnig is. Bovendien is het nu gemakkelijk aan te geven, in welk geval de bepaling van een algemeene kromme C_n volgens de tweede stelling van art. 25 ondubbelzinnig is.

---

30. In art. 19 heb ik opgegeven, dat de bepaling van het aantal der willekeurig aan te nemen dubbelpunten eener dubbelpuntskromme tot het bewijs voeren zou, dat er werkelijk dubbelpuntskrommen voorkomen. In het voorgaande is dan ook gebleken, dat het in vergelijking brengen van het vraagstuk der dubbelpuntskrommebepaling geen moeielijkheden oplevert, dat het alleen niet wel mogelijk is in het algemeene geval vooruit het dikwijls zeer groote aantal der oplossingen aan te geven. Zoo als reeds opgemerkt is, kan het in een enkel geval gebeuren, dat al deze oplossingen twee aan twee onbestaanbaar zijn. Maar dit neemt niet weg, dat men de dubbelpuntskromme in het algemeen door de aangenomen gegevens bepaald mag noemen, even als men een door vier punten en een raaklijn gegeven kegelsnee bepaald acht, al zijn ook de beide oplossingen, die kunnen voorkomen, in de helft der gevallen onbestaanbare krommen. En bovendien, al kan men in een enkel geval bij bepaalde gegevens geen bestaanbare kromme aanwijzen, hieruit is nog in geenen deele het besluit te trekken, dat er geen dubbelpuntskrommen van dien behandelden graad bestaan en deze niet op de voorgestelde wijs te bepalen zijn.

---

31. Heeft men zich met het beginsel der dualiteit vertrouwd gemaakt, dan kan men naast de voorgaande uitkomsten omtrent meetkundige plaatsen met dubbel- en veelvoudige punten onmiddellijk de overeenkomstige stellingen omtrent omhullenden met dubbel- en veelvoudige raaklijnen neerschrijven; dan vindt men dat er onderscheid te maken is tusschen enkelvoudige omhullenden, samengestelde omhullenden en omhullenden met dubbelomhullenden, dat men ook van *dubbelraaklijnenomhullenden* spreken kan en men de nieuwe begrippen van *onbestaanbare dubbelraaklijnen* (wel te onderscheiden van dub-

belraaklijnen met onbestaanbare raakpunten, die men *afgezonderde raaklijnen* kan noemen) en van *gemengd onbestaanbare omhullenden* invoeren moet.

Achtereenvolgens vindt men dan ook de stellingen:

„Een enkelvoudige omhullende van de m^{de} klasse heeft hoogstens $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ dubbelraaklijnen" (art. 1).

„Het grootste aantal k-voudige raaklijnen, dat een enkelvoudige omhullende van de $m = nk + q^{de}$ klasse hebben kan, wordt voorgesteld door het grootste geheele getal, dat begrepen is in

$$2n(n-1) + \frac{(n-1)(2q-1)}{k-1}$$

of in

$$n(2n-1) + \frac{(2n-1)(q-1)}{k-1}$$

naarmate $2q < k$ of $2q \overline{\overline{>}} k$ is; tenzij deze getallen grooter zijn dan $\frac{(m-1)(m-2)}{k(k-1)}$, in welk geval deze laatste uitdrukking het maximum van k-voudige raaklijnen aangeeft" (art. 18).

„Een omhullende K_m met d dubbelraaklijnen is enkelvoudig als $d < m-1$ is, ze kan zoowel enkelvoudig als samengesteld zijn als $m-1 \overline{\overline{<}} d \overline{\overline{<}} \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ is, ze is samengesteld als $d > \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ is en ze bevat een dubbelomhullende als $d > \frac{m(m-1)}{2}$ is" (art. 21).

„De $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ dubbelraaklijnen eener dubbelraaklijnenomhullende worden door $\frac{3m-1}{2}$ van deze, maar niet ondubbelzinnig, bepaald als m oneven is; als m even

is zijn zij niet door een zeker aantal van hen te bepalen, al kan men in dit geval ook $\frac{3m}{2} - 1$ dubbelraaklijnen onder de bepalende gegevens opnemen" (art. 25).

„Van een enkelvoudige omhullende van de m^{de} klasse, die d dubbelraaklijnen op bepaalde plaatsen en d_1 dubbelraaklijnen op nog onbepaalde plaatsen hebben moet, kan men bovendien nog $\frac{m(m+3)}{2} - (3d + d_1)$ enkelvoudige raaklijnen aannemen, wanneer aan de voorwaarden

$$d + d_1 \overline{\overline{<}} \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

$$3d + d_1 \overline{\overline{<}} \frac{m(m+3)}{2}$$

voldaan is. Één antwoord verkrijgt men alleen, wanneer d_1 nul is" (art. 25).

Het dualistisch omkeeren der uitgewerkte voorbeelden mag hier achterwege blijven.

---

32. De krommen, wier vergelijking voorkomt in den vorm $P + iQ = 0$, heb ik in art. 28 gemengd onbestaanbaar genoemd. Men kan namelijk met betrekking tot de bestaanbaarheid drie groepen van algebraïsche krommen onderscheiden, krommen met bestaanbare takken, krommen met onsamenhangende bestaanbare punten en krommen zonder bestaanbare punten. De krommen der eerste groep noem ik *bestaanbaar*, die der tweede *gemengd onbestaanbaar*, die der derde *zuiver onbestaanbaar*. Terwijl iedere vergelijking van onevenen graad met bestaanbare coëfficienten steeds een kromme van de eerste soort en iedere vergelijking van onevenen graad met complexe coëfficienten steeds een kromme van de tweede soort voorstelt, kan een vergelijking van evenen graad een kromme uit ieder der drie groepen aangeven. Als voorbeelden geef ik de vergelijkingen $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$ en $x^2 + y^2 + r^2 = 0$

En nu moet men uit het feit, dat $x^2 + y^2 = 0$ te ontbinden is in $x + iy = 0$ en $x - iy = 0$, ook niet afleiden, dat alle krommen van de tweede soort, die vergelijkingen met bestaanbare coëfficienten hebben, dit daaraan danken, dat zij uit twee of meer krommen van de tweede soort bestaan, die vergelijkingen met complexe coëfficienten hebben. Want dit is bij de kromme van de tweede soort $x^2(x^2 + a^2) + y^2(y^2 + b^2) = 0$, die behalve het dubbelpunt $x = 0$, $y = 0$ geen enkel bestaanbaar punt bevat, klaarblijkelijk niet het geval.

Omdat een kromme altijd tevens een omhullende is, zal men ook drie groepen van omhullende, bestaanbare, gemengd onbestaanbare en zuiver onbestaanbare, kunnen onderscheiden. Bij den overgang van puntcoördinaten tot lijncoördinaten zal dan in het algemeen een kromme in een gelijksoortige omhullende overgaan. En is $P_n + i\,Q_n = 0$, de vergelijking der kromme in puntcoördinaten van den n^{den} graad, dan zal men vinden dat de vergelijking in lijncoördinaten, $U + i\,V = 0$, van de $n\,(n - 1)^{ste}$ klasse wordt; in overeenstemming met het feit, dat een kromme van den n^{den} graad in het algemeen een omhullende is van de $n\,(n - 1)^{ste}$ klasse. Daarom zal een gemengd onbestaanbare kromme van den n^{den} graad hoogstens $n^2\,(n - 1)^2$ bestaanbare raaklijnen kunnen hebben, namelijk de gemeenschappelijke raaklijnen van $U = 0$ en $V = 0$.

In art. 22 is gezegd, dat de onbestaanbare dubbelpunten steeds paarsgewijs voorkomen. Dit behoeft bij de krommen, wier vergelijking den vorm $P + iQ = 0$ aanneemt, natuurlijk niet meer het geval te zijn, al kan het somtijds ook gebeuren. Evenmin is het bij deze krommen noodzakelijk, dat met een enkelvoudig punt $x = a + ib$, $y = c + id$, ook het punt $x = a - ib$, $y = c - id$ tot de kromme behoort.

In de leerboeken der analytische meetkunde wordt gesproken van onbestaanbare punten en lijnen. Dáár wordt aangetoond, dat door een onbestaanbaar punt $x = a + ib$, $y = c + id$ één bestaanbare lijn $\dfrac{x - a}{b} = \dfrac{y - c}{d}$ gaat en dat een bestaanbaar punt $x = a$, $y = b$ gelegen is op oneindig veel onbestaanbare lijnen $x - a = ik\,(y - b)$. Hier staat dualistisch tegenover, dat op iedere onbestaanbare lijn $U = A + iB$, $V = C + iD$

één bestaanbaar punt $\frac{U - A}{B} = \frac{V - C}{D}$ ligt en iedere bestaanbare lijn $U = A$, $V = B$ oneindig veel onbestaanbare punten $U - A = iK\,(V - B)$ bevat. Maar op enkele uitzonderingen na *) wordt over onbestaanbare meetkundige plaatsen of omhullenden niet gesproken. En m. i. ten onrechte. Want, behalve dat de gemengd onbestaanbare krommen een hinderlijke lacune in de theorie der algebraïsche krommen aanvullen, kan alleen de studie van deze krommen leeren, welke elementen hun recht van bestaan behouden, wanneer de kromme onbestaanbaar wordt. Het volgende mag tot toelichting dienen.

---

33. Zoo als bekend is, vindt men twee kegelsneden die door vier gegeven punten gaan en een gegeven lijn aanraken, vier kegelsneden die door drie gegeven punten gaan en twee gegeven lijnen aanraken. In het eerste geval zijn de raakpunten van de beide kegelsneden, die aan de vraag voldoen, de dubbelpunten van de involutie op de gegevene raaklijn gevormd door den bundel der kegelsneden gaande door de vier gegeven punten. Maar deze dubbelpunten kunnen onbestaanbaar zijn, in welk geval men zegt, dat er geen kegelsnee is die aan de vraag voldoet. Volgens de voorgaande behandeling moet men echter in dit geval de beide oplossingen als gemengd onbestaanbare krommen $P \pm iQ = 0$ beschouwen, die de vier snijpunten van $P = 0$ en $Q = 0$ met elkaar gemeen hebben. Maar dan rijst de vraag, hoe het met de vier gemeenschappe-

*) Men vergelijke o. a. *Poncelet,* Traité des propriétés projectives des figures, blz. 29, waar een reeks van onbestaanbare hyperbolen aan een ellips gekoppeld wordt bij de bepaling van de bestaanbare gemeenschappelijke koorden (sécantes idéales communes) van twee ellipsen, die geen bestaanbaar punt met elkaar gemeen hebben. Verder CHASLES, Traité de géométrie supérieure, chapitre 33, (art. 778—792), waar van onbestaanbare cirkels gesproken wordt. En eindelijk ook het werk van veel jongere dagteekening van MAXIMILIEN MARIE, „Théorie des fonctions de variables imaginaires", waarin een afzonderlijke studie van de gekoppelde krommen gemaakt wordt en de verhandeling van Prof. BIERENS DE HAAN naar aanleiding hiervan in het Nieuw Archief voor Wiskunde (deel II. blz. 150).

lijke raaklijnen, die ze kunnen bezitten, gesteld is. Deze zijn allen bestaanbaar. Want zijn van twee kegelsneden de vier gemeenschappelijke punten bestaanbaar dan is hun gemeenschappelijke pooldriehoek dit ook *) en zijn de vier gemeenschappelijke raaklijnen òf allen bestaanbaar, òf allen onbestaanbaar †). En omdat er een, namelijk de gegevene bestaanbaar is, moeten zij dit dus allen zijn. Op deze redeneering is de aanmerking te maken, dat de beide stellingen uit wier vereeniging zij bestaat wel voor bestaanbare maar niet voor gemengd onbestaanbare kegelsneden zijn aangetoond. Evenwel kan een geringe verandering in het bewijs ze ook voor gemengd onbestaanbare krommen geldend maken. Werkelijk zijn de drie nog onbekende gemeenschappelijke raaklijnen als volgt te construeeren. Men bepaalt de snijpunten A, B en C van de gegevene raaklijn met de zijden bc, ca en ab van den gemeenschappelijken pooldriehoek abc des bundels en trekt door ieder dier snijpunten een lijn, die met de raaklijn een paar lijnen vormt ten opzichte waarvan de op dit punt uitloopende zijde van den pooldriehoek de poollijn is van het niet op die zijde gelegen hoekpunt. Dan zijn de drie zoo verkregen lijnen de verlangde gemeenschappelijke raaklijnen.

---

34. Wanneer een kromme verkregen wordt door gegeven punten en lijnen bepaalde bewerkingen te doen ondergaan en eenige van deze gegevens worden in een bizonder geval onbestaanbaar, dan zal de kromme die men verkrijgt in het algemeen gemengd onbestaanbaar worden. Stelt men dan voor de onbestaanbare elementen de aan deze toegevoegden, voor het punt $x = a + ib$, $y = c + id$ het punt $x = a - ib$, $y = c - id$, voor de lijn $ax + by + c + i(dx + ey + f) = 0$ eveneens de lijn $ax + by + c - i(dx + ey + f) = 0$ in de plaats, dan zal men een tweede kromme vinden, die met de eerste in een nauw verband staat.

Heeft namelijk de eerste $P + iQ = 0$ tot vergelijking, dan

*) CHASLES, Traité des sections coniques, blz. 216—219.

†) CHASLES, t. a. p. blz. 232, 233.

zal de vergelijking der tweede $P - iQ = 0$ zijn. Want de aangebrachte verandering bestaat in het omkeeren van het teeken der onbestaanbaarheidscoëfficient i bij de gegevens en hiervan alleen moet de nieuwe vergelijking de blijken dragen. Zulke krommen kan men *toegevoegd onbestaanbare krommen* noemen. Zij hebben *al* hun bestaanbare elementen gemeen; iets wat niet gezegd kan worden van de vereeniging $P + ikQ = 0$ en $P + ilQ = 0$ van twee willekeurige onbestaanbare krommen, die tot den bundel $P = 0$, $Q = 0$ behooren, wijl deze wel hun bestaanbare punten, maar niet hun bestaanbare raaklijnen gemeen hebben. Zoo als men gemakkelijk nagaat, zijn de beide oplossingen, die boven verkregen zijn, toegevoegd onbestaanbaar; daarom zijn ze door de vergelijkingen $P \pm iQ = 0$ voorgesteld.

---

35. Evenzoo is het met de bepaling eener kegelsnee door drie punten en twee raaklijnen gesteld, wanneer de vier oplossingen onbestaanbaar zijn; het eenige geval dat zoo als bekend is *) naast dat van algemeene bestaanbaarheid kan voorkomen. Dan zijn namelijk de vier oplossingen twee aan twee toegevoegd onbestaanbaar en kunnen zij dus in den vorm $P \pm iQ = 0$, $R \pm iS = 0$ geschreven worden. Dit blijkt uit de constructie van de raakkoorde der gegeven raaklijnen †).

Zijn a, b en c de drie gegeven punten en SP en SQ de gegeven raaklijnen, dan zoekt men de snijpunten van SP en SQ met de drie zijden van den driehoek abc en construeert men op ieder dier zijden de dubbelpunten van de involutie, die daarop door de twee hoekpunten van den driehoek als het eene en door de snijpunten met SP en SQ als het andere puntenpaar bepaald wordt. Zoo vindt men zes punten, die drie aan drie gelegen zijn op vier rechte lijnen, de bij SP en SQ behoorende raakkoorden der vier oplossingen. En zijn deze raakkoorden gevonden, dan is alles tot het construeeren van kegelsneden, die door vijf gegeven punten gaan, teruggebracht.

---

*) TH. REIJE, die Geometrie der Lage, blz. 145.

†) CHASLES, Traité des sections coniques, blz. 42.

Omdat de dubbelpunten van de involutie, die op een lijn door twee puntenparen a_1 en a_2, b_1 en b_2 bepaald wordt, bestaanbaar zijn, wanneer de segmenten $a_1 a_2$ en $b_1 b_2$ niet over elkaar grijpen (impiéteeren) en deze dubbelpunten onbestaanbaar zijn, wanneer de segmenten dit wel doen *), zijn de zes bedoelde dubbelpunten gemakkelijk op hun bestaanbaarheid te onderzoeken. Wijl het geval, dat een der gegeven punten a, b, c op een der raaklijnen S P of S Q ligt, niet hier maar bij de reeds afgehandelde bepaling door vier punten en een raaklijn behoort, kan men drie verschillende gevallen onderscheiden naarmate de driehoek abc binnen een, twee of drie der vier deelen ligt, waarin de raaklijnen S P en S Q het vlak verdeelen; in het eerste en derde geval zijn de zes dubbelpunten allen bestaanbaar; alleen in het tweede zijn er vier onbestaanbaar en twee bestaanbaar. Zijn a en b binnen denzelfden hoek PSQ gelegen en bevindt zich c daarbuiten, dan zijn alleen de dubbelpunten op ab bestaanbaar. En duidt men nu in dit geval de onbestaanbare dubbelpunten op ac door α_1 en α_2, die op bc door β_1 en β_2 aan, dan zijn de lijnen $\alpha_1 \beta_1$ en $\alpha_2 \beta_2$ en evenzoo de lijnen $\alpha_1 \beta_2$ en $\alpha_2 \beta_1$ toegevoegd onbestaanbaar. Zoodat dit volgens het bovenstaande ook van de oplossingen kan worden beweerd, die met deze raakkoorden overeenkomen.

Uit de stelling †), dat de poollijnen van S met betrekking tot een paar toegevoegd onbestaanbare oplossingen toegevoegd harmonisch zijn met betrekking tot de gemeenschappelijke koorden die door het snijpunt dier poollijnen gaan — een stelling die haar recht van bestaan ook hier behoudt — volgt een eenvoudige constructie van de twee punten, die ieder op zich zelf met a, b en c de vier gemeenschappelijke punten van het tweetal paren van toegevoegd onbestaanbare oplossingen vormen. Is weer ab de zijde van den driehoek, waarop de bestaanbare dubbelpunten p en q gelegen zijn, en heeft men — wat zeer gemakkelijk geschieden kan §) — deze punten geconstrueerd, dan oekt men op ab twee punten p_1 en q_1 zoodanig dat p_1 met p

*) CHASLES, Géométrie supérieure, art. 206.

†) CHASLES, Sections coniques, art. 367.

§) CHASLES, Géométrie supérieure, art. 202.

en q_1 met q harmonisch ligt met betrekking tot a en b. Verbindt men daarna S met p_1 en de punten waar deze lijn bc en ac snijdt met a en b, dan zullen deze lijnen elkaar in een der twee gevraagde punten snijden; terwijl men het andere langs denzelfden weg vindt, wanneer men p_1 door q_1 vervangt, Deze constructie laat zich gemakkelijk uit de aangehaalde stelling verklaren, wanneer men bedenkt dat p en q juist de bestaanbare punten van de onbestaanbare raakkoorden zijn. Natuurlijk zijn nu even als boven bij ieder paar toegevoegde oplossingen nog twee bestaanbare raaklijnen te construeeren.

---

36. Terloops zij hier opgemerkt, dat in het voorgaande de oplossing begrepen is van het vraagstuk: Gegeven twee lijnen AB en CD en op ieder van deze een involutie bepaald door twee segmenten, op AB nl. $a_1 a_2$ en $b_1 b_2$ en op CD evenzoo $c_1 c_2$ en $d_1 d_2$, vraagt men de drie snijpunten van de overstaande zijden van den volkomen vierhoek waarvan de vier dubbelpunten der beide involuties de hoekpunten zijn te construeeren, in het geval dat deze dubbelpunten allen onbestaanbaar zijn. De bedoelde constructie mag hier zonder verdere verklaring volgen.

Is e het snijpunt van AB en CD, dan bepaalt men in de involutie op AB het met e overeenkomende punt f, in de involutie op CD het met e overeenkomende punt g. Verder vereenigt men a_1 met c_1, a_2 met c_2 en f met g en bepaalt men de snijpunten k en l van fg met $a_1\,c_1$ en $a_2\,c_2$; dan heeft men op fg twee segmenten fg en kl gekregen, die niet over elkaar grijpen. De dubbelpunten van de involutie, die door deze segmenten bepaald wordt, vormen dan met e de gevraagden.

---

37. Ik moet hier eindigen met een opmerking naar aanleiding van de volgende woorden, die PLÜCKER neerschreef toen hij het grootste aantal der dubbelpunten eener enkelvoudige kromme C_n gevonden had: „Nach der 7ten Nummer der einleitenden Betrachtungen schneiden sich alle Curven der n^{ten} Ordnung, welche der Bedingung unterworfen sind, dass sie durch

$\frac{n(n+3)}{2} - 1$ willkürlich angenommene Puncte gehen, ausserdem auch noch in denselben $\frac{n(n-3)}{2}+1$ festen Puncten. *Bemerkenswerth, und gewiss nicht ohne tiefern Grund, ist es dass diese letztere Anzahl dem eben bestimmten Maximum der Doppelpuncte gleich ist.*

Ik voer deze woorden niet aan om de daarin met zulk een zekerheid uitgesprokene bewering voor valsch te verklaren. Want ik heb eerbied voor het divinatievermogen, waar het in zoo groote mate aangetroffen en met zoo veel omzichtigheid gebruikt *) wordt als bij PLÜCKER. Bovendien begrijp ik, dat het verband diep liggen moet, wanneer PLÜCKER zich met een vermelding zonder bewijs vergenoegt. Maar alleen wilde ik doen uitkomen, dat het aangewezen verband, zoo het op goede gronden steunt, toch nooit zal kunnen leiden tot de constructie van de dubbelpunten eener dubbelpuntskromme. Want de bedoelde betrekking verbindt de $\frac{(n-1)(n-2)}{1}$ punten aan een nog grooter aantal en maakt daardoor, ook al waren de dubbelpunten allen willekeurig, het vraagstuk veeleer moeielijker dan gemakkelijker.

Uit mijn onderzoek is echter gebleken, dat alleen bij een dubbelpuntskromme van onevenen graad de dubbelpunten door eenige van hen te bepalen zijn. En dan nog wel zoo, dat men in plaats van een enkele oplossing een zeer groot aantal oplossingen verkrijgt. Hiermee is in elk geval uitgemaakt, dat het niet mogelijk is de dubbelpunten eener dubbelpuntskromme door middel van eenvoudige constructiën te vinden.

Het is niet moeielijk andere punten van overeenkomst naast die van PLÜCKER te stellen. Natuurlijk ga ik de opmerking, dat $n-1$ lijnen elkaar juist in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punten snijden, met stilzwijgen voorbij. Maar niet de volgende construc-

*) Men vergelijke PLÜCKER t. a. p. blz. 227.

tie, die zich voor ik tot de in art. 25 uitgewerkte stellingen gekomen was, aan mij als mogelijk juist opdrong.

Men neemt n rechte lijnen in een vlak en beschouwt deze gezamenlijk als een kromme C_n. Ten opzichte van deze kromme bepaalt men de $(n - 1)^2$ polen van een nieuwe rechte lijn R, of wat op hetzelfde neerkomt de $(n - 1)^2$ basispunten van de eerste poolkrommen van alle punten van R met betrekking tot C_n. Deze basispunten bestaan behalve uit de $\frac{n(n-1)}{2}$ snijpunten van de n lijnen, die C_n samenstellen, uit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ andere punten. Kunnen dit de dubbelpunten zijn eener nieuwe kromme van den n^{den} graad?

Bij een analytisch onderzoek is mij gebleken, dat de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dus verkregen punten, die natuurlijk bepaald kunnen worden door de $n + 1$ aangenomen rechte lijnen, ook bepaald zijn door $n + 1$ van hen, al is dit dan ook niet ondubbelzinnig. Natuurlijk werd ik versterkt in de verkeerde meening, dat de boven beschrevene constructie tot goede uitkomsten leidt, door het feit, dat de dubbelpunten eener dubbelpuntskromme willekeurig zijn, zoolang hun aantal niet grooter is dan $n + 1$ en vond ik een nieuwe bevestiging in de in art. 27 aangehaalde woorden van SALMON-FIEDLER omtrent de onmogelijkheid om bij een kromme C_6 acht dubbelpunten willekeurig aan te nemen. Eerst later ben ik tot de stellingen in art. 25 gekomen, waaruit mij bleek, dat de bovengenoemde constructie tot geen uitkomsten leiden kan, die met de dubbelpunten eener dubbelpuntskromme in zoo eenvoudig verband staan.

den Haag 4 Juni 1877.

RAPPORT

VAN DE HEEREN

C. H. C. GRINWIS en J. D. VAN DER WAALS.

De commissie benoemd in uwe vergadering van 29 September ll., ten einde advies uit te brengen over de ingezonden Verhandeling van Dr. H. A. LORENTZ: Over het verband tusschen de voortplantingssnelheid van het licht en de dichtheid en samenstelling der middenstoffen, heeft de eer het volgende mede te deelen.

De schrijver stelt zich ten doel de gevolgen der electromagnetische lichttheorie van MAXWELL, die tot nog toe slechts gedeeltelijk met de ervaring zijn vergeleken, nader te onderzoeken. Niet alleen zal men daardoor de waarde der theorie beter kunnen beoordeelen, maar als deze juist is, bestaat er ook kans dat het onderzoek der lichtverschijnselen ons in de kennis der electrische werkingen iets verder brengen kan.

De schrijver splitst zijne verhandeling in vier deelen. In het 1e deel geeft hij een overzicht van de electromagnetische lichttheorie en volgt daarbij eene methode, die op de theoretische beschouwingen van HELMHOLTZ gevestigd is. Hij beredeneert de bekende resultaten, dat de voortplantingssnelheid der electrische beweging gelijk is aan die van het licht en dat de brekingsaanwijzer door den vierkantswortel van het specifiek inducerend vermogen kan worden voorgesteld.

Terwijl de wiskundige behandeling in dit hoofdstuk als eene degelijke kan geroemd worden, schijnt het te betreuren, dat schrijver aan de eigenaardige opvatting van MAXWELL geene plaats inruimt en zich alleen met de methode van HELMHOLTZ

bezighoudt. Eene vergelijkende behandeling van beide methoden, die tot dusverre niet beproefd werd, zou stellig tot een breed en helder inzicht, hoogst waarschijnlijk tot een zeer vruchtbaar resultaat hebben geleid.

In het 2e hoofdstuk wordt gehandeld over lichtbeweging in eene isotrope middenstof met moleculaire structuur.

Na op de bezwaren gewezen te hebben, die zich bij de analytische behandeling voordoen, hoofdzakelijk gegrond op de onbekendheid met de dichtheid van den ether in lichamen, die het licht voortplanten, leiden de onderzoekingen van den schrijver tot eene zeer merkwaardige betrekking tusschen de dichtheid van het medium en den brekingsaanwijzer. Deze betrekking vormt het hoofdpunt zijner verhandeling; schrijver toont aan dat bij twee verschillende onderstellingen omtrent de verdeeling van den ether zijn resultaat geldig blijft en acht het waarschijnlijk, dat dit ook bij andere onderstellingen het geval zijn zal.

Ofschoon erkend moet worden dat dit onderzoek volgens eene goede methode geschiedt, schijnt het toch dat de schrijver in de laatste hypothesen ver genoeg gegaan is, vooral bij het vele, hoogst onzekere dat op het gebied van electriciteit altijd blijft bestaan.

Verder onderzocht de schrijver den brekingsaanwijzer voor een mengsel van twee stoffen en geeft hiervoor eene algemeene formule. Voorts wordt in dit hoofdstuk opgespoord het aandeel dat bij lichtbeweging aan de moleculen en aan den ether toekomt. Schrijver meent dat de hier ingeslagen weg zal kunnen leiden tot de theorie van den invloed, dien de beweging der middenstoffen op de electrische bewegingen uitoefent.

In het 3e hoofdstuk wordt de dispersie van het licht behandeld. Schrijver begint te onderstellen dat de deeltjes van het medium eene regelmatige, cubische rangschikking bezitten en komt dan tot het besluit dat de discontinuiteit der moleculen de dispersie niet verklaren kan.

Hierbij moet intusschen opgemerkt worden, dat de schrijver in dit geval de toepassing op verdunde gassen, die misschien tot andere resultaten geleid had, niet behandeld heeft. — Hij meent nu de oorzaak der dispersie in de moleculen zelve te

moeten zoeken en verkrijgt formulen, waaruit eene kleurschifting volgt, wanneer men uitgaat van de onderstelling dat zoodra in eene molecule een electrisch moment wordt opgewekt tevens eene zekere massa in beweging wordt gebracht. Bij tweeërlei onderstellingen omtrent de beweging in de moleculen komt hij tot bijzondere dispersie-uitdrukkingen. Hierdoor wordt aangewezen, dat men bij verschillende onderstellingen omtrent de beweging der moleculen tot formulen geraken kan, die de dispersie voor bepaalde gevallen verklaren kunnen. Verder wordt aangetoond hoe men de dispersie van een mengsel uit die der bestanddeelen kan afleiden. — De gevondene dispersie-formulen worden aan de ervaring getoetst, door vergelijking met de resultaten door meerdere natuurkundigen voor verschillende stoffen verkregen. De uitkomst is over het algemeen bevredigend.

De wijze waarop het 3e hoofdstuk behandeld is, moet als eene vernuftige zeer geroemd worden, al brengt ook de omstandigheid dat lichtverschijnselen door electriciteit verklaard moeten worden het stellen van hypothesen mede, wier waarschijnlijkheid noodwendig eigenaardige bezwaren heeft.

In het 4e hoofdstuk wordt de betrekking tusschen brekingsaanwijzer, dichtheid en zamenstelling behandeld en wel worden de formulen, die het theoretisch onderzoek heeft opgeleverd met de ervaring vergeleken.

Na een en ander omtrent de latere onderzoekingen van MASCART over het verband tusschen dichtheid en brekingsaanwijzer te hebben vermeld, deelt schrijver de uitkomsten der onderzoekingen mede, die WÜLLNER voor een aantal vloeistoffen en mengsels verkregen heeft. Bij vergelijking met die, welke zijne theoretische formule levert, bleek meestal goede overeenstemming te bestaan; de afwijkingen worden nagegaan en toegelicht.

Daarna bespreekt en vergelijkt de schrijver de resultaten omtrent brekingsaanwijzers door HOEK en OUDEMANS, DALE en GLADSTONE en LANDOLT verkregen en gaat dan de verandering na, die de brekingsaanwijzer van vaste lichamen door de warmte ondergaat, bepaaldelijk naar de onderzoekingen van BAILLE; hierop worden de bepalingen van den brekingsaanwijzer van zwavel en phosphorus in den vasten toestand vergeleken met die van den damp, volgens LE ROUX, behandeld.

Nu wordt de formule, die vroeger voor den brekingsaanwijzer van mengsels is opgesteld met de werkelijkheid vergeleken; de afwijkingen zijn niet meer aan zulk een eenvoudigen regel onderworpen als toen het alleen eene verandering in dichtheid gold, en men kon dit ook niet verwachten bij dit veel ingewikkelder verschijnsel. Opmerking verdient, dat de afwijkingen te grooter worden naarmate men lichtstralen met eene kleinere golflengte beschouwt.

Eindelijk wordt de formule nog vergeleken met eenige bepalingen van VAN DER WILLIGEN voor mengsels van zwavelzuur en water, alcohol en water en voor oplossingen van chloorcalcium, chloornatrium en chloorammonium. De overeenstemming is vrij voldoende, de afwijking neemt voor de meest breekbare lichtstralen de grootste waarde aan.

Door verschillende natuurkundigen is aangetoond, dat men den brekingsaanwijzer van een aantal scheikundige verbindingen op dezelfde wijze uit de zamenstelling berekenen kan als dit bij mengsels mogelijk is. Van de door schrijver in het 2e hoofdstuk gevondene formule, die reeds voor mengsels niet in alle opzichten juist was, liet zich bij verbindingen in geen geval meer dan eene ruwe benadering verwachten. De heer LORENTZ heeft daarom slechts de verbindingen van koolstof, waterstof en zuurstof, door LANDOLT onderzocht, aan de bedoelde formule getoetst.

Hij heeft echter een groot aantal zamengestelde stoffen in zijne lijst opgenomen. Ofschoon enkele waarden der tabel vrij groote afwijkingen vertoonen, zoo blijkt het toch, dat men de electromagnetische theorie van het licht aannemende, de formule die hij voor mengsels heeft afgeleid, bij eene eerste benadering ook op de onderzochte verbindingen mag toepassen.

Ten laatste bespreekt schrijver de mogelijkheid, om de brekingsaanwijzers van de elementen koolstof, waterstof en zuurstof in vrijen toestand uit die der verbindingen af te leiden. Hij geeft hierbij eenige voorbeelden in vergelijking met de waarneming.

Over het algemeen kan de arbeid van den heer LORENTZ als eene gelukkige poging beschouwd worden, de electromagnetische

lichttheorie een stap verder te brengen. Zijne verhandeling geeft blijk van scherpzinnigheid en groote kennis en is voor de in deze richting thans voortgaande wetenschap van werkelijk belang.

De Commissie meent voor de opname dezer verhandeling in de werken der Academie te mogen adviseren.

De Commissie voornoemd,

C. H. C. GRINWIS.

J. D. v. d. WAALS.

Amsterdam, 27 October 1877.

INHOUD

VAN

DEEL XIII. — STUK 1.

---

bladz.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Dertiende Deel. — Tweede Stuk.

AMSTERDAM.
C. G. VAN DER POST.
1878.

NOTE SUR L'ATTRACTION,

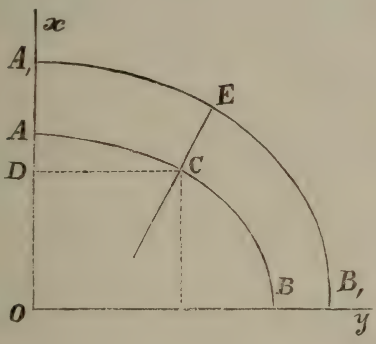
PAR

G. F. W. BAEHR.

Communiquée dans la séance du 30 *Mars* 1878.

1.

Fig. 1.



Soient $OA = a$ et $OB = b > a$ les demi-axes de l'ellipse méridienne d'un ellipsoïde de révolution autour du petit axe OA, et par conséquent aplati aux poles. Les composantes de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, parallèles aux axes et dirigées vers le centre, sur un point C de la méridienne sont proportionnelles aux coordonnées:

$$OD = \alpha, \qquad DC = \beta,$$

et données par les formules:

$$X = \frac{3\,\mathrm{M} f \alpha}{a^3\, tang^3\, \varphi} (tang\, \varphi - \varphi) = p\, \alpha,$$

$$Y = \frac{3\,\mathrm{M} f \beta}{2\, a^3\, tang^3\, \varphi} (\varphi - sin\, \varphi\, cos\, \varphi) = q\, \beta,$$

dans lesquelles M est la masse de l'ellipsoïde, f l'attraction à l'unité de distance entre deux unités de masse, et

$$tang^2 \varphi = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad a = b \cos \varphi.$$

Quand le point C se déplace sur son parallèle les deux composantes de l'attraction, l'une parallèle à l'axe de révolution, l'autre dans la direction du rayon du parallèle restent les mêmes, ensorte qu'une courbe orthogonale aux directions de la résultante pour tous les points du méridien A C B, engendra par révolution autour de l'axe de révolution de l'ellipsoïde une surface dont les normales coïncideront avec la direction de l'attraction aux points où elles recontrent l'ellipsoïde.

Soit

$$F(xy) = 0,$$

l'équation d'une telle courbe ; ses normales coïncideront avec la direction de l'attraction, donnée par les facteurs p et q indiqués ci-dessus, si l'on a :

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{p\alpha} = \frac{\frac{dF}{dy}}{q\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où les coordonnées α et β de l'ellipse méridienne satisfont à :

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

tandis que l'on a entre x, y, α et β la relation

$$\frac{x - \alpha}{p\alpha} = \frac{y - \beta}{q\beta}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

l'équation (1) donne, ayant égard à (2) :

$$\frac{\frac{1}{ap}\,\frac{dF}{dx}}{\frac{\alpha}{a}} = \frac{\frac{1}{bq}\,\frac{dF}{dy}}{\frac{\beta}{b}} = N,$$

où

$$N = \sqrt{\left(\frac{1}{a^2 p^2} \frac{dF^2}{dx^2} + \frac{1}{b^2 q^2} \frac{dF^2}{dy^2}\right)},$$

donc :

$$\alpha = \frac{1}{p N} \frac{dF}{dx}, \qquad \beta = \frac{1}{q N} \frac{dF}{dy},$$

et par substitution dans (3) :

$$\frac{x - \frac{1}{pN} \frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{y - \frac{1}{qN} \frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dy}}$$

ou, réduisant :

$$N\left(y \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy}\right) = \frac{p - q}{p q} \frac{dF}{dx} \frac{dF}{dy}.$$

On satisfait à cette équation en posant :

$$\frac{dF}{dx} = A x, \qquad \frac{dF}{dy} = B y,$$

A et B étant des constantes à déterminer ce qui donne :

$$\sqrt{\left(\frac{A^2}{a^2 p^2} x^2 + \frac{B^2}{b^2 q^2} y^2\right)} \cdot (A - B) = \frac{p - q}{p q} A B,$$

ou

$$\frac{A^2}{a^2 p^2} x^2 + \frac{B^2}{b^2 q^2} y^2 = \left(\frac{p - q}{p q}\right)^2 \left(\frac{A B}{A - B}\right)^2; \quad . \; . \; . \; (4)$$

donc on devra avoir :

$$\frac{2 A^2}{a^2 p^2} = A, \qquad \frac{2 B^2}{b^2 q^2} = B,$$

ce qui donne :

$$A = \frac{1}{2}\, a^2 p^2, \qquad B = \frac{1}{2}\, b^2 q^2,$$

et l'équation de la courbe orthogonale devient :

$$a^2 p^2 x^2 + b^2 q^2 y^2 = \frac{p^2 q^2 (p - q)^2 a^4 b^4}{(a^2 p^2 - b^2 q^2)^2} \quad \ldots . \; (5)$$

Des valeurs de p et q on déduit facilement

$$\left. \begin{array}{rcl} p & > & q\;, \\ a p & > & b q\;, \\ a^2 p & < & b^2 q\;; \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (6)$$

la courbe (5) est donc une ellipse, dont les axes de même nom coïncident avec ceux du méridien de l'ellipsoide.

On parvient au même résultat en cherchant l'enveloppe de la droite suivant laquelle est dirigée l'attraction pour les différents points du méridien A C B; l'équation de cette droite pour un point quelconque étant :

$$y - \beta = \frac{q \beta}{p \alpha}\,(x - \alpha), \quad \ldots\ldots\ldots \; (7)$$

où α et β sont des paramètres variables, liés par la relation (2), laquelle donne

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = - \frac{a^2 \beta}{b^2 \alpha},$$

on a, différentiant par rapport à β,

$$-1 = \frac{q}{p}\,(x - \alpha)\, \frac{\alpha - \beta \dfrac{d\alpha}{d\beta}}{\alpha^2} - \frac{q \beta}{p \alpha}\, \frac{d\alpha}{d\beta},$$

ou

$$-1 = \frac{q}{p}\,(x - \alpha)\, \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{a^2 \beta^2}{b^2 \alpha^2}\, \frac{q}{p},$$

ce qui, après réduction, donne la première des expressions ci-dessous, tandis que l'on obtient analoguement la seconde :

$$\frac{a^2 x}{\alpha^3} = -\frac{p-q}{q}, \quad \frac{b^2 y}{\beta^3} = \frac{p-q}{p}.$$

On trouve l'équation de l'enveloppe en éliminant au moyen de ces dernières relations les paramètres α et β dans l'équation (7), et après quelques réductions on obtient :

$$\left\{\frac{x}{\frac{a(p-q)}{q}}\right\}^{\frac{2}{3}} + \left\{\frac{y}{\frac{b(p-q)}{p}}\right\}^{\frac{2}{3}} = 1,$$

dans laquelle on reconnait l'équation de la développée d'une ellipse, dont les demi-axes A et B sont dans le rapport

$$A : B = \frac{q}{a} : \frac{p}{b} = bq : ap,$$

ensorte que A est le plus petit, et qui sont entièrement déterminés par les relations connues :

$$\frac{B^2 - A^2}{A} = \frac{a(p-q)}{q}, \quad \frac{B^2 - A^2}{B} = \frac{b(p-q)}{p},$$

qui donnent :

$$A = \frac{a b^2 (p-q) q}{a^2 p^2 - b^2 q^2}, \quad B = \frac{a^2 b (p-q) p}{a^2 p^2 - b^2 q^2},$$

ce qui s'accorde avec (5).

On déduit de ces valeurs pour les différences des axes de même nom des deux ellipses, AA_1 et BB_1 dans la figure,

$$A - a = \frac{ap(b^2 q - a^2 p)}{a^2 p^2 - b^2 q^2}, \quad B - b = \frac{bq(b^2 q - a^2 p)}{a^2 p^2 - b^2 q^2},$$

qui, en vertu de (6), sont des quantités positives, et : *propor-*

tionnelles à ap *et et* bq, c'est-à-dire, *à l'attraction pour les points placés aux sommets de l'ellipsoïde.*

En vertu de l'équation (5) trouvée pour l'ellipse orthogonale A_1EB_1, l'équation (1) devient

$$\frac{a^2 p^2 x}{p\alpha} = \frac{b^2 q^2 y}{q\beta},$$

qui est une relation entre les coordonnées des points C et E; elle donne ayant égard à (2) et (5)

$$\frac{apx}{\frac{\alpha}{a}} = \frac{bqy}{\frac{\beta}{b}} = \frac{pq(p-q)a^2b^2}{a^2p^2-b^2q^2},$$

d'où

$$x = \alpha\,\frac{q(p-q)b^2}{a^2p^2-b^2q^2}$$

et

$$x-\alpha = \alpha\,\frac{p(b^2q-a^2p)}{a^2p^2-b^2q^2}$$

en sorte que (7) devient

$$\frac{x-\alpha}{p\alpha} = \frac{y-\beta}{q\beta} = \frac{b^2q-a^2p}{a^2p^2-b^2q^2}$$

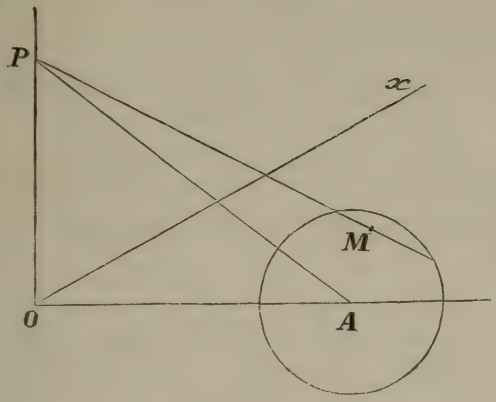
et par conséquent

$$\sqrt{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\}} = \frac{b^2q-a^2p}{a^2p^2-b^2q^2}\sqrt{\{(p\alpha)^2+(q\beta)^2\}},$$

ce qui démontre que: *la partie* CE *de la normale en* E *sera proportionnelle à l'attraction sur le point* C.

2.

Fig. 2.



On peut réduire aux intégrales elliptiques l'attraction d'un tore sur un point matériel placé dans son axe de révolution. Soient, O le centre du tore, $OA = a$ le rayon du cercle décrit par le centre du cercle générateur, et $r < a$ le rayon de celui-ci ; $OP = \gamma$ la distance du centre au point attiré, $AP = l$, et l'angle $OPA = \delta$; $MP = u$ la distance d'un point quelconque de la masse du tore au point attiré; φ l'angle APM entre u et l, et ψ l'angle entre le méridien de M et un méridien fixe $PO\,x$, alors

$$du \,.\, u\,d\varphi \,.\, u \sin(\delta + \varphi)\, d\psi$$

est l'élément de volume du tore, et par conséquent la composante de l'attraction (en raison inverse du carré de la distance) de l'élément en M sur P, estimée dans la direction PO, sera :

$$f m \mu\, du\, d\varphi\, d\psi \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi) \;,$$

où f est l'attraction à l'unité de distance entre deux unités de masse, m la masse du point attiré, et μ la masse de l'unité de volume du tore. Les composantes de l'attraction perpendiculaires à l'axe se détruisent mutuellement, en sorte que l'on aura pour l'attraction totale Z, suivant la direction PO,

$$Z = f m \mu \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{u_0}^{u_1} \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi)\, du \;,$$

où les limites de u sont :

$$u_0 = l \cos\varphi - \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} \;,$$
$$u_1 = l \cos\varphi + \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} \;.$$

et celles de φ:

$$\sin\varphi_0 = -\frac{r}{l} \qquad \sin\varphi_1 = \frac{r}{l} ,$$

tandis que l'intégration par rapport à ψ revient à multiplier par 2π, donc on aura:

$$Z = 2\pi f m \mu \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin 2(\delta + \varphi) \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}\, d\varphi .$$

Si l'on développe le sinus devant le radical, cette intégrale se divise en deux parties, dont l'une, ayant $\sin 2\varphi$ en facteur, a ses éléments deux à deux égaux mais de signes contraires, de sorte qu'elle disparait, et qu'il reste:

$$Z = 2\pi f m \mu \sin 2\delta \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos 2\varphi \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}\, d\varphi .$$

Or on a:

$$\int \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} \cos 2\varphi\, d\varphi = \int (1 - 2\sin^2\varphi) \sqrt{(r^2 - l^2 \cos^2\varphi)} . d\varphi ,$$

et, en différentiant:

$$d(\sin\varphi \cos\varphi \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}) = \frac{r^2 - 2(r^2 + l^2)\sin^2\varphi + 3l^2 \sin^4\varphi}{\sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}}\, d\varphi ;$$

éliminant au moyen de cette formule $\sin^4\varphi$, et remarquant que l'intégrale du premier membre prise entre φ_0 et $\varphi_1 = -\varphi_0$ est zéro, on parvient à

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{r^2 - (2r^2 - l^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}}\, d\varphi :$$

Posant $l \sin \varphi = r \sin \psi$, ce qui donne $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi$ pour les limites de ψ, la dernière intégrale se réduit à

$$\frac{r^2}{3\,l^3}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l^2-(2\,r^2-l^2)\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}\,d\psi\ ,$$

où le *module*

$$k=\frac{r}{l}.$$

Dans celle-ci on peut prendre pour limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, pourvu qu'on double en même temps le résultat; alors elle se réduit à

$$\frac{2}{3\,l}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[(l^2-r^2)\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}+(2r^2-l^2)\,d\psi\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}\right],$$

et portant cette valeur dans Z, ayant égard que

$$l^2=a^2+\gamma^2\ ,\qquad \sin 2\delta=\frac{2\,a\,\gamma}{a^2+\gamma^2}\ ,$$

on obtient :

$$Z=\frac{8}{3}\pi f m \mu\frac{a\,\gamma}{(a^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(a^2+\gamma^2-r^2)\,\mathrm{F}(k)-(a^2+\gamma^2-2r^2)\,\mathrm{E}(k)\right],$$

F (k) et E (k) représentant les intégrales elliptiques complètes de la première et deuxième espèce.

L'attraction du tore sur un point quelconque est dirigée, comme dans le cas de chaque corps de révolution, dans le plan méridien qui passe par ce point, parce que les composantes perpendiculaires à ce plan se détruisent mutuellement. Si donc on rapporte le tore à son axe de figure O Z et à deux rayons rectangulaires O Y et O X, tellement que le plan X O Z contienne

le point attiré, l'attraction totale sera la résultante de deux composantes dirigées dans ce plan.

Soient: $x = \alpha$ et $z = \gamma$ les coordonnées du point attiré P;
u la distance de P à un point M de la surface du tore;
ds l'élément de surface au point M dont les coordonnées sont x, y, z;
$(N z)$ l'angle entre la normale extérieure en M et l'axe des z positifs;
$F(u)$ l'attraction entre deux unités de masse à la distance u, et $F_1(u) = \int F(u)\, du$.

D'après un théorème de Gauss on obtient l'attraction d'un corps homogène sur un point P, estimée suivant la direction des z négatifs, en multipliant l'intégrale

$$- \int F_1(u) \cos (N z)\, ds ,$$

étendue à toute la surface, par le produit de la masse du point attiré et de la masse de l'unité de volume du corps.

Si dans l'intégrale on prend, au lieu de l'angle $(N z)$, l'angle $(N x)$ que la normale fait avec les x positifs, on obtient la composante dans la direction des x négatifs.

Pour obtenir cette intégrale soient:

$$x = (a + r \cos \varphi) \cos \theta ,$$
$$y = (a + r \cos \varphi) \sin \theta ,$$
$$z = r \sin \varphi ,$$

qui satisfont identiquement à l'équation du tore:

$$\left[a - \sqrt{(x^2 + y^2)}\right]^2 + z^2 = r^2$$

en sorte que θ est l'angle que le méridien d'un point quelconque M de la surface du tore fait avec le plan XOZ, et φ l'angle entre le rayon du cercle générateur, mené dans ce méridien au point M, et le rayon du tore.

Ces valeurs de x, y, z donnent pour l'élément de surface

$$ds = r\,(a + r\cos\varphi)\,d\theta\,d\varphi\ ,$$

et l'on a

$$\cos(\mathrm{N}.x) = \cos\varphi\cos\theta\ , \qquad \cos(\mathrm{N}.z) = \sin\varphi\ ,$$

et, l'attraction étant en raison inverse du carré de la distance

$$\mathrm{F}(u) = \frac{f}{u^2}\ , \quad \text{d'où}\ \mathrm{F}_1(u) = -\frac{f}{u}\ ,$$

tandis que

$$u = \sqrt{\{(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2\}} = \sqrt{(p - q\cos\theta)}\ ,$$

en posant pour abrévier:

$$p = a^2 + r^2 + \alpha^2 + \gamma^2 + 2r\,(a\cos\varphi - \gamma\sin\varphi)\ ,$$
$$q = 2\alpha\,(a + r\cos\varphi)\ ,$$

en sorte que la composante de l'attraction, dans le sens des z négatifs, est:

$$\mathrm{Z} = f\,m\,\mu\,r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a + r\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta}{\sqrt{(p-q\cos\theta}}\ .$$

Intègrant premièrement par rapport à θ et posant $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\pi - \psi$, ce qui donne $\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$ pour limites de ψ, on a

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{(p-q\cos\theta)}} = 2\int\frac{d\theta}{\sqrt{(p+q-2q\cos^2\frac{1}{2}\theta)}} = 2\int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi}\frac{-d\psi}{\sqrt{(p+q-2q\sin^2\psi)}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{(p+q)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\psi)}}\ ,$$

où le module k est donné par

$$k^2 = \frac{2q}{p+q} \quad .$$

Une intégration ultérieure ne semble possible que dans le cas où $\alpha = o$, et par suite $q = o$ et $k = o$; alors faisant comme précédemment :

$$a^2 + \gamma^2 = l^2 ,$$

on a

$$Z = 2\pi f m \mu r \int_0^{2\pi} \frac{(a + r\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(l^2 + r^2 + 2r(a\cos\varphi - \gamma\sin\varphi))}} \; .$$

Si l'on pose

$$\frac{\gamma}{a} = tang\,\delta \quad , \qquad \text{et } \varphi + \delta = \psi \; ,$$

l'intégrale se réduit à :

$$\int_\delta^{2\pi+\delta} \frac{a\sin(\psi - \delta) + \frac{1}{2} r \sin 2(\psi - \delta)}{\sqrt{(l^2 + r^2 + 2lr\cos\psi)}}\, d\psi ,$$

où l'on peut changer les limites en 0 et 2π, parce que les éléments de 2π à $2\pi + \delta$ sont égaux à ceux de 0 à δ. Développant les sinus au numérateur cette intégrale se divise en deux parties, dont l'une a pour numérateur

$$(a\cos.\delta + r\cos.\psi\cos.2\delta)\sin.\psi\, d\psi ,$$

et dont l'intégrale prise de 0 à 2π est zéro, parce que dans cet intervalle ses éléments se détruisent deux à deux, en sorte qu'il reste :

$$- \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos.\psi + r\cos.2\psi\cos.\delta)\sin.\delta}{\sqrt{(l^2 + r^2 + 2lr\cos.\psi)}} ,$$

ce qui, si l'on y subststue

$$cos.\,\delta = \frac{a}{\sqrt{(a^2+\gamma^2)}} = \frac{a}{l}, \quad sin.\,\delta = \frac{\gamma}{l},$$

devient :

$$-\frac{a\gamma}{l^2}\int_0^{2\pi} \frac{l\,cos.\,\psi + r\,cos.\,2\,\psi}{\sqrt{(l^2+r^2+2\,lr\,cos.\,\psi)}}\,d\,\psi,$$

ou

$$-\frac{a\gamma}{l^2}\int_0^{2\pi} \frac{(l+r)-2\,(l+4\,r)\,sin.^2\,\frac{1}{2}\,\psi + 8\,r\,sin.^4\,\frac{1}{2}\,\psi}{\sqrt{((l+r)^2-4\,l\,r\,sin.^2\,\frac{1}{2}\,\psi)}}\,d\,\psi,$$

ou bien :

$$-\frac{2\,a\gamma}{l^2}\int_0^{\pi} \frac{(l+r-2\,(l+4\,r)\,sin.\,^2\,\psi + 8\,r\,sin.\,^4\,\psi}{\sqrt{(1-k_1{}^2\,sin.^2\,\psi)}}\,d\,\psi,$$

dans laquelle

$$k_1{}^2 = \frac{4\,l\,r}{(l+r)^2};$$

différentiant le produit $\Delta\,sin.\,\psi\,cos.\,\psi$, où Δ désigne le radical au dénominateur de l'intégrale, on obtient la formule de réduction :

$$\frac{sin.^4\,\psi\,d\psi}{\Delta} = \frac{2\,(1+k^2)}{3\,k^2}\,\frac{sin.^2\,\psi\,d\psi}{\Delta} - \frac{d\,\psi}{3\,k^2\,\Delta} + d(\Delta\,sin.\psi\,cos.\psi);$$

au moyen de laquelle on peut éliminer $sin.^4\,\psi$, et remarquant que l'intégrale du dernier terme au second membre de cette formule est zéro, l'intégrale précédente devient :

$$-\frac{4\,a\,\gamma}{3\,l^3\,(l+r)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(l+r)\,(l-2\,r)-2\,(l^2-2r^2)\,sin.^2\,\psi}{\sqrt{(1-k_1{}^2\,sin.\,^2\,\psi)}}\,d\,\psi;$$

laquelle, ayant égard à l'identité

$$sin.^2\,\psi = \frac{1-(1-k^2\,sin.^2\,\psi)}{k^2},$$

se réduit enfin à

$$\frac{2a\gamma}{3l^4r}\left[(l-r)(l^2+2r^2)\,\mathrm{F}(k_1)-(l+r)(l^2-2r^2)\,\mathrm{E}(k_1)\right],$$

et ce résultat multiplié par $2\pi f m \mu r$ donne Z.

Pour montrer l'accord avec la formule obtenue précédemment, on observe que

$$k_1^2=\frac{4lr}{(l+r)^2}=\frac{4\frac{r}{l}}{\left(1+\frac{r}{l}\right)^2}=\frac{4k}{(1+k)^2};$$

il existe donc entre les modules k_1 et k la relation qui permet d'appliquer la transformation de Landen, laquelle donne pour les intégrales complètes de la première espèce :

$$\mathrm{F}(k_1)=(1+k)\,\mathrm{F}(k)=\frac{l+r}{l}\,\mathrm{F}(k),$$

et pour celles de la deuxième espèce :

$$(1-k^2)\,\mathrm{F}(k)=2\,\mathrm{E}(k)-(1+k)\,\mathrm{E}(k_1),$$

d'où

$$\mathrm{E}(k_1)=\frac{2}{1+k}\,\mathrm{E}(k)-(1-k)\,\mathrm{F}(k),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{E}(k_1)=\frac{2l}{l+r}\,\mathrm{E}(k)-\frac{l-r}{l}\,\mathrm{F}(k).$$

Substituant ces valeurs pour $\mathrm{F}(k_1)$ et $\mathrm{E}(k_1)$, le coëfficiënt de $\mathrm{F}(k)$ devient :

$$\frac{(l^2-r^2)(l^2+2r^2)}{l}+\frac{(l^2-r^2)(l^2-2r^2)}{l},$$

ou

$$2l(l^2-r^2);$$

celui de $\mathrm{E}(k)$

$$-\,2l(l^2-2r^2);$$

et le facteur devant les crochets sera :

$$2\pi f m \mu \gamma \cdot \frac{2 a \gamma}{3 l^4 r} \cdot 2 l ,$$

ou

$$\frac{8}{3} \pi f m \mu \; \frac{a \gamma}{(a^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \; .$$

La composante dans le sens des x négatifs est :

$$X = f m \mu r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a + r \cos. \varphi) \cos. \varphi \cos. \theta \, d \varphi \, d \theta}{\sqrt{(p - q \cos. \theta)}} ;$$

faisant $\theta = \pi - 2 \psi$, on a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos. \theta \, d \theta}{\sqrt{(p - q \cos. \theta)}} = \frac{4}{\sqrt{(p + q)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2 \sin.^2 \psi - 1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin.^2 \psi)}} \, d \psi$$

où

$$k^2 = \frac{2 q}{p + q}$$

et laquelle se réduit à

$$\frac{4}{\sqrt{(p+q)}} \left[\frac{2 - k^2}{k^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d \psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)}} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d \psi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi)} \right] ;$$

mais ici une réduction ultérieure ne parait possible, même si le point attiré est placé dans l'axe des x, ou si $\gamma = 0$, que dans le cas où en même temps :

$$\alpha^2 = a^2 - r^2,$$

c'est-à-dire, dans le cas où le point attiré est dans le plan équateur du tore, à une distance du centre égale à la tangente menée du centre à sa surface.

Dans ce cas l'on a :

$$p = 2 a (a + r \cos \varphi),$$

$$q = 2 \alpha (a + r \cos \varphi),$$

$$k^2 = \frac{2 \alpha}{a + \alpha} ,$$

et le résultat ci-dessus devient:

$$\frac{4}{\sqrt{2(a+\alpha)(a+r\cos\varphi)}}\left[\frac{a}{\alpha}\mathrm{F}(k)-\frac{a+\alpha}{\alpha}\mathrm{E}(k)\right],$$

en sorte qu'il reste donc à réduire:

$$\int_0^{2\pi}\frac{(a+r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(a+r\cos\varphi)}},$$

laquelle, si l'on fait:

$$\tfrac{1}{2}\varphi=\psi \quad \text{et} \quad k_1^2=\frac{2r}{a+r},$$

devient

$$\frac{4}{\sqrt{(a+r)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(a+r)-2(a+2r)\sin^2\psi+4r\sin^4\psi}{\sqrt{(1-k_1^2\sin^2\psi)}}\,d\psi$$

ou, éliminant $\sin^4\psi$,

$$\frac{4}{3\sqrt{(a+r)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{2(a+r)-2a\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k_1^2\sin^2\psi)}}\,d\psi,$$

ce qui se réduit à:

$$\frac{4\sqrt{(a+r)}}{3r}\left[(2r-a)\mathrm{F}(k_1)+a\mathrm{E}(k_1)\right]$$

et l'on trouve finalement dans ce cas particulier:

$$X=\frac{16}{3\sqrt{2}}fm\mu\frac{\left[a\mathrm{F}(k)-(a+\alpha)\mathrm{E}(k)\right]\left[(2r-a)\mathrm{F}(k_1)+a\mathrm{E}(k_1)\right]}{\sqrt{(a+\alpha)(a-r)}}.$$

Delft, Mars 1878.

OVER
DE
OORZAAK DER ARTERIETONEN.

DOOR

A. HEYNSIUS.

Onder normale omstandigheden neemt men alleen aan de groote slagaderen nabij het hart (aan de aorta adscendens en thoracica, art. pulmonalis, carotis en subclavia) tonen waar en wel twee: een eersten, zoog. diastolischen toon, die tijdens de systole van het hart wordt gehoord en een betrekkelijk langen duur heeft; een tweeden, zoog. systolischen toon van korteren duur, die op een bepaald tijdstip van de diastole van het hart wordt waargenomen. Tusschen den eersten en tweeden slagadertoon verloopt een zeer korte, tusschen den tweeden en opvolgenden eersten een langere periode, gedurende welke geen geluid gehoord wordt. Men onderscheidt daarom twee pauzen: een eerste, zeer korte; een tweede, die ongeveer even lang duurt als de diastole van het hart.

In verder van het hart verwijderde arteriën worden normaal geen tonen, evenmin een eerste als een tweede dus, waargenomen. In pathologische toestanden daarentegen hoort men ook in verder van het hart verwijderde slagaderen, vooral in de cruralis, maar ook zelfs in den arcus volaris een toon. In zulke gevallen is het altijd de eerste, diastolische toon, die gehoord wordt. In zeer zeldzame gevallen wordt, in plaats van een enkele, een dubbele toon in de cruralis gehoord. Dat deze toon in verreweg de meeste gevallen in die arteries zelve, autochthoon zooals men het noemt, ontstaat, is gemakkelijk te constateeren, want hij treedt veel later dan de eerste hart- of aortatoon op. Men hoort hem op hetzelfde oogenblik, waarop

de pols in de arterie gevoeld wordt en hij ontstaat dus zooveel later dan de eerste hart- of eerste aortatoon, als de pols tijd behoeft om zich van het hart naar de onderzochte arterie voort te planten. — Voor de nabij het hart gelegen slagaderen, waarin normaal een eerste toon gehoord wordt, kan het natuurlijk op deze eenvoudige wijze niet worden uitgemaakt of de eerste toon ook hier in die vaten zelve, autochthoon ontstaat, omdat de afstand van deze slagaderen tot den oorsprong der aorta zoo klein is, dat men geen tijdverschil tusschen het optreden van den pols (in deze vaten) en van den toon der aorta (of art. pulmonalis) kan constateeren.

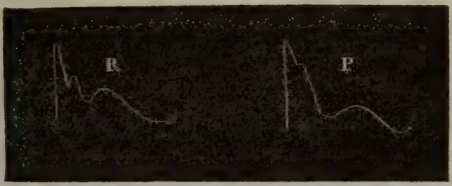
Behalve deze *tonen*, worden er in de slagaderen nog *geruischen* gehoord en wel onder physiologische en pathologische omstandigheden. Tot de physiologische geruischen behooren: het hersengeruisch, het baarmoeder- en het axillairgeruisch. Tot de pathologische: de geruischen bij stenose der ostia art. en bij insufficientie der valv. semilunares, bij aneurysmata enz. In het algemeen worden die geruischen bij abnormale vernauwing (resp. verwijding) van het stroombed waargenomen. Maar ook zonder dat een vernauwing of verwijding kan worden geconstateerd, treden dergelijke geruischen in de carotis en nog menigvuldiger in de art subclavia of axillaris op. Het zijn altijd intermitteerende geruischen, die met uitzondering natuurlijk van het geruisch bij insufficientie der valv. semil., tijdens de diastole der arterie worden gehoord.

De tot nog toe beschreven tonen en geruischen komen zonder toedoen van den auscultator in de slagaderen tot stand. Men noemt ze daarom: *spontane* tonen en geruischen. Bovendien kunnen er nog andere worden gehoord, maar die worden *kunstmatig* door den auscultator voortgebracht. Men kan ze *kunstmatige, door drukking voortgebrachte* geruischen en tonen noemen.

In alle arteriën van middelbare grootte, die met het stethoskoop bereikbaar zijn, onverschillig of zij ver van het hart verwijderd of in de nabijheid daarvan gelegen zijn, kan door drukking met den rand van het stethoskoop *een geruisch of een toon* worden voortgebracht. Dit geruisch is altijd een diastolisch geruisch en wordt gehoord op het oogenblik, waarop de pols in de onderzochte slagaderen wordt gevoeld. Het is dus

een autochthoon geruisch. De toon, als hij gehoord wordt, is eveneens een autochthone, diastolische toon. Wanneer men namelijk zonder te drukken de art. brachialis in de plica cubiti, de cruralis of radialis ausculteert, hoort men gewoonlijk geen geluid hoegenaamd. Drukt men echter met het stethoskoop wat sterker aan, dan hoort men duidelijk — bij de radialis gelukt het moeielijker dan bij de brachialis en cruralis — een intermitteerend geruisch, isochroon met de diastole der arterie. Men hoort het, althans in de cruralis, insgelijks als men met den vinger op de arterie drukt en zoo overtuigt men zich gemakkelijk, dat men ten opzichte van het stethoskoop aan de centrale zijde van de slagader drukken moet om het geruisch te doen ontstaan. De intensiteit van het geruisch wordt bij toenemende drukking aanvankelijk sterker. Somtijds kan men aan dit geruisch twee tempo's onderscheiden, waarvan de tweede versterking met de dicrotische verheffing van de katacrotische lijn samenvalt. Bij maximale intensiteit hoort WOLFF *) onder gunstige omstandigheden in de art. brachialis zelfs drie meer of min van elkander gescheiden geruischen in overeenstemming met den vorm der sphygmografische curve, in wier katacrotische lijn hij bij de art. brachialis en radialis (R) drie toppen aantreft, terwijl er aan de kleinere arteriën der onderste ledematen, b.v. in de art. pediaea (P), slechts twee toppen daarin zouden voorkomen.

Fig. 1.



Als men nu nog sterker drukt, dan wordt de intensiteit van het geruisch geringer en verdwijnt het eindelijk geheel. Dan hoort men in plaats van het diastolisch geruisch een korten, klinkenden toon, die ook weer bij de diastole der arterie, iets later dan de eerste hart- of aortatoon wordt gehoord en derhalve ontwijfelbaar in de onderzochte arterie zelve ontstaat.

De tweede, systolische, alleen in de groote slagaderen hoor-

*) O. J. B. WOLFF, *Charakteristik des Arterienpulses*, 1865.

bare toon wordt algemeen voor den tweeden harttoon gehouden en even algemeen schrijft men dien tweeden harttoon aan trillingen toe, die in de valvulae semilunares door hare plotselinge sluiting bij den aanvang der diastole zouden ontstaan. Die tweede harttoon heeft dus een tweeledigen oorsprong: de trillingen van de valv. semilunares van de aorta en van de art. pulmonalis. Beide dragen tot den tweeden harttoon bij. Maar hij is, zooals vooral pathologische toestanden bewijzen, des te luider, naarmate caet. par. de drukking in de arterie hooger is. Daarom overweegt de aortatoon gewoonlijk en is het vooral (hoewel niet uitsluitend natuurlijk) de voorgeleide tweede aortatoon, die wij in de groote vaten als tweede toon waarnemen. In de linker art. subclavia echter zou de tweede pulmonaaltoon praevaleeren *), hetgeen van de anatomische verhoudingen afgeleid wordt, waardoor de geleiding voor den pulmonaaltoon naar deze slagader gunstiger is dan voor den aortatoon.

De eerste, diastolische, in de carotis en subclavia waarneembare toon wordt veelal aan eigen trillingen van den arte-

---

*) A. WEIL, *Die Auscultation der Arterien und Venen*, 1875, een belangrijk boekje en voor ons doel van bijzondere waarde. „Die Verplichtung" schrijft WEIL in zijne voorrede, „die mir als Lehrer der Percussion und Auscultation erwuchs, mich mit der Literatur dieser Disciplin näher vertraut zu machen, liess mich auch in die Widersprüche tiefer blicken, die das Studium einzelner Kapitel der physikalischen Diagnostik zu einem besonders unerquicklichen machen. Nirgends aber fand ich, nicht nur hinsichtlich der Erklärung der Erscheinungen, sondern auch in Bezug auf den Thatbestand selbst so zahlreiche Controversen, so widersprechende Angaben, als gerade in der Lehre von der Auscultation der Gefässe. Dieser Umstand musste zu dem Bestreben anreizen, an der Hand eigener Klinischer Beobachtung die Wahrheit kennen zu lernen. Dazu was es vor Allem nöthig eine sehr grosse Anzahl von gesunden und kranken Individuen systematisch zu behorchen". Hiertoe was WEIL als Adsistent bij de med. kliniek te Heidelberg in de gelegenheid en met groote nauwgezetheid heeft hij die taak volbracht.

Over de eigenlijke oorzaak der tonen en geruischen heeft WEIL geene onderzoekingen gedaan en het kort historisch overzicht, dat hij van deze onderzoekingen geeft, is in vele opzichten gebrekkig, zooals men zien zal. Maar zijne nauwkeurige opgaven van hetgeen er in arteriën en venae te hooren is, komen mij zeer te pas. Ik zou tot een dergelijk onderzoek op zoo groote schaal niet in staat geweest zijn. Nu kan ik mijne theorie van de oorzaak dezer verschijnselen aan WEIL's nauwkeurige klinische waarnemingen toetsen. Elke theorie, en dus ook die van den physischen grond der tonen en geruischen in het vaatstelsel, is natuurlijk onvoldoende, zoolang een der bekende verschijnselen daarmede in strijd is. Zij mag daarentegen voldoende heeten, als zij van alle bekende en goed geconstateerde verschijnselen rekenschap geeft.

riewand toegeschreven, die daarin bij zijne plotselinge uitzetting (spanning) door de voorbijschrijdende polsgolf zouden tot stand komen. Sommigen leiden echter dezen eersten arterietoon, zooals alle andere tonen van het hart af (KIWISCH, CONRAD), terwijl WEIL hem voor een voortgeleiden eersten aorta- en pulmonaaltoon houdt. Hij zou dus, ook volgens WEIL, in de carotis en de subclavia niet op de plaats zelve, niet autochthoon dus, door trillingen van den arteriewand ontstaan, maar de eerste toon der aorta en der art. pulmonalis zijn, die derwaarts worden voortgeleid. Hierbij zou, evenals bij den tweeden toon, in de linker art. axillaris de pulmonaaltoon, in de overige groote slagaderen de aortatoon praevaleeren. Hoe die eerste aorta- en pulmonaaltoon ontstaat, daarover laat WEIL zich niet uit: „Die Discussion der Frage, in welcher Weise die beiden, an die Carotis heraufgeleiteten Töne am Herzen selbst entstehen, liegt ausserhalb der meinem Thema gesteckten Grenzen" (l. c. S. 39).

Als er in verder van het hart gelegen slagaderen een eerste toon wordt gehoord, is men algemeen geneigd om aan te nemen en ook WEIL sluit zich bij deze voorstelling blijkbaar aan, dat die toon van trillingen afhankelijk is, welke door de voorbijsnellende polsgolf in den arteriewand ontstaan, dus autochtoon is *). Hij treedt namelijk alleen dan op, wanneer het verschil tusschen de diastolische en systolische spanning van den arteriewand grooter dan normaal is. Dit verschil kan door tweeërlei oorzaken worden vergroot: 1°. door het dalen van het systolisch spanningsminimum bij gelijk, grooter of zelfs kleiner diastolisch spanningsmaximum; 2°. door het stijgen van het diastolisch spanningsmaximum bij gelijk blijvend spanningsminimum. In beide gevallen kan grootere celeriteit van den pols daarbij nog begunstigend werken. In het meerendeel der gevallen waarin een toon in de cruralis wordt gehoord is het systolisch spanningsminimum lager dan gewoonlijk en de toon derhalve van de sub 1 genoemde oorzaak afhankelijk, maar ook, hoewel zeldzamer, wordt een diastolische toon in de cruralis

*) Slechts tweemaal op 81 gevallen vond WEIL in de cruralis den toon niet isochroon met den pols. In die twee gevallen was de toon in de cruralis duidelijk de voortgeleide tweede harttoon (l. c. s. 61).

gehoord, zonder dat men een lage drukking in het art. vaatstelsel aannemen kan. Dan is de oorzaak van den toon in de sub. 2 genoemde omstandigheid te zoeken. In beide gevallen wordt natuurlijk hetzelfde effect bereikt: relatief is de diastolische uitzetting van den arteriewand in de eenheid van tijd aanzienlijker en daardoor de voorwaarde voor het ontstaan van hoorbare trillingen gunstiger. Daar de absolute waarde van de eindspanning dus blijkbaar geen invloed heeft, wil dit zeggen in physischen zin, dat de graad van spanning van den arteriewand en de daarvan afhankelijke *trillingsduur* (die de toonhoogte bepaalt) geheel onverschillig is voor het ontstaan van dezen toon en dat het alleen van de *amplitude* der trillingen afhankelijk is of men hem in deze arterie hoort of niet.

Bij een hoogen graad van insufficientie der valv. semil. aortae wordt, in plaats van één diastolische toon, een dubbele toon in de cruralis gehoord (TRAUBE en FRÄNTZEL). De eerste is luider en met de diastole, de tweede zwakker en met de systole der arterie isochroon. De eerste werd door TRAUBE aan de plotselinge *spanning* van den arteriewand, de tweede aan de plotselinge *ontspanning* daarvan toegeschreven en deze verklaring is algemeen aangenomen.

Ten opzichte van de geruischen, die in de arteriën worden gehoord, omhelst men meer en meer de door mij in 1854 verdedigde stelling, dat zij *primair* in de vloeistof ontstaan *). Dat de bij vernauwing (resp. verwijding) van het slagaderlijk stroombed optredende diastolische geruischen werkelijk primair in de vloeistof ontstaan, was, dunkt mij, na mijne mededeeling, dat zij even goed in buizen met stijve wanden als in elastieke buizen worden gehoord, onbetwistbaar. Aanvankelijk vond evenwel mijne theorie weinig voorstanders en nog vele jaren later werd algemeen de vermeerderde wrijving van de vloeistof tegen den wand op de vernauwde plaats als oorzaak van deze geruischen in alle handboeken over auscultatie opgegeven, niettegenstaande feitelijk door mij toch was aangetoond, dat deze opvatting onmogelijk juist zijn kon, daar het geruisch niet op de *vernauwde*,

---

*) Bijdrage tot eene physische verklaring der vaatgeruischen, *Nederl. lancet*, D. IV, bl. 20, 1854.

maar integendeel op de *verwijde* plaats het duidelijkst wordt gehoord. Daarin is thans, vooral in de laatste jaren, verandering gekomen. Men neemt thans vrij algemeen aan, dat zulke geruischen op de verwijde plaats en door de eigenaardige beweging der vloeistof aldaar ontstaan, dus niet van primaire wandtrillingen, maar van primaire vloeistoftrillingen afhankelijk zijn. Nu dreigt men evenwel in een ander uiterste over te slaan: niet slechts bij ongelijke wijdte van het stroombed, maar ook zonder vernauwing (of verwijding) zouden er in arteriën en venae door de stroombeweging geruischen ontstaan. Men steunt zich daarbij — geheel ten onrechte evenwel zooals wij zien zullen — op de onderzoekingen van WEBER *), THAMM †) en NOLET §), die aantoonden, dat er ook in gelijk wijde buizen door de stroombeweging der vloeistof een geruisch kan worden voortgebracht.

Het verst in dit opzicht gaat TALMA **). Niet slechts de geruischen, die bij vernauwing of verwijding van het stroombed in de slagaderen en aderen voorkomen, worden, volgens TALMA, door de stroombeweging van het bloed in de vaten voortgebracht, maar alle arterie- en harttonen eveneens. De eerste harttoon is, volgens TALMA, niet van trillingen in de klapvliezen aan de ostia venosa afhankelijk, maar van de vloeistofbeweging in de beide hartekamers Hoogstens draagt het spiergeruisch van de beide kamers een weinig tot den eersten harttoon bij. De tweede harttoon wordt ten onrechte aan trillingen in de valv. semilunares toegeschreven, volgens TALMA: hij is insgelijks een vloeistofgeruisch. Bij het ophouden van de systole van het hart is de wand der aorta en art. pulmonalis sterk uitgezet. Het bloed wordt naar de ostia art. teruggedreven en deze beweging duurt zoolang tot de klapvliezen sterk gespannen zijn. Deze stroombeweging brengt een geruisch voort en dit is de oorzaak van den tweeden harttoon. De arterietonen ontstaan

---

*) *Archiv f. physiol. Heilkunde*, Bd. XIV, S. 41, 1855.

†) *Berliner klin. Wochenschrift*, 1869, N°. 15.

§) Onderzoekingen gedaan in het physiol. Laboratorium der Leidsche Hoogeschool, 1870 en *Archiv f. physiol. Heilkunde*, 1871.

**) *Deutsches Archiv f. klin. Medicin*, S. 77, 1874.

insgelijks autochthoon door de stroombeweging van het bloed. Kortom alle geruischen en tonen, die in het vaatstelsel worden gehoord, zijn vloeistofgeluiden, die door de wrijving der vloeistofdeeltjes ontstaan. „Friction is rhytmic" zegt TALMA met TYNDALL en de onregelmatige beweging der vochtmoleculen (de tourbillons), die ik in het verwijde gedeelte van het stroombed als de eigenlijke oorzaak van het geruisch aanwees, staat met het wezen van het verschijnsel in geen essentiëel verband.

Ik houd de meening, dat er zonder vernauwing (resp. verwijding) van het stroombed geruischen in het vaatstelsel ontstaan en a fortiori TALMA's theorie van de oorzaak der hart- en arterietonen voor onjuist, maar heb die opvatting tot nog toe niet weersproken, omdat ik wel is waar, naar mijne meening althans, hare onjuistheid bewijzen, maar zelf geene theorie der arterietonen geven kon, die mij voldoende voorkwam, d. i, die van alle bekende verschijnselen ten opzichte van die tonen rekenschap geeft. Voor geruimen tijd reeds ontdekte ik de oorzaak van den eersten, diastolischen toon in de groote arteriën en ook het geruisch en de toon, die *kunstmatig, door drukking*, in de van het hart verwijderd gelegen slagaderen ontstaan, lieten zich gereedelijk verklaren. Maar de *spontane* diastolische arterietoon, die abnormaal in verder van het hart verwijderde slagaderen (cruralis) gehoord wordt, bleef mij altijd nog onverklaarbaar. Evenzoo de dubbele toon, die in zeldzame gevallen daar ter plaatse wordt gehoord. Ik meen ook voor deze geluiden thans de oorzaak te kunnen aanwijzen, en deel om die reden de resultaten van mijn onderzoek nu mede.

Vooraf een woord over de benamingen „toon" en „geruisch" in het vaatstelsel. Die namen zijn conventioneel. Bij eenige oefening levert het in het algemeen geen bezwaar op om een zoog. toon van een geruisch in het vaatstelsel te onderscheiden, maar er komen overgangen voor, waarbij men in twijfel geraakt. De oorzaak is hierin gelegen, dat de zoog. hart- en arterietonen geen ware tonen zijn. Wel hebben sommigen beweerd, dat zij de hoogte dier tonen kunnen bepalen, maar dit schijnt toch slechts aan weinigen gegeven te zijn. Wij zullen straks aantoonen, dat een

van de stroombeweging der vloeistof afhankelijk geruisch in een werkelijken toon kan overgaan. Een principiëel verschil bestaat er tusschen een toon en een geruisch in het vaatstelsel dus zeker niet.

Het eerst handel ik over den in de carotis en subclavia normaal hoorbaren diastolischen of eersten toon. Kan hij een toon zijn, die door de stroombeweging van het bloed in die vaten zelve, autochthoon dus ontstaat, zooals TALMA wil? Mij dunkt, dat deze theorie met de in NOLET's dissertatie voorkomende snelheidsbepalingen in strijd en daardoor weêrlegd is.

De ervaring toont aan, dat in de leer der vaatgeruischen de hydrodynamische zijde der kwestie het moeielijkst ingang vindt, waarschijnlijk omdat zij door velen niet recht duidelijk begrepen wordt. Daarom veroorloof ik mij een korten terugblik op den gang van het onderzoek sedert 1850 *). Eerst door VOLKMANN's boek *Die Haemodynamik nach Versuchen*, dat in 1850 werd uitgegeven en door WEBER's kritiek daarvan, die in 1851 in de Berichte der Königl. Sachs. Gesellsch. d. Wissenschaften verscheen, hebben wij de wetten leeren kennen, die de golf- en stroombeweging in het vaatstelsel beheerschen. Alle vóór dien tijd verschenen mededeelingen omtrent de omstandigheden, waaronder in het vaatstelsel of in buizen tonen en geruischen ontstaan, zijn dus, zooals van zelf spreekt, tamelijk gebrekkig en ongenietbaar, in zooverre daarbij de golf- en stroombeweging van het bloed ter sprake komt.

Ook KIWISCH' bijdrage over de oorzaak der vaatgeluiden, die in 1850 verscheen, lijdt nog aan dit euvel, zooals licht begrijpelijk is. KIWISCH merkte zeer juist op, dat het geruisch in ongelijk wijde buizen niet op de *vernauwde* plaats, maar integendeel na de vernauwing, in het relatief *wijdere* gedeelte ontstaat, maar door gemis aan kennis omtrent de wetten van stroombeweging geraakte hij omtrent den zetel der geruischen in het vaatstelsel in dwaling. Hij meent, dat er een zekere „Stromkraft" noodig

---

*) De litteratuur van voor 1850 heb ik in mijne bijdrage van 1854 vrij uitvoerig gegeven. Men kan daaruit zien, dat ik het was, die de onopgemerkt gebleven onderzoekingen van CORRIGAN in herinnering bracht.

is om een geruisch in zulk een verwijd gedeelte van de buis te doen ontstaan en besluit daarom, dat er alleen in arteriën geruischen kunnen ontstaan, m. a. w. dat b.v. het nonnengeruisch een arteriëel geruisch is.

Ik was gelukkiger. Ik deed mijn onderzoek in 1854 en had geleerd, dat men bij de stroombeweging van een vloeistof twee *hoofdzaken* te onderscheiden heeft: *de zijdelingsche drukking* van de vloeistof tegen den wand der buis, die men door een manometer bepalen kan en 2de *de stroomsnelheid* in de eenheid van tijd (één sec. neemt men gewoonlijk), die uit de hoeveelheid van het uitvloeiende water in verband met het lumen der buis wordt afgeleid. Ik wist dat die drukking in de arteriën vrij hoog en altijd positief, in de venae daarentegen vrij laag en in de aderen van den hals ten gevolge van de zuigkracht van den thorax zelfs negatief is. Ik wist bovendien, dat de stroomsnelheid van het bloed in de aorta op ongeveer 40 cm. per sec. werd geschat en dat zij door de steeds toenemende verwijding van het stroombed in de arteriën afneemt, naarmate men zich verder van het hart verwijdert.

Om dus uit te maken of het geruisch, dat bij plotselinge vernauwing (of verwijding) van het stroombed gehoord wordt, alleen in de arteriën of alleen in de venae of wel in beide ontstaan kan, liet ik door een drukvat en door een adspirator — door drukking en zuiging dus — vloeistof door een buis stroomen en bracht, terwijl de stroomsnelheid in de buis overal dezelfde was en bleef, denzelfden graad van vernauwing op het begin, het midden en het eind der buis — bij pos. drukking, 0 drukking en neg. drukking dus — te weeg. Het geruisch werd, als de stroomsnelheid groot genoeg was, op elke plaats in het verloop der buis en wel met dezelfde intensiteit gehoord en ik besloot dus, dat er bij vernauwing van het stroombed (resp. verwijding) zoowel in venae als in arteriën geruischen kunnen ontstaan, want de *zijdelingsche drukking oefent geen invloed uit* op het verschijnsel

Ik onderzocht voorts den invloed der stroomsnelheid Bij denzelfden graad van vernauwing (of verwijding) liet ik door verhooging van den stand van het water in het drukvat, door verhooging van de drukhoogte dus, de vloeistof met grootere,

door verlaging van de drukhoogte met geringere snelheid door de buis stroomen en 'k vond, dat het *alleen van de stroomsnelheid afhangt* of er bij een bepaalden graad van vernauwing een geruisch gehoord wordt en dat ook de intensiteit van het geruisch met de stoomsnelheid stijgt of daalt.

Theod. weber stelde bijna gelijktijdig (in 1855) een gelijksoortig onderzoek in het werk en kwam wat den invloed der zijdelingsche drukking en stroomsnelheid betreft, geheel onafhankelijk van mij tot dezelfde resultaten. Omtrent de oorzaak van het geruisch liepen echter onze meeningen uit elkander. Ik zocht die oorzaak in de eigenaardige vloeistofbeweging, de tourbillons, die in de peripherische vloeistoflagen van het *verwijde* gedeelte (achter de vernauwing dus) door en rondom den invloeienden straal tot stand komen. Ik schreef het geruisch aan primaire vloeistoftrillingen toe, die natuurlijk aan den wand worden medegedeeld en deze dus secundair in trilling brengen. Ik levende een krachtig argument voor deze opvatting, want ik toonde aan, dat het geruisch niet slechts in buizen met elastieke wanden, maar ook in metalen en glazen buizen wordt gehoord. Weber daarentegen leidde het geruisch van wandtrillingen af, die door de wrijving der vochtmoleculen tegen den buiswand in de *vernauwde invloeiopening* zouden worden opgewekt. Weber achtte het onaannemelijk, dat de beweging der vloeistof zelve in de buis een geruisch zou voortbrengen, omdat wij met een onsamendrukbare vloeistof te doen hebben, waarin geruischen en tonen veel moeielijker zouden worden tot stand gebracht, hoewel door de sirène het tegendeel toen reeds bewezen was. Hij besluit dan ook, dat het geruisch door wrijving van de vochtdeeltjes tegen den wand tot stand komende op de plaats der grootste wrijving, dus bij den overgang in het *vernauwde gedeelte* der buis ontstaat, wat in strijd is met de waarneming, daar het geruisch niet slechts op de verwijde plaats de grootste intensiteit heeft, maar ook alleen dáár met den vinger als frémissement gevoeld wordt. Desniettemin vond weber's opvatting aanvankelijk algemeen ingang, vooral, naar ik geloof, omdat zijne voorstelling zich meer aansloot aan de algemeen in de handboeken over auscultatie aangenomen leer van de wrijving der vochtdeeltjes tegen den wand.

Na weber is er, althans ten opzichte van de physische ver-

klaring van geruischen en tonen in het vaatstelsel, niet veel belangrijks meer verschenen. De „veine fluide" in het verwijde gedeelte, die door KIWISCH als de indirecte oorzaak van het geruisch was beschouwd, omdat de buiswand zich naar die contractio venae zou accomodeeren en aldus in trilling geraken zou, werd door CHAUVEAU als de directe oorzaak daarvan opgevat. Niet, zooals ik had aangenomen, door den invloed, die de veine fluide op hare omgeving in het verwijde gedeelte uitoefent, niet door de tourbillons, die rondom de veine fluide ontstaan, zou het geruisch worden voortgebracht. De trillingen der *veine fluide zelve* zouden volgens CHAUVEAU het geruisch veroorzaken en ook door P. NIEMEYER werd de veine fluide onder den naam van „Presstrahl" als oorzaak van het geruisch aangewezen *).

MAREY, die met mijne onderzoekingen niet geheel onbekend gebleven was, deelde in 1863 †) nog eenige proeven en waarnemingen mede over deze geruischen, meer echter over de omstandigheden waaronder zij optreden, dan over hunnen physischen grond. Hij wil tusschen mijne theorie en die van CHAUVEAU niet beslissen, maar moet toch erkennen, dat ook zijne proeven meer in overstemming zijn met mijne opvatting, volgens welke de eigenaardige vloeistofbeweging, de tourbillons, die door den invloed van den invloeienden straal in de peripherische lagen van den verwijding ontstaan, de oorzaak van het geruisch zijn, dan die van CHAUVEAU, volgens welke het de trillingen van den invloeienden straal, van de veine fluide zelve zouden zijn. Volgens MAREY moeten er twee „conditions physiques" vervuld zijn, wil er in het vaatstelsel een geruisch ontstaan: 1⁰. groote stroomsnelheid van het bloed, 2°. lage drukking in de verwijding. Uit zijne beschrijving van de verschijnselen in het vaatstelsel blijkt duidelijk hoe groote waarde hij aan die 2de voorwaarde toekent. CHAUVEAU had het geruisch, dat bij anaemie aan het ostium aorticum bij de systole van het hart wordt gehoord, aan de betrekkelijke vernauwing van dit ostium toegeschreven, dat zich

---

*) De onderzoekingen van CHAUVEAU, NIEMEYER e. a. zijn uitvoerig besproken in NOLET's dissertatie. Kortheidshalve vermeld ik ze hier slechts met een enkel woord, omdat hunne opvatting van de oorzaak van het geruisch door NOLET naar mijne meening voldoende weerlegd is.

†) Physiologie médicale de la circulation du sang, 1863, p. 466.

wel naar de verminderde hoeveelheid bloed zou accomodeeren, terwijl de aortawand, die minder contractiel is, volgens CHAUVEAU, dit niet doen zou. Dit is volgens MAREY niet juist. Het ostium aorticum is, zoo meent MAREY, ook in normalen toestand iets nauwer dan de aorta, maar ten gevolge der hooge slagaderlijke drukking wordt onder gewone omstandigheden de hoeveelheid bloed in de aorta met te geringe snelheid ingepompt om een geruisch te geven. Bij anaemie is in de aorta de drukking afgenomen. „Du moment qu'il est bien démontré que l'état de la tension au-dessous du rétrécissement joue un grand rôle dans la production des bruits de souffle, il n'est plus nécessaire de recourir à des hypothèses; tout va s'expliquer naturellement. De tout ce qui précède, il résulte que les bruits de souffle, que l'anémie, la chlorose et la fièvre produisent au niveau de l'orifice, sont dus à l'abaissement de la tension artérielle et à la vitesse plus grande avec laquelle s'accomplit la systole du ventricule". Mijne proef, dat de zijdelingsche drukking geen invloed heeft, die mij voorkomt wel wat minder hypothetisch te zijn dan MAREY's schets van de hartswerking bij anaemie, werd door MAREY dus maar stilzwijgend op zijde gezet *).

THAMM eindelijk omhelst in 1869 mijne meening, dat wij met vloeistofgeruischen te doen hebben en van nu af aan sluit men zich meer en meer bij deze voorstelling aan (GERHARDT, WEIL e. a.).

THAMM's onderzoek bevestigde verder de door WEBER in 1855 reeds uitgesproken meening, dat ook in gelijk wijde buizen bij genoegzame stroomsnelheid een geruisch wordt gehoord. Ik had dit niet waargenomen, maar 'k had bij mijne proeven slechts over geringe snelheden kunnen beschikken. Ik stelde er daarom

---

*) WEIL laat aan de mededeeling van zijne klinische waarnemingen een kort verslag voorafgaan van de onderzoekingen, die omtrent het ontstaan van tonen en geruischen in het vaatstelsel zijn gedaan. Blijkbaar heeft WEIL dit gedeelte met weinig ingenomenheid bewerkt en zijn hem daardoor hoofdzaken ontgaan, want het is in menig opzicht onvolledig en zelfs onjuist. Van mijne onderzoekingen b. v. geeft WEIL wel op, dat ik de stroomsnelheid als den wezenlijken factor voor het ontstaan van een geruisch in de verwijding aanwees, maar niet dat ik gelijktijdig aantoonde, dat de zijdelingsche drukking geheel onverschillig is en dat geruischen dus zoowel in venae als in arteries kunnen ontstaan, wat KIWISCH ontkend had. -- NOLET's naam wordt alleen vermeld, maar van de hoofdzaken, die uit zijne onderzoekingen werden afgeleid en die, gelijk men zien zal, ook van praktisch belang zijn, geen enkel woord.

veel belang in om de absolute waarde der stroomsnelheid te leeren kennen, waarbij zoowel in vernauwde en verwijde als in gelijk wijde buizen een geruisch wordt gehoord. De behoefte daaraan had ik reeds in 1854 levendig gevoeld, maar de hulpmiddelen ontbraken mij toen om op voldoende schaal numericke bepalingen van de vereischte stroomsnelheid te doen, zooals ik dan ook aan het slot van mijne bijdrage (l. c. blz. 108) opgaf. Daarom stelde ik den heer NOLET voor, toen hij mij over een onderwerp voor zijne dissertatie raadpleegde, om de kwestie aan een vernieuwd onderzoek te onderwerpen. De hulpmiddelen van het Leidsche Physiologische Laboratorium stonden hem daarbij ten dienste. Een drukvat van 5½ m. hoogte en 30 cm. middellijn werd vervaardigd, waarin buizen van allerlei middellijn konden worden bevestigd, zonder dat die bevestiging tot vernauwing of verwijding van het stroombed aanleiding gaf. Mijne resultaten van 1854 werden door NOLET's onderzoek bevestigd, maar bovendien vond NOLET:

1°. Het is juist, zooals WEBER het eerst opmerkte en door THAMM bevestigd werd, dat ook in gelijk wijde buizen door de stroombeweging der vloeistof een geruisch kan ontstaan, maar de stroomsnelheid moet in dit gaval veel grooter zijn dan bij ongelijke wijdte van het stroombed. In gelijk wijde buizen vond NOLÈT de stroomsnelheid, die vereischt wordt om een geruisch voort te brengen gemiddeld 190 cm. per sec., terwijl in ongelijk wijde buizen onder gunstige verhoudingen reeds bij 12 cm. snelheid per sec. een geruisch optreedt.

2⁰. Als men de verwijding vergroot, moet de stroomsnelheid ook grooter worden om een geruisch van dezelfde intensiteit te behouden. Blijft de snelheid in de aanvoerbuis dezelfde, dan vermindert de intensiteit van het geruisch, naarmate het lumen der verwijding grooter wordt en ten slotte verdwijnt het geruisch geheel en al. In een aneurysma kan dus aanvankelijk een geruisch worden gehoord en door vergrooting van den aneurysmatige verwijding kan het later weder verdwijnen.

3⁰. In ongelijk wijde buizen hoort men het geruisch op de verwijde plaatsen niet slechts achter, maar ook vóór de vernauwing. Hier bij iets grootere stroomsnelheid.

4⁰. Men kan niet slechts een sirene, maar ook een resona-

tor, die met water gevuld en onder water geplaatst is, een op afstand hoorbaren toon doen geven, als men een waterstroom, die groote snelheid heeft, op de opening van den resonator richt *).

Die resultaten zijn in de eerste plaats voor ons van gewicht, omdat zij nader bewijzen, dat inderdaad de eigenaardige beweging, die in het verwijde gedeelte door den invloeienden straal in de peripherische vloeistoflagen wordt voortgebracht, de zoog. tourbillons, met het optreden van het geruisch in onafscheidelijk verband staat, want niettegenstaande de invloeistraal, de veine fluide, onveranderd blijft, verdwijnt het geruisch als de omgevende vochtmassa grooter wordt. Daardoor wordt tevens bewezen, dat niet de wrijving alleen der vloeistofdeeltjes voldoende is ter verklaring van het verschijnsel, zooals TALMA meent; want waarom zou dan in gelijk wijde buizen zooveel grootere snelheid vereischt worden dan in ongelijk wijde buizen om een geruisch voort te brengen? Mag niet veeleer worden aangenomen, dat ook in gelijk wijde buizen door het verschil in snelheid der centrale en peripherische lagen gelijksoortige tourbillons in de peripherische lagen der vloeistof tot stand komen als in de verwijdingen, en dat daarvan ook het geruisch, dat in gelijk wijde buizen bij groote stroomsnelheid ontstaat, afhankelijk is?

Hoe dit nu ook zij, voor ons doel is vooral het sub. 1 vermelde resultaat van gewicht. Zij, die meenen, dat er spontaan in de carotis, subclavia, cruralis en andere kleinere arteriën tonen en geruischen kunnen ontstaan, beroepen zich op de zoog. gelijkluidende resultaten, die WEBER, THAMM en NOLET in gelijk wijde buizen verkregen. Maar dit resultaat is op zich zelf niet voldoende. De vraag, waarvan alles afhangt, is:

---

*) NOLET nam nog eene proef om te bewijzen, dat de verslapte toestand van den arteriewand op zich zelven geen invloed op het geruisch heeft. Hij bracht in zijne buizen of *twee* plaatsen denzelfden graad van vernauwing aan. In het eene geval bedroeg de afstand tusschen de beide vernauwingen 2.7 meter, in het andere 11.2 meter. Er was dus op beide plaatsen een groot verschil in zijdelingsche drukking, maar toch trad altijd op beide plaatsen *bij dezelfde stroomsnelheid* het geruisch op. De tweede vernauwing heeft alleen in zooverre invloed, dat zij den weerstand verhoogt — *een anderen invloed heeft zij niet.*

hoe groot moet de stroomsnelheid zijn om in gelijk wijde buizen een geruisch te doen ontstaan? Op die vraag kan alleen door snelheidsbepalingen het antwoord worden gegeven. Ik neem de vrijheid hier zoowel NOLET's opgaven als die van WEBER en THAMM volledig over te nemen, opdat de zaak duidelijk worde uitgedrukt. TALMA heeft bij zijne proeven geene snelheidsbepalingen gedaan.

NOLET vond bij 5 caoutchouc buizen, wier wanden alle tamelijk dik waren (0,3 à 0,4 mm.) en 2 metalen buizen, dat er om een geruisch in een gelijk wijde buis voort te brengen de volgende stroomsnelheid gevorderd wordt. Alle bepalingen zijn in cm. uitgedrukt.

	Middellijn.	Geringste stroomsnelheid per sec. waarbij een geruisch gehoord wordt.
Caoutchouc buis B	1.36	260
〃 〃 C	1.38	125
〃 〃 D	1.40	219
〃 〃 E	1.87	172
〃 〃 F	1.97	143
Metalen buis G	1.—	215
〃 〃 H	1.8	196
	gemiddeld	194

De caoutchouc buizen hadden, zooals ik opgaf, alle vrij dikke wanden. De inwendige oppervlakte was in de eene buis wat ruwer dan de andere. In buis C was zij bijzonder ruw.

WEBER vond in 1855 bij caoutchouc buizen:

	Middellijn.	Geringste stroomsnelheid per sec. waarbij een geruisch gehoord wordt.
Buis α	1.02	74
〃 β	1.35	45
〃 γ	2.15	53
〃 δ	3.05	39
〃 ε	3.97	46
	gemiddeld	51

THAMM schijnt de snelheid niet berekend te hebben. Hij geeft althans geene cijfers daarvan op, maar hij vermeldt twee proeven, waaruit zich berekenen laat bij welke snelheid ± hij een geruisch in gelijk wijde buizen meent te hebben gehoord. Die twee proeven zijn de volgende, in cm. uitgedrukt:

	Vereischte drukhoogte.	Lengte der buis.	Middellijn.	Wand-dikte.	Stroomsnelheid per sec.
a.	100	400	0.6	0.3	
b.	60	400	2.	0.2	

Ik had geen buizen van volkomen dezelfde middellijn, maar vond voor:

Buis J	100	400	0.55	0.08	78
〃 K	60	400	1.60	0.14	87

THAMM bepaalde de vereischte stroomsnelheid om een geruisch in een gelijk wijde buis voort te brengen gemiddeld derhalve op iets meer dan . . . . . . 82.5 cm.

De cijfers loopen dus belangrijk uiteen. NOLET's bepalingen zijn *veel* hooger dan die van WEBER en THAMM. Als WEBER's bepalingen juist zijn, dan kan het kwestieus worden geacht, of er in het arteriëele vaatstelsel een diastolisch vloeistofgeruisch door de stroombeweging ontstaat, maar wanneer NOLET's bepalingen juist zijn, is het niet mogelijk, dat er een spontaan geruisch in de arteriën ontstaat. Voor de stroomsnelheid in de carotis is bij het paard door CHAUVEAU gedurende de diastolische uitzetting der arterie 52 cm. gevonden. Er is geen grond om aan te nemen, dat de stroomsnelheid in de carotis van den mensch meer dan 50 cm. tijdens de diastole der arterie bedraagt: zij is dus volgens NOLET's bepalingen drie- à viermaal te klein om zelfs een uiterst zwak diastolisch vloeistofgeruisch, veel minder dus een toon voort te brengen.

NOLET's bepalingen omtrent de vereischte stroomsnelheid zijn met groote nauwkeurigheid gedaan. Alle snelheidsbepalingen van NOLET zijn door mij en mijn toenmaligen Adsistent, prof. PLACE, gecontroleerd. Alle mogelijke voorzorgen waren genomen om te voorkomen, dat door bevestiging aan het drukvat of door

andere oorzaken vernauwingen of verwijdingen zouden ontstaan. Wij gebruikten met opzet buizen met dikke wanden enz. WEBER daarentegen heeft zijne buizen als hevel gebruikt, want hij had geen drukvat om de vereischte stroomsnelheid voort te brengen. Met groote waarschijnlijkheid mag dus worden aangenomen, dat de buizen van WEBER in haar verloop tijdens de proef niet overal gelijk wijd zijn geweest, want hij bezigde gewone caoutchouc buizen en dergelijke buizen vallen aan het onderste gedeelte samen, als men ze bij eene lengte van eenige meters als hevel gebruikt. THAMM heeft slechts twee proeven met gelijk wijde buizen genomen en aan de bepaling van de snelheid zoo weinig waarde gehecht, dat hij ze niet eens berekend heeft. NOLET's bepalingen verdienen dus het meeste vertrouwen, maar ten overvloede heb ik ze nog eens gecontroleerd met buizen van andere middellijn en kleinere wanddikte. Wederom zijn alle voorzorgen genomen om verwijdingen of vernauwingen te voorkomen, zooals in NOLET's proeven, en de waarnemingen geschiedden wederom in den laten avond, omdat de ondervinding ons reeds vroeger leerde, dat dergelijke bepalingen op den dag in een stad vrij lastig zijn. Ik bepaalde in deze proeven de stroomsnelheid, wanneer het geruisch *niet meer gehoord* werd.

	Middellijn.	Wanddikte.	Stroomsnelheid per sec. waarbij het geruisch verdwijnt.
Buis K	1.60	0.14	180
〃 L	1.57	0.25	190
〃 M	0.95	0.14	178
〃 J	0.55	0.08	212 *)

De buizen, die NOLET gebruikte voor zijne bepalingen, waren de gewone, stijve buizen, die voor waterleidingen worden gebezigd. De laatste buizen waren gewone caoutchouc buizen met veel dunner wanden, die in dit opzicht althans meer met slagaderwanden overeenstemmen. Het resultaat is gelijk men ziet beslissend. Bij de opgegeven snelheid hoort men geen spoor

*) Uit deze proeven blijkt, dat het geruisch in buizen met dunne wanden bij geringere stroomsnelheid gehoord wordt dan in buizen met dikke wanden. Voorts dat caet. paribus in een wijdere buis het geruisch bij geringere stroomsnelheid wordt gehoord dan in een nauwere. Dit is in overeenstemming met WEBER's resultaten van 1855.

van geruisch meer en de snelheid is viermaal grooter dan in de carotis en subclavia onder normale omstandigheden kan worden aangenomen *Autochthoon kan dus de diastolische toon in de carotis en subclavia niet ontstaan* door de stroombeweging van het bloed en a fortiori dus ook niet in de kleinere arteriën. Hoe ontstaat hij dan?

Het is de voortgeleide eerste aorta- en pulmonaaltoon. Ik kwam tot dit resultaat langs theoretischen weg door mijne experimenten. WEIL is tot hetzelfde resultaat gekomen door klinische waarneming *).

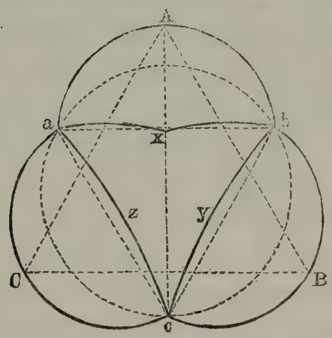
Toen NOLET zijne dissertatie schreef, bracht het ontbreken van een geruisch in het begin van de aorta en art. pulmonalis hem wat in het nauw. De ostia arteriosa zijn enger dan de slagaderen. Dat in weerwil daarvan de eerste toon zuiver is (zonder geruisch) schreef ik in 1854 aan den stand der klapvliezen toe, die, zooals de met de systole synchronische polsslag in de art. coronaria bewijst, niet tegen den aortawand worden aangedrukt. Ik stelde mij voor, dat zoodoende een geleidelijke overgang van het nauwere ostium in de wijdere arterie zou tot stand komen. NOLET sloot zich bij die voorstelling aan. Door DONDERS was inmiddels de duur der actieve periode van het hart op 0.3 sec. bepaald. Stel dat derhalve, zoo schreef NOLET (l. c. blz. 212) „188 gr. bloed in 0.3 sec. door het ostium arteriosum bij de systole heenstroomt, dat is in ronde cijfers 600 c. cm. per sec. Nemen wij nu in aanmerking, dat de omtrek van het ostium aorticum gemiddeld bij den man 6.98 cm., het lumen dus 3.87 □ cm. bedraagt, dan vindt men voor de stroomsnelheid in het ostium aorticum bij de systole van het hart 154 cm. per sec. Dat bij die stroomsnelheid, *indien er althans bij den overgang van het ostium in de arterie werkelijk geen verwijding van het stroombed plaats heeft*, geen geruisch wordt waargenomen, wordt door onze proeven volkomen toegelicht. De binnenwand der arterie is zeker gladder dan van een onzer caoutchouc buizen en toch werd in buis

*) Het frappeerde mij, dat GERHARDT in zijne 2de editie van 1871, terwijl hij het autochthone ontstaan van den toon in de carotis en subclavia aanneemt, toch gedrongen is tot de erkenning: „der Ton verhält sich dem ersten Herzton auffallend ähnlich".

B eerst bij een stroomsnelheid van 260 cm. per sec. een geruisch waargenomen". Zoo schreef NOLET in 1870.

Maar de hypothese, dat er bij den overgang van het ostium arteriosum in den bulbus aortae (en art. pulmonalis) geen verwijding van het stroombed door den stand der klapvliezen zou tot stand komen, werd sedert onhoudbaar. CERADINI's proeven *) toonden in 1872 aan, dat de stand der valv. semilanares van de art. pulmonalis en dus zeer waarschijnlijk ook van de aorta tijdens de systole van het hart niet zoodanig is, dat er een geleidelijke overgang tusschen het nauwere ostium en de wijdere arterie tot stand komt. In de meeste gevallen (7 van de 10) lieten de klapvliezen eene driehoekige ruimte over, overeenkomende met den gelijkzijdigen driehoek, waarvan de vereenigingspunten der sinus Valsalvae de hoekpunten zijn. Bij de drie andere proeven had de opening den vorm van een driestralige ster, waarbij dan de uiteinden der stralen in de hoekpunten van den genoemden driehoek waren gelegen. De stand der klapvliezen heft derhalve de bestaande ongelijkheid der lumina niet op, maar vergroot ze veeleer, zooals de hier nevensstaande fig. 2 van CERADINI aantoont.

Fig. 2.



Die lumina van de ostia en van de hieraan ontspringende slagaderen, waren echter alleen aan de uit het lijk genomen organen gemeten. Gedurende het leven wordt op die ostia en op den arteriewand door het bloed een drukking uitgeoefend, die voor de aorta op 225 à 250 mm. kwik en voor de art. pulmonalis op 35 à 40 mm. geschat wordt. Ik stelde er prijs op de lumina bij de gewone bloedsdrukking te meten en spoot dus, na de valvulae semilunares in beide arteries verstoord te hebben, beide met gips onder de gewone bloedsdrukking op en bepaalde de maten aan de aldus

*) Der Mechanismus der halbmondförmigen Herzklappen von J. CERADINI, 1872.

verkregen gipsafgietsels. Ziehier de resultaten, die ik bij 6 harten van den mensch en bij 2 harten van het varken op deze wijze verkreeg in cm.

Mensch.

No. 1. (van een phtisicus).	Omtrek.	Middellijn.	Lumen.	Verhouding der lumina.
Ostium aorticum	7.0	2.23	3.90	1.
Midden op de sinus Valsalvae	9.2	2.93	6.73	1.72
Onmidd. boven de sinus 〃	8.4	2.67	5.61	1.44
No. 2 (van een phtisicus).				
Ostium aorticum	9.3	2.96	6.88	1.
Midden op de sinus Valsalvae	12.5	3.98	12.43	1.80
Onmidd. boven de sinus 〃	10.8	3.44	9.28	1.34
3 cm. in de as hooger	11.4	3.66	10.34	1.50
No. 3 (van een 70jarige vrouw).				
Ostium aorticum	7.4	2.36	4.36	1.
Midden op de sinus Valsalvae	9.3	2.96	6.89	1.58
Onmidd. boven de sinus 〃	7.8	2.48	4.84	1.11
3 cm. in de as hooger	9.7	3.09	7.49	1.72
Ostium art. pulmonalis	8.5	2.70	5.75	1.
Midden op de sinus Valsalvae	10.	3.18	7.96	1.38
Onmidd. boven de sinus 〃	9.2	2.93	6.73	1.17
N°. 4 (van een 59jarigen man).				
Ostium aorticum	9.5	3.02	7.18	1.
Midden op de sinus Valsalvae	14.5	4.62	16.75	2.33
Onmidd. boven de sinus 〃	12.4	3.95	12.25	1 70
3 cm. in de as hooger	13.9	4.42	15.35	2.14
Ostium art pulmonalis	9.4	2.99	7.03	1.
Midden op de sinus Valsalvae	12.	3.82	11.50	1.63
Onmidd. boven de sinus 〃	10.3	3.28	8.44	1.20
N°. 5 (van een 16jarigen jongen).				
Ostium aorticum	7.2	2.29	4.12	1.
Midden op de sinus Valsalvae	9.2	2.93	6.73	1.63
Onmidd. boven de sinus 〃	8.6	2.74	5.88	1.43
4 cm. in de as hooger	9.7	3.09	7.48	1.81

N°. 6 (van een 35jarige vrouw).	Omtrek.	Middellijn.	Lumen.	Verhouding der lumina.
Ostium aorticum	7.9	2.51	4.97	1.
Midden op de sinus Valsalvae	10.5	3.34	8.78	1.77
Onmidd. boven de sinus 〃	10.	3.18	7.96	1.60
3 cm. in de as hooger	11.	3.50	9.63	1.94 *)

Varken.

N°. 1.				
Ostium aorticum	7.6	2.41	4.59	1.
Midden op de sinus Valsalvae	11.1	3.53	9.80	2.13
Onmidd. boven de sinus 〃	8.6	2.74	5.88	1.28
3 cm. in de as hooger	9.7	3.09	7.48	1.63
Ostium art. pulmonalis	8.8	2.80	6.16	1.
Midden op de sinus Valsalvae	10.	3.18	7.96	1.29
Onmidd. boven de sinus 〃	8.4	2.67	5.61	0.91
N°. 2.				
Ostium aorticum	9.3	2.96	6.88	1.
Midden op de sinus Valsalvae	12.3	3.92	12.05	1.75
Onmidd. boven de sinus 〃	10.2	3.25	8.28	1.20
Ostium art. pulmonalis	9.8	3.12	7.65	1.
Midden op de sinus Valsalvae	10.1	3.21	8.12	1.06
Onmidd. boven de sinus 〃	8.9	2.25	6.30	0.82

Gemiddeld vond ik dus bij den mensch de verhouding der lumina van het ostium aorticum en de aorta midden op de sinus Valsalvae als 1 : 1.80, voor die van het ostium en den bulbus aortae onmiddellijk boven de sinus Valsalvae als 1 : 1.43. Bij het varken vond ik dezelfde verhoudingen gemiddeld als 1 : 1.94 en 1 : 1.24.

Gemiddeld vond ik bij den mensch de verhouding der lumina van het ostium arteriosum der art. pulmonalis en der arterie zelve midden op de sinus Valsalvae als 1 : 1.50, voor die van het ostium en de art. pulmonalis onmiddellijk boven

*) Ten opzichte van al de lijders, waarvan deze harten afkomstig waren, werd mij medegedeeld, dat de harttonen gedurende het leven normaal waren geweest.

de sinus Valsalvae als 1 : 1.18. Bij het varken vond ik dezelfde verhoudingen gemiddeld als 1 : 1.17 en 1 : 0.86.

Behalve door het grooter aantal waarnemingen hebben de opgegeven maten van het ostium aorticum en van de aorta grooter waarde, dan die van de art. pulmonalis. Bij de aorta werden de gipsafgietsels gemaakt onder een drukking van 225 à 250 mm. kwik, bij die van de art. pulmonalis onder een drukking van 30 à 35 mm. kwik. Kleine verschillen in de drukking, die bij het opspuiten met gips niet vermeden kunnen worden, oefenen bij de hooge drukking, waaronder de aorta wordt opgespoten geen, althans geen belangrijken invloed uit; bij de lage drukking daarentegen, waarbij de art. pulmonalis wordt gevuld, is dit wel het geval. Want de elasticiteitscoëfficiënt van den arteriewand stijgt belangrijk bij toenemende rekking, zooals

Fig. 3.

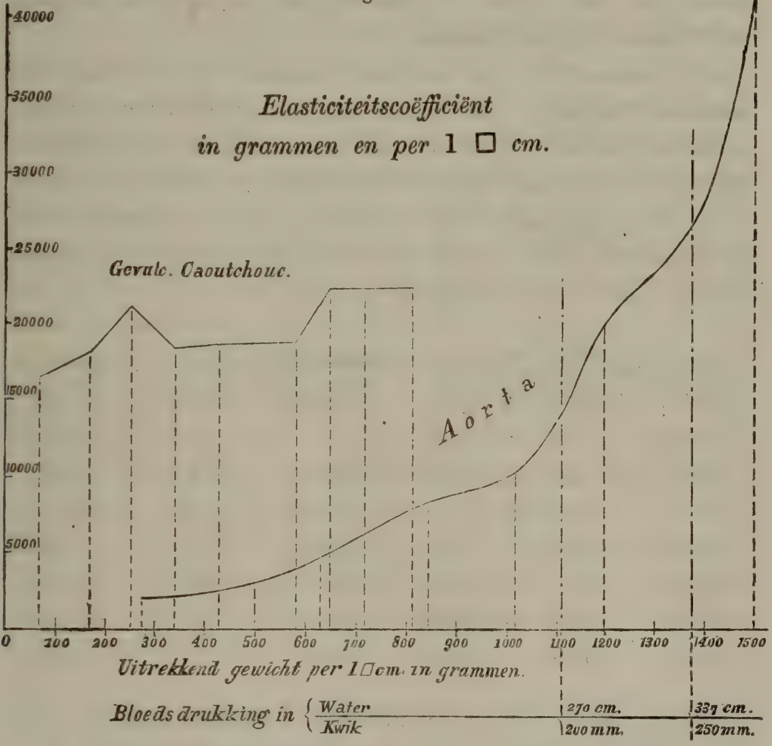


fig. 3 aantoont. Men ziet uit deze schets van den elasticiteits-

coëfficiënt van den menschelijken aortawand bij verschillende drukking, dat hij aanvankelijk weinig, later en reeds bij eene bezwaring van zooveel gewicht als met eene drukking van 225 à 250 mm. kwik overeenkomt snel toeneemt, m. a. w. dat de uitrekking van den arteriewand bij geringe drukking snel, bij hooge drukking slechts langzaam stijgt.

Van het ostium aorticum zelf kan ik zulk een graphische voorstelling van den elasticiteitscoëfficiënt bij toenemende belasting, resp. stijgende bloedsdrukking niet geven. Wel kan men natuurlijk de uitrekking bepalen, maar men vermag daaruit den elasticiteitscoëfficiënt niet te berekenen, omdat de vezelachtige ring, die het ostium daarstelt, in zijne dwarse doorsnede onregelmatig van vorm is en zich daaruit de eenheid van doorsnede niet afleiden laat. Dat echter de rekbaarheid van den arteriewand in den aanvang veel grooter, de elasticiteitscoëfficiënt dus veel kleiner is dan die van het ostium, laat zich duidelijk in het licht stellen.

Ik praepareerde voor dit doel de aorta van het varken tot aan haar oorsprong. De arterie werd nu in de lengte-richting opengeknipt en de valvulae semilunares weggenomen. Van den arteriewand met het ostium en van den arteriewand boven de sinus Valsalvae werden twee reepjes van 1.5 cm. breedte afgeknipt en van beide reepjes de lengte bij toenemende belasting bepaald. Zoo werd gevonden:

Belasting in grm.	Overeenkomende met eene bloedsdrukking in mm. kwik.	Lengte ostium in cm.	Relatieve verlenging per 100 grm.	Lengte aorta in cm.	Relatieve verlenging per 100 grm.
0	0	4.1		4.3	
100	32	4.4	0.070	5.1	0.190
300	106	5.1	0.070	5.9	0.080
800	180	5.25	0.006	7.4	0.050
1300	271	5.35	0.004	8.0	0.016
1800	357	5.40	0.002	8.4	0.010
2300	446	5.50	0.003	8.6	0.004

Hieruit blijkt, dat de aortawand bij geringe belasting veel meer wordt uitgerekt dan het ostium, maar dat bij hoogere belasting ook voor den aortawand de uitrekking geringer wordt

en meer en meer tot die van het ostium nadert; m. a. w. dat de elasticiteitscoëfficiënt van den aortawand bij lage drukking veel geringer is dan die van het ostium, maar bij hooge drukking stijgt en dien van het ostium meer en meer nabij komt. Hieruit volgt dus:

1⁰. Door eene daling van de bloedsdrukking beneden de normale verhouding neemt het lumen van den bulbus aortae veel meer af. dan dat van het ostium aorticum. Stel dat de bloedsdrukking in de aorta van 271 mm. kwik tot 106 mm. daalt, dan neemt de omtrek van den bulbus aortae af in reden van 1 : 0.74, de omtrek van het ostium in reden van 1 : 0.95. De lumina verminderen in reden van het quadraat hiervan: het lumen van den bulbus aortae vermindert dus onder deze omstandigheden tot 0.55 van de oorspronkelijke wijdte, het lumen van het ostium daarentegen slechts tot 0.90 van de oorspronkelijke wijdte *).

2⁰. Bij eene stijging van de bloedsdrukking boven de normale verhouding neemt het lumen zoowel van den bulbus aortae als van het ostium aorticum slechts weinig toe en de verhouding der lumina blijft meer constant. Stel dat de bloedsdrukking van 180 mm. kwik tot 357 mm. stijgt, dan neemt de omtrek van den bulbus aortae toe in reden van 1 : 1.13, de omtrek van het ostium in reden van 1 : 1.03 en de lumina als de quadraten hiervan, dus voor de aorta in reden van 1 : 1.27, voor het ostium in reden van 1 : 1.06 toe.

De tonus van den vaatwand zal natuurlijk gedurende het leven op den elasticiteitscoëfficient invloed uitoefenen en hem wijzigen. In de arteriën van middelbare grootte, waarin de spierrok relatief het meest ontwikkeld is, kan die invloed op den elasticiteitscoëfficient van den arteriewand aanzienlijk zijn, maar in de groote arteriëele stammen treedt die spierrok tegenover het elastieke weefsel op den achtergrond. Voor den aanvang der aorta mag ik dus dan aannemen, dat de invloed van

---

*) In werkelijkheid moet natuurlijk de rekbaarheid van het ostium zelf bij geringe drukking nog veel geringer zijn: immers zijn de door ons medegedeelde cijfers verkregen door belasting van een reepje van 1.5 cm. breedte, tot welke breedte het ostium zelf slechts voor een klein gedeelte bijdroeg.

den tonus der spieren gedurende het leven de elasticiteitscoëfficient niet belangrijk wijzigt.

Ook indien wij den stand der klapvliezen aan de ostia arteriosa tijdens de systole buiten rekening laten is er dus zonder twijfel in den aanvang der aorta een verwijding in het stroombed aanwezig en bij de aanzienlijke stroomsnelheid in het ostium moet er dus een geruisch gehoord worden. Waarom hooren wij het niet? Wij hooren het inderdaad: het is de eerste, diastolische aorta- (en pulmonaal)toon.

Tot die overtuiging ben ik gebracht in de eerste plaats door het onderzoek der geruischen in caoutchouc buizen met dunne, rekbare wanden en in de tweede plaats door proeven met de aorta zelve.

In NOLET's proeven bezigde hij caoutchouc buizen, zooals zij voor waterleidingen gebruikt worden, met vrij dikke en stevige wanden: 1°. omdat hij zeker wilde zijn, dat er geen verwijdingen of vernauwingen in het stroombed door de bevestiging aan het drukvat of door het samenvallen bij haar gebruik als hevel zouden optreden. Bij rekbare buizen met dunne wanden is dit natuurlijk altijd het geval, als men ten minste bij groote snelheden wil experimenteeren, waarbij het niveauverschil aanzienlijk zijn moet; 2°. omdat de prijs van dergelijke buizen tamelijk hoog is en de leverancier ons deze buizen in bruikleen gaf op conditie, dat wij de lengte onveranderd lieten. Wij waren daardoor niet in de gelegenheid bij zoo groote stroomsnelheid de verschijnselen na te gaan, als wij bij geringere lengte der buizen hadden kunnen tot stand brengen. Toen ik nu over buizen met dunnere, meer rekbare wanden van allerlei lengte en middellijn beschikken kon, beproefde ik nog eens of het niet mogelijk was om bij vernauwing van het stroombed zoo groote stroomsnelheid voort te brengen, dat er een werkelijke toon gehoord werd. Het was mijn aandacht ook vroeger niet ontgaan, dat in buizen met dunne wanden het geruisch bij groote stroomsnelheid meer tot een toon nadert, dan in buizen met stijve wanden of metalen buizen. Ik bracht nu in een buis van 395 cm. lengte, 1.57 cm. middellijn en 0.25 cm. wanddikte in het midden eene vernauwing aan van 0.9 cm. middellijn, dus van 0.635 □

cm. lumen aan. Zoo werd bij een stroomsnelheid van 272 cm. per sec. in de buis, bij een stroomsnelheid van 826 cm. in het vernauwstuk, door alle omstanders duidelijk op afstand van de buis een werkelijk muzikale, lage toon gehoord.

Toen ik nu de aorta zelve onderzocht vond ik bevestigd, dat de wand op het timbre van het geruisch invloed heeft. Als men de aorta door een met de wijdte van het ostium overeenkomend aanzetstuk aan een drukvat bevestigd — zóó natuurlijk, dat er door dat aanzetstuk zelf bij zijne bevestiging aan het drukvat geen geruisch ontstaat — dan neemt men bij ± 50 cm. stroomsnelheid (in het ostium) een geruisch waar, dat meer en meer in karakter tot den diastolischen aortatoon nadert, naarmate de stroomsnelheid stijgt.

Ik liet een mal vervaardigen van het arteriëele stroombed in den aanvang der aorta naar de afmetingen van het ostium aorticum en de aorta van het varken en trachtte naar dien mal een kunstmatige aorta van caoutchouc van verschillende wanddikte en elasticiteitscoëfficient te doen vervaardigen, ten einde den invloed van den wand op het timbre van het geluid scherp te kunnen bepalen, maar de belofte van den fabrikant dat ik na toezending van den mal binnen enkele weken de verlangde voorwerpen zou ontvangen, is na vele maanden nog steeds onvervuld gebleven. Ik moest mij daarom voorloopig behelpen met een naar dien mal vervaardigden blikken en lederen aorta en, als ik mag aannemen, dat de lumina met de opgegeven maten overeenkomen, dan bleek hieruit overtuigend, dat bij dezelfde stroomsnelheid het geluid in de lederen buis meer het timbre van den diastolischen arterietoon bezit, dan in de blikken buis, waarin het altijd meer het karakter van een geruisch heeft.

Als wij aannemen, dat er bij de systole in 0.3 sec. 188 gr. bloed in de aorta worden gedreven, dan bedraagt de stroomsnelheid in het ostium aorticum, dat gemiddeld door ons bij den mensch (in de medegedeelde proeven) gelijk aan 5.20 □ cm. werd gevonden, 120 cm. per sec. Maar de stroomsnelheid is in werkelijkheid in het ostium veel grooter, omdat de grootste hoeveelheid van het in den ventrikel bevatte bloed bij de systole van het hart in veel korter tijd dan

0.3 sec. in de slagader wordt overgebracht. Wij zijn zeker dichter bij de waarheid als wij voor den tijd, waarin de grootste hoeveelheid bloed uit de kamer in de aorta wordt ingepompt, slechts 0.1 sec. aannemen. Zoo verkrijgt men voor de stroomsnelheid in het ostium art. 360 cm. per sec. en dit cijfer wordt nog hooger als men den door CERADINI geschetsten stand der klapvliezen aanneemt. Onder deze omstandigheden kan het geen bevreemding wekken, niet slechts dat er bij den overgang van het bloed in de slagader tijdens de systole van het hart een geruisch ontstaat, maar ook dat dit geruisch in timbre tot een toon nadert.

Zonder WEIL's conclusie omtrent den eersten toon der carotis en subclavia nog te kennen meende ik dus uit mijne proeven te mogen besluiten, dat de eerste toon in die arteriën de voortgeleide aorta- en pulmonaaltoon moet zijn en de door WEIL, onafhankelijk van eenige theoretische beschouwing, uit de klinische waarneming afgeleide gevolgtrekking is hiermede in overeenstemming *).

Voor de normale en abnormale geruischen in het vaatstelsel ligt de toepassing voor de hand. Uit mijne proeven volgt:

1°. Er ontstaan in de arteriën (en ook in de venae) in normalen toestand geen geruischen, tenzij er een vernauwing (of verwijding) in het stroombed aanwezig is. De stroomsnelheid van het bloed in het vaatstelsel is daartoe te gering. De spontane arterieële geruischen, die normaal voorkomen, zijn dus, wat hun oorsprong betreft, geheel gelijk aan die, welke door drukking, door vernauwing dus, kunstmatig worden voortgebracht. Zij ontstaan door physiologische vernauwing (resp. verwijding) van het stroombed. Vroeger toonde ik reeds aan, dat de aanhechting van de jugularis aan de eerste rib in verband met de zuigkracht van den thorax tot eene verwijding en vernauwing aanleiding geeft, waardoor het nonnengeruisch ont-

*) Nu verklaart het zich, waarom ik aan de blootgelegde carotis van de koe vroeger geen eersten toon kon hooren. Het zwakke geluid, dat ik waarnam, als het blootgelegde vat niet vast aan den obturator van het stethoskoop bevestigd was, was inderdaad van den uitslag der los gepraepareerde carotis afhankelijk, maar die uitslag heeft niets gemeen met den diastolischen arterietoon, die in de carotis gehoord wordt.

staat. Ook het normale axillairgeruisch is een vernauwingsgeruisch, dat door de drukking van de eerste rib op de subclavia ontstaat, zooals FRIEDREICH opmerkte. Voor het hersengeruisch zou wellicht de bevestiging van de carotis interna in den canalis caroticus de physiologische vernauwing kunnen zijn. Geringe tonus der vaten en lage drukking in het vaatstelsel moeten voor het optreden van het geruisch gunstig zijn, omdat door beide de diastolische uitzetting der arterie *relatief* grooter wordt en dus caet. paribus eerder tot plaatselijke vernauwing van het stroombed door de drukking der begrenzende deelen gelegenheid zal geven.

2⁰. De abnormale spontane geruischen zijn ook van vernauwing afhankelijk. Het is zeer onwaarschijnlijk, dat door verhoogde hartswerking of door verminderden weêrstand of zelfs door beide vereenigd een zoo groote stroomsnelheid kan ontstaan in het vaatstelsel, dat daardoor zonder vernauwing, als in een gelijk wijde buis dus, een geruisch wordt voortgebracht. Ook de abnormale geruischen houdt ik dus voor vernauwings- (resp. verwijdings-) geruischen. Waar een dergelijke verwijding of vernauwing op organische verandering van den vaatwand berust en na den dood kan worden geconstateerd, wordt dit zonder tegenspraak aangenomen, maar ook zonder zulk eene verandering kan hetzelfde effect bereikt worden door de omilggende organen. Van het axillairgeruisch werd het reeds opgemerkt, dat de verbinding der subclavia met den pleurazak de reden verklaart, waarom dit geruisch bij ziekten van den boventop der longen menigvuldig voorkomt: de subclavia wordt daardoor naar beneden getrokken en zoodoende sterker tegen de eerste rib aangedrukt. Verminderde tonus van den vaatwand en lage drukking, in het algemeen een groot verschil tusschen het diastolisch spanningsmaximum en systolisch spanningsminimum zal de gelegenheid tot vernauwing door de omliggende deelen gunstiger maken en de klinische waarneming leert, dat het juist zulke omstandigheden zijn, waarbij abnormale spontane geruischen worden gehoord *). Evenzoo verklaart

*) De mogelijkheid bestaat, dunkt mij, dat de verwijding van het stroombed bij het afgeven van een tak onder scherpen hoek reeds voldoende is om onder zulke omstandigheden een geruisch te doen ontstaan.

het zich, dat bij sterk uitgedrukt dicrotisme van den pols onder gunstige omstandigheden een dubbel geruisch wordt gehoord, waarvan het eerste met de primaire verheffing der sphygmografische curve, het tweede met de dicrotische verheffing isochroon is. Tijdens de dicrotische verheffing vermeerdert niet slechts de stroomsnelheid van het bloed weder, maar diastoliseert als het ware de arteriewand ten tweede male en ook door de tweede uitzetting komt vernauwing tot stand. Bij drukking wordt zelfs normaal door WOLFF zulk een dubbel geruisch gehoord.

3⁰. Het geruisch bij stenose van het ostium arteriosum is insgelijks een vernauwingsgeruisch. In normalen toestand is de verhouding der lumina (van het ostium en van de aorta) zoodanig, dat de stroomsnelheid, waarmede het bloed bij de systole van het hart door het ostium in den wijderen bulbus aortae instroomt, voldoende is om door en rondom de veine fluide in de verwijding een zoodanige beweging der vloeistof (tourbillons) in het leven te roepen, dat het geruisch bij een normalen arteriewand het timbre van den diastolischen aorta- (en pulmonaal-) toon aanneemt. Bij stenose van het ostium wordt die verhouding verbroken en wel op tweederlei wijze: *a.* de verhouding der lumina verandert, *b.* de stroomsnelheid.

a. De *veranderde verhouding der lumina* kan begunstigend en belemmerend werken. Zonder drukking hoort men in ver van het hart gelegen arteriën geen geluid, gelijk wij zagen. In de cruralis zelfs wordt normaal geen toon gehoord. Drukt men met het stethoskoop wat aan, dan treedt er een geruisch op, waarvan bij allengs sterker wordende drukking de intensiteit aanvankelijk toe-, daarna afneemt. Bij toenemende drukking wordt natuurlijk de vernauwing sterker, maar de stroomsnelheid stijgt daarbij in de vernauwing insgelijks. Moeielijk is het dus om den invloed van den graad van vernauwing op het geruisch in een gelijke wijde buis na te gaan. Men zou empirisch moeten uitmaken, welke drijfkracht (drukhoogte) vereischt wordt om de stroomsnelheid in het vernauwde gedeelte bij toenemende vernauwing gelijk te doen blijven. Daarom ging NOLET den invloed van toenemende *verwijding* bij gelijkblijvende stroomsnelheid in de aanvoerbuis, resp. de vernauwing dus, na. Hij

zag, dat de stroomsnelheid in de aanvoerbuis grooter moet worden bij toenemende verwijding als men dezelfde intensiteit van het geruisch wil behouden. Wanneer de stroomsnelheid onveranderd blijft in de aanvoerbuis, dan verzwakt het geruisch bij toenemende verwijding van het aneurysma en ten slotte verdwijnt het geheel en al. Daaruit volgt, dat er bij elke stroomsnelheid, die zoo groot is, dat zij bij vernauwing of verwijding van het stroombed een geluid voortbrengt, ééne bepaalde verhouding tusschen het lumen der vernauwing en verwijding bestaat, waarbij de intensiteit van het geluid (toon of geruisch) het sterkst is. Blijft dezelfde stroomsnelheid in de aanvoerbuis (de betrekkelijk nauwere buis) bestaan, dan kan beginnende verwijding een geruisch (of zelfs een toon) voortbrengen, toenemende verwijding het weder doen verdwijnen. De verandering van het ostium aorticum (of art. pulmonalis) op zich zelve behoeft dus geen reden te zijn, waarom de toon verloren gaat en in de plaats daarvan een geruisch optreedt. Bij beginnende vernauwing zou de toon zelfs luider kunnen worden. Maar zoodra de vernauwing sterker wordt moet de toon veranderen. Het verschil der lumina van ostium en aorta is, gelijk wij zagen, reeds vrij belangrijk en van af eene verhouding als 1 : 2 zag NOLET bij gelijkblijvende stroomsnelheid in de aanvoerbuis de intensiteit van het geruisch afnemen bij toenemende verwijding. Daar nu de verhouding der lumina, als men den door CERADINI geschetsten stand der klapvliezen tijdens de systole aanneemt, meer dan 1: 2 bedraagt, zoo volgt daaruit, dat bij vernauwing van het ostium arteriosum de voorwaarden voor het ontstaan van geluid in de peripherische lagen der verwijding ongunstiger worden en is het dus zeer verklaarbaar, dat de toon in een geruisch overgaat.

b. De stroomsnelheid. Als de hartsystole onveranderd blijft zal de stroomsnelheid in het ostium grooter worden, naarmate de vernauwing belangrijker wordt. Daardoor zal natuurlijk de nadeelige invloed, die de vernauwing op zich zelve uitoefent, meer of min kunnen gecompenseerd worden en de diastolische aortatoon bij aanvangende vernauwing van het ostium behouden, de vernauwing zelve daardoor verborgen kunnen blijven. Maar als de stroomsnelheid met de toenemende

vernauwing niet evenredig stijgt, dan wordt de verhouding ongunstiger. Het kegeloppervlak der veine fluide, die in de wijdere aorta instroomt, wordt kleiner; de invloed daarvan op de omgevende peripherische vloeistoflagen in de verwijding wordt dus geringer en de levende kracht der veine fluide is niet omgekeerd evenredig hiermede toegenomen. Men ziet de verhoudingen zijn hier tamelijk gecompliceerd. Men zou niet slechts den graad van vernauwing in elk bijzonder geval nauwkeurig moeten kennen, maar ook de stroomsnelheid in het vernauwde ostium. Dat de duur der hartsystole bij stenose van het ortium aorticum toeneemt, wordt algemeen aangenomen en de ronde top van de primaire verheffing der sphygmografische curve onder deze omstandigheden, maar vooral de geringe dicrotische verheffing hiervan is daarvoor een stellig bewijs. Geheel in overeenstemming daarmede is het ook, dat men bij belangrijke stenose van het ostium in plaats van den diastolischen aortatoon een *lang gerekt* geruisch waarneemt en de tweede toon *geheel* ontbreekt (WEIL, l. c. S. 83).

Daarbij kunnen zich ten slotte nog twee omstandigheden voegen, die in denzelfden zin invloed uitoefenen — Als de hartspier gaat lijden, dan wordt hare energie geringer. De ventrikel wordt niet geheel geledigd en de hoeveelheid bloed die bij de systole door het ostium gedreven wordt kleiner: de stroomsnelheid in de eenheid van tijd dus ook hierdoor weder geringer. — Bij stenose van het ostium lijdt in den regel ook de oartawand. Hij wordt dikker en minder rekbaar. Zijn elasticiteitscoëfficient neemt toe en ook deze verandering is, gelijk wij zagen, een begunstigend moment voor den overgang van den toon in een geruisch.

4o. De geruischen, die bij anaemie en koorts aan het ostium aorticum gehoord worden, ontstaan niet door de twee "conditions physiques" van MAREY, niet door de *grootere stroomsnelheid*, waarmede het bloed onder den invloed der lage arteriëele drukking tijdens de hartsystole in den bulbus aortae instroomt en den van die lage bloedsdrukking afhankelijken *verslapten toestand* van den aortawand, maar omgekeerd door de *verminderde snelheid* in verband met eene *verandering in de verhouding der*

lumina van het ostium en den bulbus aortae, die door die lage drukking tot stand komt.

De verminderde drukking in het arteriëele stelsel is *overal* oorzaak van een *relatief* (d. i. in vergelijking met de stroomsnelheid tijdens de diastole) sterkere vermeerdering van de stroomsnelheid tijdens de systole van het hart, maar niet in den aanvang der aorta (en art. pulmonalis). Hier is de stroomsnelheid tijdens de systole bij uitzondering *alleen* afhankelijk van den *tijd*, waarin het bloed door den ventrikel in de slagader wordt gedreven en van de *hoeveelheid* bloed, die bij elke hartsystole in de slagaderen wordt ingepompt. In den aanvang der aorta en art. pulmonalis is het *de hartsystole alleen*, die de stroomsnelheid bepaalt. — Bij lage drukking in de aorta zullen de klapvliezen aan de ostia arteriosa na het intreden der systole vroeger geopend worden dan in normalen toestand, omdat de drukking binnen de kamer nu niet zoo hoog behoeft te stijgen om de valv. semilunares te openen, als wanneer de daarop door het bloed der aorta uitgeoefende drukking hooger is. Daarin is dus reeds een reden gelegen, waarom de stroomsnelheid in dergelijke gevallen in het ostium tijdens de systole geringer dan normaal zijn zal.

Een tweede oorzaak van verminderde stroomsnelheid in het ostium in de eenheid van tijd is het verminderde arbeidsvermogen van het hart, waardoor de tijd, waarin het bloed bij elke systole in de aorta wordt ingepompt, wordt verlengd. Is het *lang gerekte* geruisch, dat bij hooge graden van anaemie in de carotis en subclavia gehoord wordt (WEIL, l. c. S. 85) daarvan niet het rechtstreeksch bewijs?

Is het bovendien waarschijnlijk, dat er bij anaemie na sterk bloedverlies, als de frequentie van den hartslag veel grooter is geworden, bij elken hartslag dezelfde hoeveelheid bloed in de slagaderen zal worden overgebracht als in normalen toestand, zooals MAREY aanneemt? Neen, er is alle grond om aan te nemen, dat er bij anaemie minder bloed bij elke systole in de aorta wordt ingepompt en dat ook daardoor eene geringere snelheid in de eenheid van tijd tijdens de systole in het ostium tot stand komt.

Uit de steile stijgingslijn en de sterke dicrotische ver-

heffing, die de sphygmografische curve onder deze omstandigheden vertoont en waarop MAREY's opvatting voornamelijk steunt, kan geen gevolgtrekking hoegenaamd omtrent de snelheid van de hartsystole en de hoeveelheid bloed, die bij elke systole ontlast wordt, worden afgeleid. Zij zijn alleen het gevolg van de lage bloedsdrukking en van den verminderden tonus van den vaatwand, van het verschil tusschen het diastolisch spanningsmaximum en systolisch spanningsminimum. Meer kan de sphymografische curve ons niet leeren. — Zonder twijfel zal de stijgingslijn des te steiler zijn, naarmate de grootste hoeveelheid bloed bij de hartsystole in korter tijd in de arterie gedreven wordt, *mits alle andere omstandigheden dezelfde blijven*, d. i. mits de bloedsdrukking, de elasticiteitscoëfficient van den vaatwand en de drukking, die daarop door het instrument, waarmede men den pols registreert, wordt uitgeoefend, dezelfde blijven. Aangezien dit echter niet het geval is in het vaatstelsel kan men uit de grootere of geringere steilheid der stijgingslijn geen besluit omtrent de energie der hartsystole afleiden.

Maar behalve de verminderde stroomsnelheid heeft ook het verminderd lumen van den bulbus aortae invloed op het verschijnsel. De elasticiteitscoëfficient van de aorta is bij lage drukking veel geringer dan die van het ostium, zooals wij aantoonden. Terwijl de aortawand onder den invloed van die lage drukking dus veel minder wordt uitgerekt dan onder normale omstandigheden, blijft het ostium aorticum daarbij nagenoeg onveranderd. CHAUVEAU's conclusie, dat het ostium aorticum bij lage drukking in de aorta eene *relatieve* vernauwing daarstelt, omdat de groote arteriën minder contractiel zijn en zich niet accomodeeren naar de verminderde hoeveelheid bloed, terwijl het ostium dit wel doet, is dus juist het omgekeerde van de werkelijke verhouding. Het lumen der aorta wordt bij lage drukking kleiner, het ostium daarentegen blijft ongeveer zijn normaal lumen behouden en de veine fluide, die reeds zwakker is dan normaal, treft dus in de aorta een minder sterke verwijding aan. Onder deze omstandigheden is zij niet meer in staat om den diastolischen arterietoon voort te brengen en in de plaats daarvan treedt een geruisch op.

Wanneer bij koorts een geruisch wordt gehoord zijn de verhoudingen ongeveer dezelfde als bij anaemie: frequente hartslag,

lage drukking, verminderde tonus. Dat hier de stroomsnelheid in het ostium in de eenheid van tijd zou zijn toegenomen kan insgelijks niet bewezen worden. Het omgekeerde evenmin. Maar de klinische waarneming schijnt ook hier de door mij gegeven verklaring te bevestigen. Volgens mijne voorstelling moet ook bij koorts de stroomsnelheid in het ostium in de eenheid van tijd zijn afgenomen en de invloed der veine fluide hierdoor en door de veranderde verhouding der lumina zijn verminderd. En wat vinden wij bij WEIL (l. c., S. 84): "Bei Fiebernden hört man an Carotis und Subclavia in etwas weniger als der Hälfte der Fälle nicht mehr zwei reine Töne, sondern der erste Ton *fehlt entweder vollständig* oder ist durch ein blasendes Geräusch ersetzt. Hoe zou het ontbreken van den toon anders te verklaren zijn?

5°. Het geruisch, dat somtijds bij insufficientie der mitralis aan het ostium aorticum gehoord wordt, moet insgelijks aan de verminderde stroomsnelheid in de eenheid van tijd bij de systole worden toegeschreven. Het staat in dit opzicht op eene lijn met het geruisch bij anaemie. Hier wordt de hoeveelheid bloed, die bij elke systole wordt ingepompt, kleiner, omdat een gedeelte van het bloed der hartekamer naar den linkerboezem ontwijkt.

6°. Bij insufficientie der valv. semil. aortae zijn de verhoudingen over 't algemeen dezelfde als bij anaemie: lage drukking in de slagaderen, geringe tonus van de vaten, steile stijgingslijn der sphygmografische curve (met verlies natuurlijk van de dicrotische verheffing). Maar de snelheid van het bloed in het ostium wordt óf niet gewijzigd of door de hypertrophie van het hart vergroot: en de diastolische aortatoon is dan ook onveranderd, zoolang er geene andere complicatiën voorkomen, hetwelk echter gewoonlijk slechts korten tijd duurt. Dat evenwel de toon zuiver blijft, zoolang er alleen insufficientie bestaat, is een vernieuwd bewijs, dat grooter stroomsnelheid en een slappe arteriewand nog geen geruisch geven.

7°. Bij zuivere *hypertrophie van de linker kamer* blijft de

verhouding der lumina van ostium en aorta ongeveer dezelfde. De hoogere bloedsdrukking, die in het arteriëele stelsel bestaat, vergroot de lumina zoowel van de aorta als van het ostium aorticum slechts weinig, want bij die hoogere drukking hebben nu de aorta en het ostium beide een hoogen elasticiteitscoëfficient. Beide worden door de hoogere bloedsdrukking dus slechts weinig meer dan normaal uitgerekt en indien er al verwijding plaats vindt, *beide* nu gelijkelijk: de verhouding der lumina blijft dus dezelfde. Maar de stroomsnelheid tijdens de hartsystole wordt in het begin der aorta grooter, want de hoeveelheid bloed, die de kamer bevat, neemt toe en de systole van de hypertrophische hartspier wordt energischer.

Mijne theorie eischt dus — bij onveranderde verhouding der lumina en grootere stroomsnelheid — dat de eerste aortatoon in elk geval *zuiver* blijft en als de vermeerdering der stroomsnelheid belangrijk is, *luider* wordt. En wat leert de klinische waarneming? WEIL geeft daarvan (l. c., S. 81) het volgende verslag: „Unter den nicht mit Endocarditis complicirten Erkrankungen der Herzmuskulatur, die ich in grösserer Zahl beobachten konnte, steht die Hypertrophie des linken Ventrikels obenan. Sie waren in drei Fällen eine idiopathische, d. h. ich konnte keines der bekannten ätiologischen Momente nachweisen. In einem dieser Fälle war der Befund am Arteriensystem ein durchaus normaler (in den beiden anderen tönten die Crurales, in einem sogar die Brachiales, hierover later). — Jene Fälle, in denen die Hypertrophie durch Atherom der Arterie bedingt war, waren die beiden Töne in Carotis und Subclavia *rein* und *laut*; einmal war der *erste Ton lauter* und accentuirter als der zweite. Es bleiben noch sieben Fälle übrig, in denen Hypertrophie des linken Ventrikels neben chronischer Nephritis gefunden wurde. In Carotis und Subclavia wurden dabei sets zwei *reine*, *mitunter ungewöhnlich laute* Töne gehört". Kan men meer verlangen?

In het algemeen zijn de verschijnselen met mijne theorie in overeenstemming. Ik mag dus aannemen, dat de beginselen juist zijn.

De tweede toon der arteriën en de tweede harttoon zijn de

zelfde. Dat hij, zooals TALMA wil, van de teruggaande vloeistofbeweging, die na het ophouden van de hartsystole tot stand komt, afhankelijk zijn zou, kan ik ook hier niet aannemen. Wel ontstaat er eene teruggaande beweging van het bloed naar de valvulae semilunares na het ophouden van de systole van het hart, maar, hoewel ik de stroomsnelheid bij die teruggaande beweging niet bepalen kan, mag ik toch wel besluiten, dat zij niet grooter is, dan die van den peripherischen bloedstroom, welke onder den invloed van de systole van het hart tot stand komt: dus is ook die stroomsnelheid te gering om zonder vernauwing (resp. verwijding) van het stroombed een geruisch te geven. — Deze teruggaande stroom ontmoet op zijn weg echter een verwijding, de sinus Valsalvae namelijk. Maar ik geloof niet, dat daardoor onder normale omstandigheden een geruisch of toon ontstaat, omdat de veine fluide, door wier invloed de tourbillons tot stand komen, zich niet ontwikkelen kan, daar zij terstond door de gesloten klapvliezen wordt afgebroken. Blijft het bloed eenigen tijd langs de sinus Valsalvae zich voortbewegen, dan ontstaat er zonder twijfel een geluid, en het geruisch, dat bij insufficientie van de valv. semilunares gehoord wordt, zou ten deele hieraan kunnen worden toegeschreven, indien niet op die wijdere sinus Valsalvae in dit geval eene veel sterkere vernauwing, door het insufficiente klapvlies veroorzaakt, volgde. Daar nu, zooals NOLET aantoonde, ook vóór de vernauwde plaats een geruisch ontstaat, is het geruisch bij insufficientie — in zooverre het althans vóór de vernauwing, dus niet in de hartekamer ontstaat — vooral hiervan afhankelijk.

Maar ook al kwam op deze wijze hier ter plaatse onder normale omstandigheden een of ander geluid tot stand, dan zou het toch door den eigenlijken tweeden toon geheel worden overschaduwd. Die tweede toon is, naar mijne meening, ontwijfelbaar afhankelijk van de trillingen, die door den schok van het terugstroomende bloed tegen de gesloten valv. semilunares worden opgewekt. In elke arterie kan men denzelfden toon voortbrengen als men haar dicht drukt. Het is die toon, welke bij sterke drukking in de brachialis, ja zelfs in de radialis gehoord wordt en die synchronisch met den polsslag optreedt. Die toon ontstaat door den schok van het bloed tegen den gesloten buiswand tijdens de

diastole der arterie. Klapvliezen worden derhalve voor zijn ontstaan niet vereischt: de eenige voorwaarde is, dat de buis gesloten zij. Daar nu echter deze sluiting bij den tweede harttoon door de valv. semilunares tot stand komt, kan men met recht zeggen, dat die toon van trillingen dezer klapvliezen afhankelijk is.

De intensiteit van den schok is evenredig aan de levende kracht der terugstroomende bloedkolom (m. v^2), wier beweging door de volgens CERADINI reeds gesloten of althans nagenoeg gesloten valv. semilunares wordt gestuit. Die levende kracht zal des te grooter zijn, naarmate de drukking in de vaten hooger is, omdat de snelheid der teruggaande beweging in dit geval wordt vergroot en de intensiteit van den schok in reden van het quadraat der snelheid toeneemt. Daarom overweegt de tweede aortatoon gewoonlijk boven den tweeden pulmonaaltoon en wordt deze laatste bij verhoogde drukking in de art. pulmonalis versterkt. Daarom wordt de tweede toon bij lage drukking in het vaatstelsel zwakker. — Maar zij wordt insgelijks verzwakt, als de energie der hartwerking is gedaald, als het bloed met geringere snelheid tijdens de systole van het hart in het arteriëele stelsel wordt ingepompt of de hoeveelheid van het bloed, die bij elke systole ontlast wordt, kleiner is. — Waar beide voorwaarden samenwerken wordt die tweede toon zoozeer verzwakt, dat zij in het geheel niet meer gehoord wordt, zooals dit bij hooge graden van anaemie wordt waargenomen.

De tweede toon wordt niet gehoord bij het begin der diastole, maar op het oogenblik, waarop de positieve golf aan de gesloten valv. semilunares ontstaat, die als dicrotische verheffing over de slagaderen heenloopt.

Maar er blijft nog een bezwaar bestaan. Er is een verschijnsel, dat onverklaard bleef, en dat met de theorie, die ik omtrent de tonen en geruischen in het vaatstelsel in de voorafgaande bladzijden gaf, zelfs in strijd schijnt te zijn. Ik bedoel den diastolischen arterietoon, die onder abnormale omstandigheden in ver van het hart verwijderde arteriën gehoord wordt en zonder twijfel in verreweg de meeste gevallen een autochthone toon is, die gelijktijdig met den pols in die arteriën ontstaat. Hij

komt het menigvuldigst in de cruralis voor, maar ook in den arcus volaris wordt hij somtijds gehoord en in de cruralis wordt zelfs in zeer zeldzame gevallen bovendien een systolische toon, een dubbele toon dus, waargenomen. Is die diastolische toon in ver van het hart verwijderde arteriën geen bewijs, dat men te recht de plotselinge spanning van den arteriewand algemeen als de oorzaak van den diastolischen toon aanneemt? En pleit de systolische toon, die in de cruralis somtijds wordt gehoord, niet voor de juistheid van TRAUBE's hypothese, dat hij aan de *plotselinge ontspanning* van den arteriewand moet worden toegeschreven, waardoor die arteriewand evenals bij de *plotselinge spanning* tijdens de diastole der arterie in toongevende trillingen geraakt?

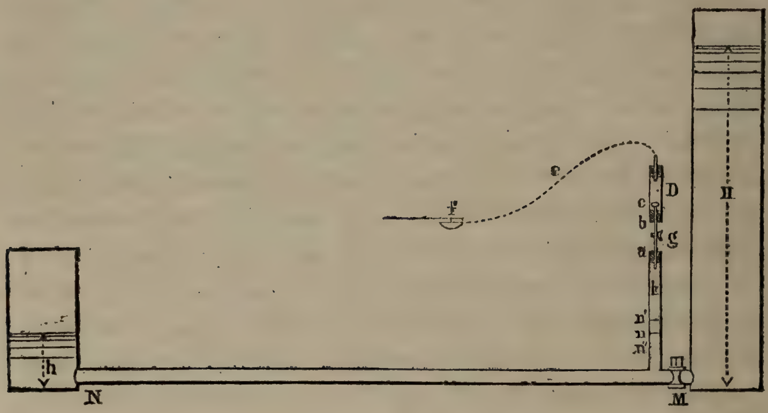
Ik heb mijne theorie over den physischen grond der normale en abnormale tonen en geruischen in het vaatstelsel niet vroeger medegedeeld, omdat ik den toon, die in ver van het hart verwijderde arteriën gehoord wordt, niet kon verklaren. Het scheen mij zelfs aanvankelijk toe, dat hij tegen de in de vorige bladzijden uiteengezette theorie van de tonen en geruischen in het vaatstelsel getuigde. Maar ik meen thans ook van dien toon de verklaring te kunnen geven en zelfs de oorzaak te kunnen aanwijzen, waarom er bij een zeer hoogen graad van insufficientie der valv. semilunaris aortae in de cruralis ook een systolische, een dubbele toon dus gehoord wordt. Het zijn wederom tonen, die door de eigenaardige beweging der vloeistof tot stand komen en waarbij insgelijks de vloeistof *primair*, de wand dus eerst secundair in trilling geraakt. De vloeistofbeweging is hier echter van geheel anderen aard dan die, welke wij in een verwijding waarnemen. Het zijn *staande golven, die in ver van het hart verwijderde slagadertakken waarin normaal geen toon gehoord wordt, onder bepaalde omstandigheden met zoodanige amplitude daarin optreden, dat zij een hoorbaren toon tot stand brengen.*

Toen nu bijna twee jaren geleden de heer MOENS als Adsistent aan het Physiol. Laboratorium te Leiden verbonden werd, stelde ik hem voor een fundamenteel onderzoek omtrent de golfbeweging in het vaatstelsel op touw te zetten. Ik meende, dat hij, die zich vroeger aan de ingenieurswetenschappen had gewijd, met lust en ook met vrucht aan dit onderwerp zou kunnen

arbeiden. Mijne verwachting is niet teleurgesteld geworden. Gedeeltelijk zijn zijne resultaten reeds in zijne dissertatie „Over de voortplantingssnelheid van den pols" medegedeeld, terwijl zijn geheele onderzoek „Over de polscurve" in het 4de Deel der „Onderzoekingen van het Physiol. Laboratorium der Leidsche Hoogeschool", dat binnen kort het licht ziet, wordt opopgenomen.

Ik ried hem aan de verschijnselen aanvankelijk te bestudeeren onder de meest eenvoudige omstandigheden. Wij namen een metalen buis M N en laschten op het verloop daarvan op ééne plaats een elastischen factor in. Aanvankelijk gebruikten wij daarvoor een stukje van een caoutchouc buis, maar om allerlei redenen, die Dr. MOENS opgeven zal, vervingen wij dit al spoedig door een luchtklok *k* (fig. 4), waarin een bepaalde

Fig. 4.

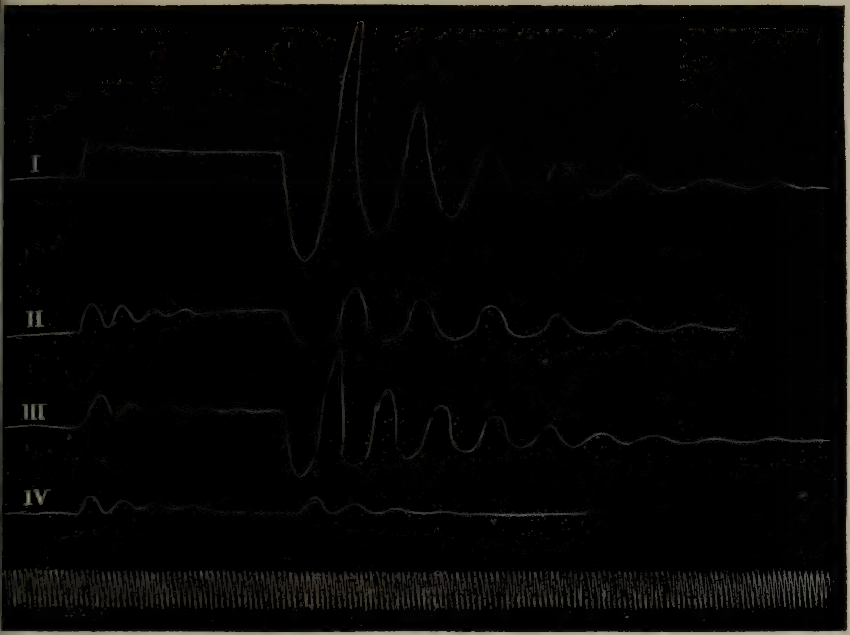


hoeveelheid lucht was besloten en die op geschikte wijze door een elastiek vliesje c was gesloten. Dit elastieke vliesje stond aan de bovenzijde met een afgesloten ruimte D in aanraking, die op hare beurt met den luchttrommel van een cardiograaf verbonden was, zoodat de luchtverdunning in de klok k door daling hefboom en de luchtverdichting door rijzing van den hefboom werd aangegeven.

Toen wij nu zulk een luchtklok, met een bepaalde en steeds gelijke hoeveelheid lucht gevuld, op een metalen buis M N

plaatsten, wier eene uiteinde door de kraan M met een drukvat H en wier andere open uiteinde met een reservoir h in verbinding stond — terwijl het niveau van het water in het drukvat H hooger was dan in het reservoir h, zoodat bij geopende kraan het water van M naar N stroomde — zagen wij, dat er zoowel bij het plotseling openen als bij het plotseling sluiten van de kraan M schommelingen in de vloeistof ontstaan, die tot verdunning en verdichting van de lucht in de klok k aanleiding geven, zoodat de cardiograaf een tracé levert als in fig. 5. De cardiograaf schreef van links naar rechts.

Fig. 5.

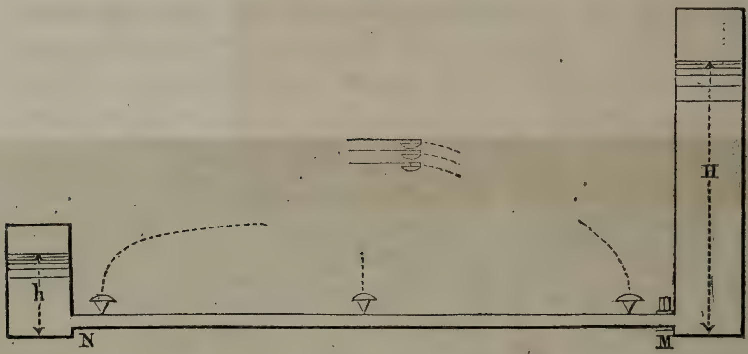


De linksche zijn de *openingsschommelingen,* de rechtsche de *sluitingsschommelingen.* Het bleek terstond, dat de duur van beide schommelingen zeer ongelijk is en dat van beide de duur verandert, wanneer de luchtklok met dezelfde hoeveelheid lucht daarin op het verloop der buis M N verplaatst of de hoeveelheid lucht in de klok veranderd wordt. Al de tracé's in fig. 5 zijn verkregen bij het openen en sluiten der kraan M met een

en dezelfde metalen buis M N en met de beschreven luchtklok (waarin altijd dezelfde hoeveelheid lucht bevat was), maar in tracé I stond die luchtklok niet ver van de invloeiopening M, in tracé II op $^1/_4$ van de lengte der buis, in tracé III op de helft en in tracé IV op het laatste vierde gedeelte der buis.

De analoga dezer openings- en sluitingsschommelingen treden ook in elastieke buizen op. Zooals in fig. 6 is voorgesteld,

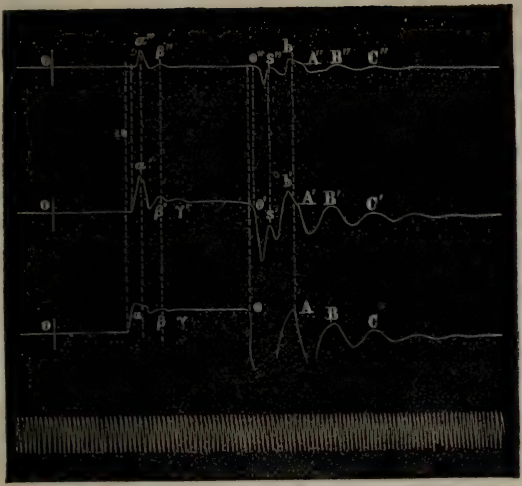
Fig. 6.



werd een elastieke buis M N met haar eene uiteinde door middel van een kraan M aan een drukvat en met haar andere uiteinde N aan een reservoir h verbonden, terwijl de niveauhoogte bij H hooger dan in h werd gehouden. Wanneer nu op zulk een buis b. v. drie luchtkussens worden geplaatst, op wier elastieke plaat een wigvormig statief is bevestigd, zoodat het, als de rug van een mes, dwars op den buiswand drukt en de drie luchtkussens met even zoovele cardiografen verbonden worden, dan neemt men waar, dat ook in een elastieke buis bij het openen en sluiten van de kraan de analoga der straks beschreven openings- en sluitingsschommelingen voorkomen, maar hier onder den vorm van golven optreden. De openingsgolven zijn in fig. 7 met α, β, γ, de sluitingsgolven met A, B en C aangeduid. Beide hebben, op welke plaats in het verloop der buis M N zij ook geregistreerd worden, steeds denzelfden trillingsduur zooals uit de figuur blijkt.

De *sluitingsgolven* zijn *voortschrijdende golven*, die van M naar N verloopen. Het tracé, dat op een dichter bij M ge-

Fig. 7.

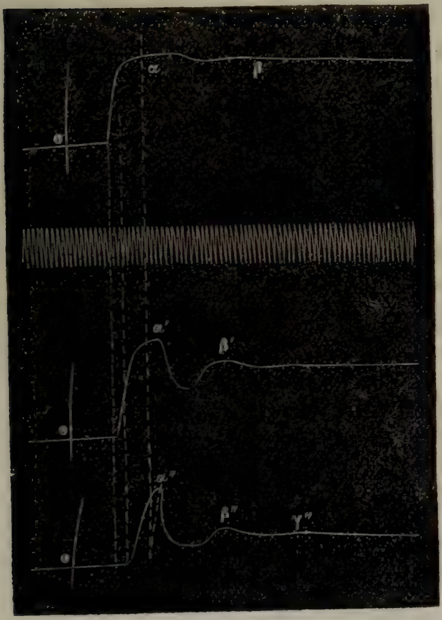


legen punt wordt geregistreerd, vertoont vroeger den sluitingstop, dan het tracé op een verder van M gelegen punt verkregen.

De *openingsgolven* hebben het karakter van *staande golven*. De toppen dezer golven kunnen, waar zij ook op het verloop der buis MN worden geregistreerd, steeds vereenigd worden door eene rechte lijn. Hare amplitude is op het midden der buis het grootst.

Dat zij inderdaad het karakter van staande golven bezitten, blijkt nog duidelijker uit fig. 8, waarin de omstandigheden zoo zijn gekozen, dat de openingsgolven eene groote amplitude hebben. Men ziet, als men den boog dien de hefboom beschrijft in rekening brengt, dat resp. α, α' en α'', β β' en β'' vereenigd kunnen worden door een rechte lijn, die door het midden van elken golftop gaat. De golftoppen zelve zijn echter, zooals uit de figuur blijkt, zeer ongelijk van vorm. Het is onmogelijk om den juisten vorm op te geven, want

Fig. 8.



dan zouden 1°. al de hefboomen der cardiografen denzelfden uitslag moeten geven, maar 2°. ook al de luchtkussens precies gelijk op den buiswand moeten drukken. Dit laatste vooral is onmogelijk te bereiken.

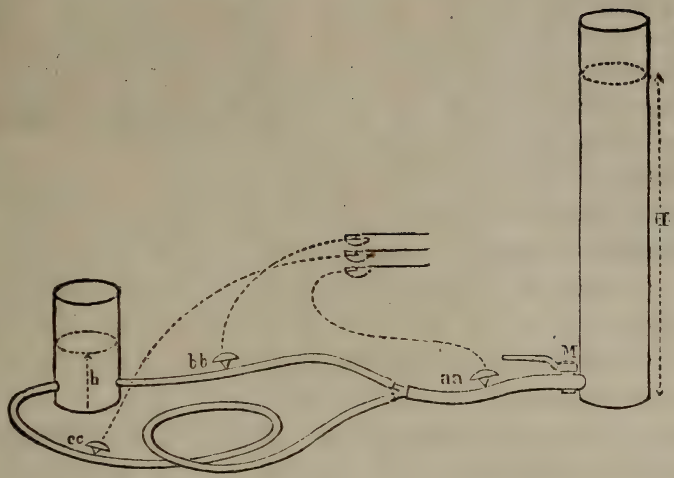
Zoowel van die sluitings- als van die openingsgolven heeft Dr. MOENS, den duur, de amplitude en den vorm bestudeerd. Hij heeft getracht de factoren te leeren kennen, die haar duur en amplitude bepalen en het is hem gelukt om gedeeltelijk langs experimenteelen en gedeeltelijk langs analytischen weg tot de formulen te geraken, waaruit zich de trillingsduur voor de beide golfsoorten berekenen laat. In deze formulen komen als veranderlijke waarden voor: de lengte der buis, de middellijn, de wanddikte, de elasticiteitscoëfficient van den buiswand en het soortelijk gewicht der vloeistof. Ik deel daarvan een enkel woord mede, omdat men anders hetgeen thans volgt en dat voor ons doel alleen van belang is, niet zou kunnen verstaan, maar laat verder die sluitings- en openingsgolven aan den heer MOENS ter behandeling over. Een blik op fig. 7 toont reeds aan, dat in de sluitingsgolven nog vele complicatiën aanwezig zijn.

Voor ons doel was het van belang de verschijnselen in een vertakt stelsel na te gaan. In zulk een stelsel ontstaat bij het sluiten van de kraan M een reeks van sluitingsgolven, wier eigenschappen afhankelijk zijn van de afmetingen en verdere eigenschappen van *alle* takken van het stelsel en deze sluitingsgolven verloopen van M af over het geheele stelsel heen, zooals de heer MOENS nader aantoonen zal. Maar behalve deze voor *het geheele stelsel* gemeenschappelijke sluitingsgolven vertoonen er zich bovendien en geheel onafhankelijk van deze bij het sluiten van de kraan nog andere golven van korteren duur.

In figuur 9 is een wijde buis a a met het drukvat H door middel van een kraan verbonden. Deze buis had eene lengte 100 cm. en een middellijn van 1,6 cm. Zij splitste zich in twee takken b b en c c, die beide met het reservoir h in open verbinding stonden. Beide deze buizen waren van eene en dezelfde buis genomen, hare wanddikte bedroeg 0,14 en hare middellijn 0,95 cm, maar zij waren verschillend van lengte: b b was 110,

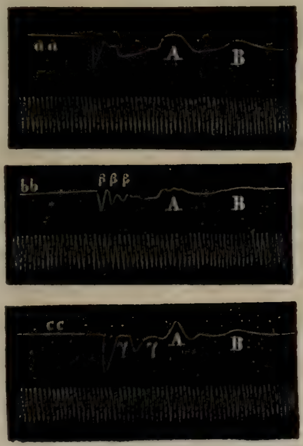
cc 380 cm. lang. Op alle drie de buizen waren luchtkussens

Fig. 9.



geplaatst. De niveauhoogte H was evenals vroeger $>$ h. Als er nu door zulk een vertakt stelsel vloeistof stroomt en de kraan M wordt plotseling gesloten, dan verkrijgt men de tracés, die in fig. 10 worden voorgesteld.

Fig. 10.



In alle drie de buizen worden dezelfde sluitingsgolven A A A, B B B aangetroffen, wier duur en andere eigenschappen van de afmetingen en eigenschappen van alle takken, van het geheele stelsel dus, afhangen. Maar behalve deze voor het geheele stelsel gemeenschappelijke sluitingsgolven vertoonen er zich bovendien in b b en c c kortere golven. In elken tak zijn zij anders en haar duur is afhankelijk van de afmetingen van den tak, waarin zij worden aangetroffen: in den tak b b

is haar trillingsduur 0,2 sec. in den tak c c 0,5 sec. Men kan ze dus *eigen golven van den tak* noemen.

Deze eigen golven, die in eenigen tak van een *buizenstelsel* door het sluiten der invloeikraan M tot stand komen, zijn dezelfde, die verkregen worden als die tak afzonderlijk aan een drukvat H en reservoir h wordt verbonden en de invloeikraan M geopend wordt. Zij hebben denzelfden trillingsduur als de openingsgolven en ook het karakter van *staande golven.* Zij worden dus gelijktijdig in dezelfde phase op den geheelen tak aangetroffen en haar amplitude is in het midden van den tak het grootst. Haar ontstaan kan geen verwondering baren, als men in aanmerking neemt, dat bij de sluiting van de invloeikraan M de hoofdbuis a a bij M wel afgesloten wordt, maar van de beide takken b b en c c door het gemeenschappelijk verband met a a de beide uiteinden geopend blijven.

Slechts onder gunstige omstandigheden treden in een vertakt stelsel deze eigen golven der takken zoo duidelijk te voorschijn, dat men ze registreeren kan en dan nog is dit alleen mogelijk, als de buiswand dun is. Het luchtkussen moet bovendien zeer gevoelig gesteld zijn, zooals van zelf spreekt. Die omstandigheden zijn:

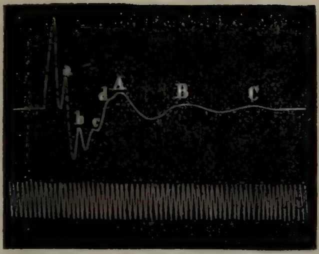
1°. De tak moet aan beide zijden in een reservoir of althans in een stam met groot lumen uitmonden: m. a. w. het stroombed aan beide uiteinden van den tak moet betrekkelijk wijd zijn, zoodat de tak als het ware met twee reservoirs samenhangt.

2°. Er moet een groot verschil bestaan tusschen het spanningsmaximum en het spanningsminimum. Men verkrijgt dit door de kraan snel te openen en onmiddellijk daarna te sluiten.

Op deze wijze, door snelle opening en opvolgende onmiddellijke sluiting werd met dezelfde buis b b de curve verkregen, die in fig. 11 wordt aangetroffen. De eigen golven van den tak treden hier duidelijk niet slechts onmiddellijk na het sluiten te voorschijn, maar komen ook nog voor in de eerste sluitingsgolf.

Fig. 11.

Fig. 12.



Op dezelfde wijze werd het tracé van fig. 12 verkregen. In dit geval was een caoutchouc buis van 170 cm. lengte, 0.95 cm. middellijn en 0.14 cm. wanddikte aan de eene zijde met een buis van 100 cm. en aan de andere zijde met een buis van 50 cm. lengte verbonden; beide buizen hadden een middellijn van 1.57 cm. bij een wanddikte van 0.25 cm. In dit tracé zijn weder A, B, C de op elkander volgende sluitingsgolven van de geheele buis a, b, c, d de eigen golven van het middenstuk. Haar trillingsduur bedroeg 0.25 sec. *).

In de toepassing op de verschijnselen in het vaatstelsel kan ik kort zijn. De medegedeelde proeven omtrent de eigen golven in een vertakt stelsel van caoutchouc buizen toonen aan, dat er in de afzonderlijke takken *eigen golven* voorkomen. Zij ontstaan het gemakkelijkst als de tak aan beide zijden in een betrekkelijk wijd stroombed uitmondt, en hare amplitude neemt caet. paribus toe, als de positieve golf, die door het openen van de kraan M ontstaat, hoog is, m. a. w. als er tusschen het diastolisch spanningsmaximum en systolisch spanningsminimum een relatief groot verschil bestaat.

De laatste voorwaarde is volgens de klinische waarneming steeds vervuld, wanneer er in de cruralis en andere van het hart verwijderde vaten een toon gehoord wordt.

De eerste voorwaarde is door den oorsprong en vertakking der cruralis gegeven. Zij ontspringt uit de iliaca communis gelijktijdig met den dikken stam van de hypogastrica en geeft onder den band van Poupart, behalve een groot aantal kleinere takken, de profunda femoris af. Aan beide zijden heeft de cruralis dus een wijd stroombed.

*) De trillingsduur van deze eigen golven der takken schijnt door den invloed van naburige takken of stammen te kunnen worden vergroot, zoodat niet altijd *volkomen* juist hetzelfde cijfer voor den duur der eigen golven in den tak van het stelsel wordt gevonden, als voor de openingsgolven van dien tak als enkele buis is bepaald.

In den arcus volaris is de verhouding der vertakkingen zeer onstandvastig, maar dikwerf is voor een gedeelte van den arcus dezelfde voorwaarde (een wijd stroombed aan beide zijden) insgelijks vervuld, zooals de injectie-praeparaten bewijzen. Dat de toon minder menigvuldig in den arcus volaris gehoord wordt, kan in de eerste plaats dus van de anatomische verhoudingen afhangen, maar ook al mocht dit niet zoo zijn, dan zou het nog zeer verklaarbaar zijn, dat de toon menigvuldiger in de cruralis dan in den arcus volaris gehoord wordt, omdat de polsgolf steeds kleiner wordt, naarmate men zich verder van het hart verwijdert en dus ook het verschil tusschen het diastolisch spanningsmaximum en systolisch spanningsminimum. — Bij de brachialis is althans de gewone vertakking niet zoo in het oogvallend gunstig voor het ontstaan van deze eigen golven. Veel zeldzamer wordt het verschijnsel dan ook daarin waargenomen. — De cruralis verkeert in elk geval in de gunstigste omstandigheden. Zij is betrekkelijk dicht bij het hart en dus bij de geschetste anatomische verhoudingen van haar stroombed voor het optreden van eigen golven bijzonder gunstig gelegen.

Daardoor is het ook verklaarbaar, dat de dubbele toon onder zulke omstandigheden *alleen in de cruralis* wordt gehoord. Zooals de positieve golf bij de systole van het hart eigen golven in de cruralis voortbrengt, die tot den diastolischen toon aanleiding geven, evenzoo kunnen door de negatieve golf, die bij insufficientie van de valv. semil. van het hart uitgaat, eigen golven ontstaan en den systolischen toon in de cruralis voortbrengen. Daarvoor is het noodig, zooals de klinische waarneming leert, dat de insufficientie belangrijk is. Hoe hooger de graad van insufficientie is, des te grooter is de amplitude der negatieve golf. Maar de duur der hartsystole blijft toch altijd korter dan die der hartdiastole en er gaat toch altijd bloed uit den boezem in de kamer over. De negatieve golf tijdens de diastole is dus nooit zoo krachtig als de positieve tijdens de systole. Daarom is het verklaarbaar, dat wel de diastolische arterietoon somtijds nog in de brachialis en in den arcus volaris gehoord wordt, maar de systolische arterietoon alleen in de dichter bij het hart gelegen cruralis optreedt.

In normalen toestand worden door de positieve polsgolf in

de cruralis natuurlijk insgelijks deze eigen golven voortgebracht, maar wegens het betrekkelijk gering verschil tusschen het diastolisch spanningsmaximum en systolisch spanningsminimum van te geringe amplitude om een toon te geven. Bij een grooter spanningsverschil groeit de amplitude dezer ook normaal aanwezige trillingen aan, zoodat een toon wordt gehoord.

Nog een punt behoeft toelichting. Aangenomen dat de gegeven voorstelling juist is en dat er eigen golven in de cruralis enz. ontstaan, is dan de trillingsduur dier eigen golven groot genoeg om een toon voort te brengen? Empirisch hebben wij de trillingsduur voor buizen van verschillende lengte bepaald en gevonden, dat bij gelijken elasticiteitscoëfficient, wanddikte en middellijn de trillingsduur evenredig aan de lengte is. Dr. MOENS is, zooals ik opgaf, gedeeltelijk langs experimenteelen, gedeeltelijk langs analytischen weg tot de formulen van den trillingsduur der sluitings- en openingsgolven gekomen en hare juistheid is door hem proefondervindelijk gestaafd. Experimenteel kunnen wij natuurlijk de kwestie niet uitmaken, omdat de trillingsduur van de eigen golven van slagaderlijke takken als de cruralis veel te klein is om te kunnen worden geregistreerd, maar als ik MOENS' formule op de cruralis toepas en aanneem, dat de lengte van de cruralis 12 cm. bedraagt, de verhouding van diameter en wanddikte met KRAUSE op 12 stel en voor den elasticiteitscoëfficient van de cruralis die van de aorta bij 170 mm. kwikdrukking aanneem, dan zou de trillingsduur van de eigen golven in de cruralis 0.0183 sec. zijn, d.z. 54 trillingen per sec.

Voor de art. brachialis, wier lengte ± 25 cm. bedraagt, zou de trillingsduur 0.038 sec. bedragen, dus 26 trillingen per sec. zijn.

Voor de carotiden schijnt de anatomische verhouding ook gunstig om eigen golven van voldoende amplitude daarin te doen optreden. Zij staan met elkander door den circulus arteriosus Willisii in verbinding en monden in de wijde aorta en anonyma uit. Inderdaad zijn de omstandigheden gunstig, maar de trillingsduur van die golven zal natuurlijk veel grooter zijn. Stel de verhouding

van diameter en middellijn alsmede de elasticiteitscoëfficient gelijk aan die in de cruralis, hoe groot zal dan de trillingsduur zijn van de eigen golven in de beide carotiden? Als wij aannemen, dat de lengte van beide carotiden en van den circulus art. Will. 35 cm. bedraagt zal de trillingsduur 0.053 sec. zijn of ongeveer 20 trillingen per sec.

Een toon kan dus moeielijk ontstaan in de carotiden, maar zou misschien het zoog. „Schwirren" van de carotis onder deze omstandigheden van de eigen golven kunnen afhankelijk zijn?

Wij hebben dus twee oorzaken leeren kennen, die tot het ontstaan van een toon in het slagaderlijke stelsel aanleiding kunnen geven:

1°. De stroombeweging der vloeistof in een verwijding bij een bepaalde minimale snelheid en eene bepaalde verhouding der lumina.

2°. De eigen golven der slagaderlijke takken.

Beide zijn *primaire vloeistoftrillingen,* die secundair den elastischen vaatwand in trilling brengen.

Dat die wand zelf door de plotselinge spanning bij de diastole der arterie (en ontspanning bij de systole TRAUBE) in zoodanige trilling wordt gebracht, dat een waarneembaar geluid ontstaat, is zeer onwaarschijnlijk. Sedert de klinische waarneming tot het besluit leidde, dat de diastolische toon van de carotis en subclavia geen autochthoon geluid maar de voortgeleide aortatoon is, moet men aannemen, dat de spanning, die de positieve polsgolf in de carotis en subclavia te weeg brengt geen toon veroorzaakt en dus nog minder de ontspanning van den arteriewand door de altijd zwakkere negatieve golf bij insufficientie der val. semil. aortae. Het ontbreken van den toon aan de blootgelegde carotis is hiermede in overeenstemming.

OVER TE NEMEN PROEVEN

OM DE

MATE TE BEPALEN, WAARIN WATER, ONDER VERSCHILLENDE DRUKHOOGTEN,

DOOR ZANDMASSA'S VAN VERSCHILLENDE ZAMENSTELLING EN BREEDTEN STROOMT.

DOOR

T. J. STIELTJES.

In de vergadering der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van 26 Mei 1877 deelde de Heer P. HARTING eenige proeven mede, door hem genomen om te onderzoeken: in welke mate water door zandmassa's wordt doorgelaten. Hij wees daarbij op de proeven, reeds in 1851 tot 1853 door hem genomen, en trok uit beide reeksen van proeven de gevolgtrekking: dat de indijking van het zuidelijk gedeelte der Zuiderzee, tengevolge van te vreezen kwel door den onderliggenden zandbodem, onmogelijk zou blijken te zijn.

In de vergadering van 27 September 1877 trachtte ik de onjuistheid van deze gevolgtrekking in het licht te stellen. Even als reeds ter loops in de zitting van Mei, wees ik nu meer uitvoerig in September de fouten aan, die de proeven in het klein genomen aankleven.

Bij het einde van die zitting verzocht de Voorzitter mij, een schema te ontwerpen van de wijze, waarop afdoende proeven tot oplossing van dit vraagstuk zouden te nemen zijn.

Het is ter voldoening aan die vraag dat ik de vrijheid neem het volgende aan uwe aandacht te onderwerpen.

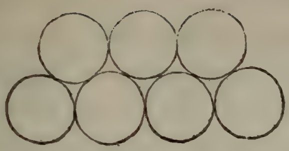
Twee punten neem ik als bewezen aan:

1°. Dat de meerdere grofheid of fijnheid van het zand een overwegenden invloed uitoefent op het doorlaten van water.

2°. Dat bij proeven in 't klein met buizen, hetzij van aarde, glas, metaal of welke andere stof, de onvoldoende aansluiting van het zand aan die wanden, de oorzaak van het grootste waterverlies is.

Het *eerste punt* wordt in de praktijk door alle ingenieurs aangenomen. De grindbeddingen bij Maastricht bijv. maken dat een gedeelte der Zuid-Willemsvaart aldaar bij zekere hooge Maasstanden uit die dan hooger liggende rivier gevoed wordt, zonder behulp van de sluis, die in gewone tijden de watertoevoer moest verzekeren. De fijne zandsoorten in de duinen daarentegen, maakten den bouw der Noordzeesluizen te IJmuiden mogelijk, op korten afstand van zee, zonder dat, niettegenstaande de aanmerkelijke diepte, de waterbemaling meer dan gewoonlijk bezwaarlijk was. Men kan zich dit ook gemakkelijk theoretisch voorstellen.

Bestond de zandmassa bijv. uit regelmatige bollen van gelijke en vrij groote middellijn, en men nam aan dat die bollen in regelmatige reijen naast en boven elkander lagen, en op elkanders toppen rustten, dan zouden tusschen die bollen de openingen ongeveer evenveel ruimte innemen als de bollen zelven ($d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3 = 0.4764\, d^3$) en regelmatige gootjes vormen, waarvan de kleinste afmetingen nog $0.414\, d$ zouden zijn. Met het kleiner worden der bollen, wordt de verhouding der inhouden *vol* en *hol* ($0.5136\, d^3$ en $0.4764\, d^3$) niet gewijzigd, maar wel worden de gootjes kleiner in afmetingen, dus de natte omtrek grooter met betrekking tot het profil, dus ook de snelheid van doorstrooming minder.



Laat men de bollen der verschillende reijen in elkanders tusschenruimten en niet op elkanders toppen rusten, dan wordt de *holle* ruimte kleiner, de gootjes krijgen bogten, en de waterdoorlating wordt bezwaarlijker.

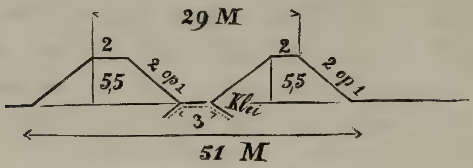
Neemt men aan dat alle zandkorrels wel betrekkelijk klein, maar toch van verschillende afmetingen zijn, dan zullen de gaten tusschen de grootere bollen door kleinere verstopt worden en de waterdigtheid toenemen. En dit zal nog meer het geval zijn bij korrels niet van bolvormigen, maar van hoekigen vorm.

Het doordringen van water langs de wanden, waartegen het zand rust, is eveneens een wel bekend feit; niet alleen bij ingenieurswerken, maar ook bij het waterdigt afsluiten van flesschen, buizen, enz. Dat doordringen zal des te grooter zijn, hoe gladder de wanden zijn, en hoe betrekkelijk langer de *natte omtrek* tot den *inhoud* der doorsnede is. Dat lek zijn der wanden zal waarschijnlijk zijn maximum bereiken bij *naauwe* en *gladde* buizen, en verminderen met de meerdere wijdte der buizen en met de ruwheid der wanden. Bij proefnemingen zal men allereerst op die *twee zaken*: de aard van het zand, en het lekken langs de wanden der buizen, moeten letten. Men zal proeven moeten nemen met kiezel en zand van verschillende grootte, beginnende met grove kiezel en afdalende tot het fijnste zand. Door weging van dit zand, in een afgesloten bak, droog, en naderhand met water verzadigd, zal men kunnen bepalen: welk gewigt van water noodig is tot verzadiging van zeker gewigt en volumen zand. Uit dit watergewigt kan dan de inhoud der *holten* tusschen de zandkorrels worden afgeleid.

De invloed van het lekken langs de wanden, zal moeten nagegaan worden door de proeven te doen met buizen van zeer verschillende middellijn en gladheid en zal aldus, (althans bij benadering) geconstateerd kunnen worden.

Er is echter een ander middel, dat mij geschikter voorkomt om tot juiste gevolgtrekkingen te komen, en dat is: het ne-

men van proeven *in het groot.* Men make dijken van bijv. ruim 5 M. hoogte om eene zekere oppervlakte land, zette de binnenruimte vol water en ga na hoeveel water in 't geheel door de dijken lekt. De proef dient, met dijken van groover of fijner zand, met of zonder vermenging met grind, herhaald te worden. De *bodem* onder de ingesloten waterkolom of vijver moet, bijv. door bekleeding met klei, waterdigt gemaakt



worden. Door nu de ingesloten vijvers vol te zetten met water 1, 2, 3, 4 en 5 M. boven den bodem, zou men (na verzadiging met water van den omringenden dijk) kunnen meten de *verlaging* van den waterstand, en dus ook de massa doorgelekt water door . . . . meters dijk.

Het bezwaar tegen deze proeven in 't groot is: groote kostbaarheid. Zelfs indien men een bodem oppervlak van slechts 3 M. middellijn omsloot door een dijk, hoog 5.5 M. met slechts 2 M. kruinbreedte en wederzijdsche hellingen van 2 op 1, dan wordt reeds de uitwendige middellijn van den afgeknotten kegel aan den voet 51 M. en moeten ongeveer 6400 kubieke meters specie verwerkt worden. Dan moet nog aan de volgende eischen worden voldaan:

1°. Dat water in genoegzame *hoeveelheid* in de nabijheid is, en

2°. op voldoende *hoogte* om, door afleiding de geheele of althans een gedeelte van den vijver op te zetten. Of wel

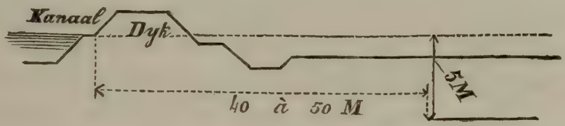
3°. Moet een werktuig voorhanden zijn om circa 1200 M^3. water op te voeren;

Bedenkt men daarbij dat de proef minstens met 3 of 4 verschillende zandsoorten dient genomen te worden, dan zal het duidelijk zijn dat de proef duur zal worden. Op de Veluwe en in het oosten van Overijssel zullen trouwens wel punten te vinden zijn, waar aan den eisch van water, op voldoende hoogte en in voldoende massa, kan voldaan worden.

Deze proef zou verder het voordeel hebben van, zoo na

mogelijk, te naderen tot wat dikwerf voorkomt. De invloed van kleibekleedingen, van kleihoudend water in den vijver enz., zou dan tevens kunnen worden nagegaan.

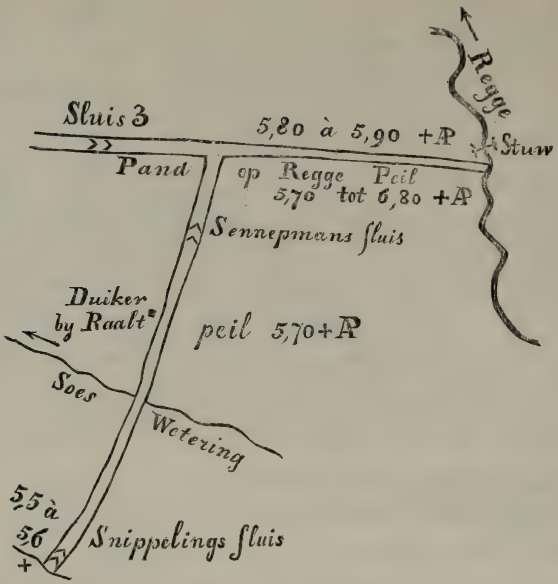
Mogt de groote kostbaarheid afschrikken van het nemen dezer proeven in 't groot, dan blijft niet anders over: dan de lekking na te gaan bij *bestaande kanalen*, *beken*, *vijvers* en andere wateren, in ophooging, in zandgronden. Men vindt die werken op uitgebreide schaal in Overijssel, Drenthe, Gelderland, Noord-Braband, Limburg. Kanalen in ophooging van 1 tot 2 M. komen in menigte voor, wellicht enkele punten die tot 2.5 à 3 M. gaan. Door daarbij waar te nemen het waterverlies, zooveel mogelijk onafhankelijk van strooming of schutting, zal men tot vrij goede uitkomsten kunnen komen.



Door op eenigen afstand (bijv. 40 in 50 M.) van die kanalen putten van 1, 2, 3 M. diepte te graven, zal men tot 5 M. onder den waterspiegel kunnen komen en onderzoeken of er water in die put opstijgt, in hoeveel tijd en in welke hoeveelheid. Het zij mij vergund een punt aan te wijzen, dat wellicht bijzonder geschikt zou zijn voor dergelijke proefnemingen.

Het in 1858 gereed gekomen laatste pand der Overijsselsche Kanalen van Sennepmanssluis langs Raalte tot de Snippelingssluis, is lang 24 kilometers op het normale peil van 5.70 M. + A. P.

De verschillende beken, die dit kanaal dwars doorsnijden, gaan alle met gronddnikers *onder* het kanaal door, op ééne na, de Soeswetering. Als middel tot peilregeling ligt slechts één duiker in den westelijken kanaaldijk bij Raalte, met eene schuif gesloten. In sommige omstandigheden ligt dit pand gemeen met een ander, meer noordelijk gelegen en 13 kilometer lang pand, op Regge peil; dan hangt de waterstand van dien op deze rivier af, en zou men bezwaarlijk tot juiste gevolgtrekkingen komen. Maar stijgt het Reggepand *boven* de 5.70 M. + A. P. bijv. (des zomers zelfs) tot 5.80 à 5.90 M + A. P. dan wordt de Sennepmanssluis gesloten en het



pand van 24 kilometers staat op zich zelven. Het krijgt dan bij Sennepman, met een verval van 0.1 à 0.2 M. eenig schut- en lekwater uit het Reggepand, verliest ongeveer dezelfde hoeveelheid bij het zuideinde, door de Snippelingssluis, die dan ook slechts eene geringe waterhoogte keert. Deze aanvoer, en dat verlies wegen tegen elkander op, bovendien kan beide gemeten worden. Zoo ook de zéér geringe *aanvoer* door de Soeswetering en het geringe *verlies* bij den Duiker. Daar nu het pand omstreeks 40 Hectaren oppervlak heeft of 400,000 M^2. geeft elke centimeter peilverandering een watermassa van 4000 M^3. Door nu in den zomer, bij eenigen regen en stil weêr, dit afgesloten pand, dat over vele kilometers in ophooging is, waar te nemen, met aanteekening van het schutwater dat er opkomt of afgaat, en waarnemende de kleine aanvoer bij de Soes-wetering en afvoer bij den duiker, zal men kunnen zien: of *duizenden meters lengte in ophooging* een groot waterverlies geven. Door dan, in de laagste gronden, nog putten van verschillende diepte *naast* het kanaal te graven, zal men kunnen onderzoeken: of bij *grootere* ophooging de waterverliezen aanvankelijk toenemen.

De zelfstandige proefnemingen in het groot als de kostbaar beschouwende, zou ik ten slotte meenen:

a. Dat directe waarnemingen bij kanalen in ophooging (ook in de Haarlemmermeer) reeds veel licht over deze zaak zullen verspreiden; voldoende licht misschien om van de duurdere zelfstandige proeven te doen afzien.

b. Dat het echter zeer nuttig blijft, in het klein, de invloed van de meerdere of mindere *lengte* en *gladheid* der wanden van buizen te onderzoeken.

c. Dat het zijn nut kan hebben niet alleen het specifiek gewigt van verschillende zandsoorten te onderzoeken, maar vooral ook de verhouding van *vol* tot *hol* daarbij na te gaan, waarmede stellig de waterdoorlating in eenig verband staat.

Rotterdam, 16 Januarij 1878.

RAPPORT

VAN DE HEEREN

G. VAN DIESEN, J. BOSSCHA en J. M. VAN BEMMELEN.

De ondergeteekenden, in de vergadering van 23 Februarij 1878 der Afdeeling Wis- en natuurkunde van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen in commissie benoemd, ten einde gevoelen en advies kenbaar te willen maken omtrent een voorstel van het lid der Akademie Dr. T. J. STIELTJES, tot het instellen van proefnemingen aangaande *de mate waarin water, onder verschillende drukhoogten, door zandmassa's van verschillende zamenstelling en breedte stroomt*, hebben de eer door mededeeling van het volgende zich van hunne taak te kwijten.

Het voorstel van den heer STIELTJES is een gevolg van den door den heer Dr. P. HARTING in de vergadering van 26 Mei 1877 geopperden twijfel aan de uitvoerbaarheid of het welslagen der ontworpen droogmaking van het zuidelijk gedeelte der Zuiderzee. Daar de dijk in zee, aansluitende aan Urk, zou gelegd worden op een bodem van diluviaal zand, dat den heer HARTING o. a. door proefneming gebleken was gemakkelijk water door te laten, vreesde hij, dat bij de uitmaling der plas het water van buiten door de zandlaag naar binnen zou doordringen, en wel te sterker naarmate het verschil in hoogte van de beide waterspiegels grooter werd. In de *Verslagen en Mededeelingen* der Afdeeling Natuurkunde, Tweede Reeks, XIe deel, 3e stuk, zijn de beschouwingen en de uitkomst der proefnemingen van den heer HARTING opgenomen. De heer STIELTJES,

die terstond reeds te kennen gaf, dat de proeven in het klein genomen geen voldoenden grond gaven voor de gevolgtrekkingen van den heer HARTING, en inzonderheid op den invloed der gladde wanden van de buizen de aandacht vestigde, kwam in de vergadering van 29 September 1877 op de zaak terug en wees op eenige dijken en werken in Nederland, waarbij van de ongunstige uitkomst door den heer HARTING gevreesd, niets gebleken was. Een opstel over de doordringbaarheid van klei en zand door water, werd voor de *Verslagen en Mededeelingen* in de vergadering van 26 Januarij 1878 aangeboden door den heer STIELTJES, die eindelijk in de daarop volgende vergadering van 23 Februarij ll. het in het hoofd van dit stuk genoemde voorstel deed.

Het hoog belang van een nader onderzoek, dat niet alleen door den heer STIELTJES, maar ook door den heer HARTING wenschelijk wordt geacht, zal na de zoo even gedane mededeelingen wel niet behoeven te worden aangetoond.

Tot eene onderneming van zoo reusachtigen omvang als die der droogmaking van de Zuiderzee, behoort niet te worden besloten, indien niet op goede gronden kan worden aangetoond, dat eene mislukking ten gevolge van onderloopsheid van den dijk volstrekt niet gevreesd behoeft te worden. Is het al niet waarschijnlijk dat een ontwerp, bestudeerd door onderscheidene Nederlandsche Ingenieurs achtereenvolgens in Commissiën vereenigd en op zich zelven werkzaam, eene zoo voor de hand liggende oorzaak van mislukking zou bevatten, daarin behoeft de Akademie geen reden te zien voor verwerping van een onderzoek, dat door zijn uitnemend wetenschappelijken aard mag beschouwd worden geheel op haren weg te liggen.

Wegens het dadelijk belang toch dat er, bij den menigvuldigen aanleg van waterwerken in Nederland in het algemeen, gelegen is in de kennis van de mate van doordringbaarheid van zand door water, verdient het onderzoek reeds alle aanbeveling Het kan een stap nader brengen tot de oplossing der vraag over welken afstand water onder een gegeven druk in zijn weg door zand te grooten wederstand ontmoet, om in bezwarende hoeveelheid door te dringen.

Ten einde tot de gewenschte kennis te komen, worden door den heer STIELTJES aanbevolen *proefnemingen* met daartoe gemaakte inrigtingen en *waarnemingen* van bestaande toestanden.

De proefnemingen zouden ten doel hebben:

a. de bepaling van de hoeveelheid water, die door zand van verschillende afkomst in de ruimte tusschen de korrels kan worden opgenomen;

b. de bepaling van den invloed van de meerdere of mindere *lengte* en *gladheid* der wanden van buizen gebezigd bij een onderzoek als dat van den Heer HARTING;

c. de bepaling van het waterverlies uit eene volgepompte kom gevormd door een ringvormig opgeworpen dijk van zand. Door bekleeding van den bodem der kom met klei, zou de gelegenheid bestaan op groote schaal en in overeenstemming met in werkelijkheid voorkomende toestanden de mate van doorlating van een zanddijk na te gaan.

De sub *a* bedoelde proef is eene weinig kostbare en zou zich kunnen uitstrekken tot verschillende soorten van zand, die in een waterdigten bak gestort, vóór en na de bijvoeging van water, gewogen werden. De proef komt ons wel nuttig voor, maar niet afdoende voor de oplossing van het vraagstuk, omdat er niet uit kan geleerd worden of het zand dat veel water opneemt, meer water zal doorlaten dan dat hetwelk weinig water opneemt. Fijn zand bijv., waarbij volgens de beschouwing van den heer STIELTJES de doorstroomingskanalen kleiner en dus de wrijving grooter zou zijn, laat zich gemakkelijker medevoeren dan grof zand.

b. De Heer HARTING vestigt de aandacht op verbeteringen, die in den door hem gebezigden toestel zouden behooren te worden aangebragt. Met inachtneming van zijne ook ten aanzien van de wijze van vulling gegeven wenken, zou eene hervatting zijner proefneming ongetwijfeld van groot belang zijn. De buizen, die bij zijn toestel slechts eene wijdte van ongeveer 20 mM. hadden, zouden daarbij veel wijder moeten genomen en de binnenwand zou ruw gemaakt moeten worden. Niet met

het waarnemen der opstijging van het doorgesijpelde water in eene verticale buis aan het uiteinde zou men zich moeten tevreden stellen, maar eene doorstrooming met weglating dier buis gedurende verscheidene uren onder constante drukhoogte zou moeten plaats vinden, met meting van de hoeveelheid doorgelaten water, en met verzameling van het medegevoerde zand.

Verklikpijpjes zouden van afstand tot afstand op de zandbuizen moeten worden gesteld, ten einde te kunnen waarnemen volgens welke wet bij verschillende lengte en soort van de zandader en bij verschillende drukhoogte het doorstroomingsvermogen van het water afneemt.

Deze proeven, die daardoor in groot aantal genomen zouden moeten worden, zijn waarschijnlijk te kostbaar om uit de middelen van de Akademie te worden bestreden.

Hoe wenschelijk wij het nemen dier proeven zouden achten, meenen wij niet te mogen aanraden er van wege de Akademie toe over te gaan.

Zij zijn echter naar onze meening van zoo uitnemend belang dat wij straks nog even daarop zullen terugkomen.

De proef sub *c* door den Heer STIELTJES aanbevolen, hoe wenschelijk ook en hoe betrekkelijk gering de uitgaaf moge zijn, in vergelijking tot de groote sommen, die te kosten zouden worden gelegd aan het groote werk, waarvoor zij licht zou schenken, wordt door den voorsteller zelven zoo kostbaar geacht, dat hij op het nemen daarvan niet aandringt.

Wij laten dus dit voorstel als weinig kans tot verwezenlijking aanbiedende, inzonderheid met het oog op de vermoedelijk met gelijke vrucht in de plaats te stellen waarnemingen, tot wier behandeling wij nu zullen overgaan, buiten beschouwing.

Indien ergens een toestand was te vinden, die overeenkwam met dien, welke bij den nieuwen Zuiderzeepolder zou ontstaan, zou aan waarneming van hetgeen daar zich voordeed, als meer afdoende, de voorkeur moeten worden gegeven boven het nemen van de reeds besproken proeven.

Bij het ontbreken van een geheel overeenkomstigen toestand kan echter de gelegenheid worden gevonden tot het verzamelen

van gegevens omtrent de mate, waarin water door zand kan loopen onder de opgenoemde verschillende omstandigheden.

De Heer STIELTJES heeft daartoe in de Vergadering van 29 September 1877 en in de hierbij gaande nota eenige waarnemingspunten aan de hand gedaan.

De dijken der Zeeuwsche polders in de eerste plaats door hem genoemd, kunnen over het algemeen niet vergeleken worden, wat de omstandigheden betreft waarin zij zich bevinden, met den ontworpen dijk in de Zuiderzee. Zij worden niet opgeworpen voor dat de schorren „rijp" zijn, dat is door aanslibbing eene hoogte hebben bereikt, die ze boven gewoon hoogwater doet uitsteken.

Het groot verschil tusschen vloed en eb levert daarenboven niet de nagenoeg constante waterhoogte, die buiten den Zuiderzeedijk zal worden aangetroffen.

In Zeeland zal met meer vrucht welligt bij een der kanalen, waarbij de waterspiegel aan weinig verandering in hoogte onderworpen is, de mate van doorsijpeling zijn waar te nemen.

Bij het kanaal van Sluis naar Brugge, dat in den afgeloopen winter door een dam bij Brugge was afgesloten, is gedurende eenige dagen de hoeveelheid water gemeten die bij den dam werd aangevoerd, om in het waterverlies tegemoet te komen, dat in die dagen, waarin de verdamping onbeduidend was, voornamelijk aan doorkwelling kon worden toegeschreven. De uitkomst dier waarneming kan te zijner tijd eene bijdrage tot de verzameling zijn.

Het kanaal door Walcheren verliest water door kwel; waarneming van de hoeveelheid doorkwellend water is met eenige zekerheid alleen te doen bij de afsluitbare kom tusschen het kanaal en de tweede binnenhaven te Vlissingen.

De put voor het nieuwe sluishoofd te Vlissingen geeft insgelijks gelegenheid tot meting van water door en onder een dijk gaande.

Het water namelijk, dat onder eene constante drukhoogte van ruim 6 M. door den binnendam van den put dringt, wordt afzonderlijk geleid naar de vergaarkom waarop de pomp staat, die den put droog houdt, en is dus te meten.

De Heer STIELTJES wijst op de groote diepte en het geringe waterbezwaar van de ontgraving in de duinen voor de Noordzee-sluizen van het kanaal door Holland op zijn smalst.

De diepte van de ontgraving was werkelijk zeer aanzienlijk en reikte tot 9 à 10 M., en in de diepste gedeelten tot 11 M. beneden AP., zijnde ongeveer 20 M. beneden het oorspronkelijke terrein.

De bodem was, hetzij door zijne zamenstelling, hetzij door de zamendrukking van de zandmassa, die er eeuwen op gerust had, van genoegzame stevigheid om er de sluizen zonder paal-fundeering op aan te leggen.

De put lag, volgens inlichtingen die wij aan de welwillendheid van den Hoofd-Ingenieur DIRKS te danken hebben, op een afstand van ongeveer 1100 meters van de laagwaterlijn der Noordzee verwijderd. De zee had noch bij hoog- noch bij laagwater verder toegang landwaarts in dan vroeger, d. i. de buitenhelling der duinen en het strand waren nog niet aangeroerd.

Het tegenwoordige buitenkanaal was tot omstreeks 1 M. + A.P. of iets boven hoogwater uitgegraven, doch aan den buitensten duinrug was een waterkeerende dam gespaard, waarvan het buitentalud met de buitenduinhelling overeenstemde.

Van zeewater is nooit iets binnenwaarts bespeurd zoolang de buitenduinregel niet doorgestoken was.

Nadat voor den afloop van het water, dat zich in het ondiepe kanaal tusschen den buitendam aan zee en den buitendam van den sluisput verzamelde, onder den buitenduinrug, d. i. onder eerstgenoemden dam, een uitwateringskoker gelegd was, schijnt door dien koker bij vloed zeewater te zijn binnengekomen. Dit maakt de heer DIRKS op uit de daadzaak, dat na ongeveer een jaar rust in dat ondiepe water (ongeveer 0.50 M.) eene *menigte* botjes zijn gevangen.

De helling waaronder het zoete water uit duinen werd weggetrokken, is bevonden 200 op 1 te bedragen.

In den sluisput was het water volkomen zoet, en voortreffelijk drinkwater.

De stoommachine, die den put droog hield, werkte ongeveer 20 uur in het etmaal en bragt 9.40 M^3 water per minuut 12.80 M. hoog op. Het waterbezwaar was dus ongeveer 11280 M^3 in een etmaal.

Dit groote waterbezwaar laat zich verklaren hieruit, dat het geheele kanaal tot bij den spoorweg Haarlem—Uitgeest, over 3000 M. lengte, met den sluisput gemeen lag, en dus mede door het werktuig werd drooggehouden.

Uit het medegedeelde blijkt, dat de geschiedenis van den put der Noordzeesluizen weinig gegevens aanbiedt tot het trekken van een besluit voor de zaak die ons bezig houdt, aangezien de toevoer waarschijnlijk werd geleverd door de rondom gelegen duingronden, waaraan het water onder eene helling van 200 op 1 door den put in het kanaal werd onttrokken.

De opgaaf van de zoo even genoemde helling, waaronder het water in duingronden werd opgehouden, strookt ongeveer met de waarneming, die bij het graven van kanalen ten dienste van duinwaterleidingen werd gedaan, en strekt tot verklaring van de door den Heer STIELTJES onder de aandacht gebragte omstandigheid, dat bij boringen in duinen gebleken is, dat water vrij hoog boven A.P. in de losse zandgronden blijft hangen.

Uit dit verschijnsel, toe te schrijven aan aankleving of capillariteit, kan moeilijk iets worden afgeleid omtrent de uitwerking van den hydrostatischen druk eener waterkolom, die door een zandbodem tracht henen te dringen.

Eene droogmakerij zal aan de zijde, waar zij door hooge zandgronden wordt begrensd, een zoom van die gronden van water ontdoen, te breeder naarmate de gronden hooger zijn, en, die drooglegging geschied zijnde, daarna van die zijde geen anderen toevoer te wachten hebben dan door den regen op den zoom wordt gebragt.

Bij den Haarlemmermeerpolder heeft zich dergelijke aftrekking van water vermoedelijk door zandlagen onder de ringvaart door doen bespeuren. Of thans nog langs dien weg in regentijd water in den polder komt, dan of het uit de ringvaart wordt aangevoerd, zal misschien zijn na te gaan.

Van belang zal ook eene voortzetting zijn van het onderzoek door ons geacht medelid Jhr. J. R. T. ORTT in het werk gesteld (Tweede Reeks der Verslagen en Mededeelingen, Deel XIII) en waartoe ook waarnemingen, zooals die welke de Heer STIELTJES

in de Verslagen en Mededeelingen, 8ste deel, 3e stuk, openbaar maakte, veel licht kunnen geven.

Ten einde zooveel mogelijk vrij te zijn van den invloed van verdamping, die, vooral bij plantengroei, een aanzienlijk deel water aan de waarneming onttrekt, is het raadzaam de gegevens zooveel mogelijk in den winter te verzamelen en op dagen, waarin weinig of geen regenwater uit den bodem nazakt, dus in een droogen tijd.

Bij kanalen in ophooging eindelijk, die in de meergenoemde vergadering mede door den heer STIELTJES werden aan de hand gedaan voor het doen van waarnemingen, zal kennis van de hoeveelheid water, dat verloren gaat, kunnen worden opgedaan, en zoo men het punt weet waar het zich ontlast, ook de afstand kunnen worden nagegaan, die het wegvloeijende water moet doorloopen.

Polders wier droogmaking of drooghouding bezwaar opleverde, zooals de Tienhovensche plassen, Waard en Groet, en de Koekoek, zouden, zoo er waarnemingen verzameld waren of nog konden worden, eene belangrijke bijdrage kunnen leveren voor de oplossing van het vraagstuk.

Op een groote schaal zouden gegevens kunnen worden verzameld in de Over-Betuwe en in den Bommelerwaard boven den Meidijk.

Uit eerstgenoemde landstreek voert de Linge, na aftrek van het verdampte, al het water weg, dat er in gevallen is, en er in is doorgekweld uit de rivieren, die langs beide zijden er langs stroomen.

Bij de Ochtensche brug zijn reeds door den Hoofd-Ingenieur REUVENS waarnemingen gedaan van de hoeveelheid water die de Linge afvoert, waarmede zou kunnen worden voortgegaan.

Dewijl in dit naauwe gedeelte der Betuwe geen andere afvoer geschiedt, bestaat de mogelijkheid met groote juistheid na te gaan, hoeveel water tijdens hoogen rivierstand door kwel wordt aangevoerd in het stroomgebied van de Linge boven die brug, omdat men ingeval van regen kan berekenen hoeveel het daarmede verkregen waterbezwaar bedraagt.

Daar de uiterwaarden wegens hun grondsoort vermoedelijk weinig water zullen doorlaten, mag men aannemen dat het aangevoerde water grootendeels uit het rivierbed onder de uiterwaarden door zijn weg vindt, en zal dus met den afstand van dat bed tot de verzamelkom binnendijks, waar het water voor den dag komt, rekening moeten worden gehouden.

Raadpleging van de uitkomst der boringen, gedaan ten dienste van kanaal en spoorwegen door de Betuwe, zal daarbij noodig zijn.

In den Bommelerwaard boven den Meidijk, zouden soortgelijke gegevens kunnen worden verzameld door waarneming van den waterstand in geschikte tijdstippen.

Geen der aanbevolen punten van waarneming biedt een toestand aan, overeenkomende met dien van den dijk ontworpen op den diluvialen zandbodem van de Zuiderzee, die aan de zeezijde onder de uitgestrekte plas doorloopt zonder kleibekleeding en in den polder een even diepen bodem vormt, die nabij den dijk op Urk gerigt evenmin een kleilaag draagt en iets meer binnenwaarts voor een deel slechts eene dunne laag, die opwellend water niet zou kunnen tegenhouden.

De gewigtige vraag, of de afstand, dien het water van buiten naar binnen door het zand moet afleggen groot genoeg is om op den duur aanmerkelijke instrooming van water in den polder te beletten, kan dus niet regtstreeks worden beantwoord, maar zal uit de doorgedrongen hoeveelheden in verhouding van de drukhoogte en van den afstand van doorzijging moeten worden berekend.

Wij hebben gemeend, dat wij bij ons oordeel over het wezen van het voorstel, nedergelegd in de medegedeelde beschouwingen, ook behoorden onze meening te zeggen over de wijze waarop en de vraag door wie de uitkomst der waarnemingen zou moeten worden verzameld.

Na met ons geacht medelid STIELTJES hierover in overleg te zijn getreden, kunnen wij als een besluit, waartoe wij met hem eenstemmig gekomen zijn, mededeelen, dat in de eerste plaats de waarneming van bestaande toestanden bij waterschappen, rivieren, polders en kanalen, zoo als wij aangaven, zou moeten worden ter hand genomen.

Wij meenen dat dit binnen het bereik ligt van de Akademie, indien uit de natuurkundige afdeeling eenige leden, ieder in zijn omgeving of werkkring, trachtten de gewenschte gegevens op te sporen en bijeen te brengen.

De heer STIELTJES verklaarde wel gelegenheid te hebben tot het leveren van bijdragen.

Hun arbeid zal waarschijnlijk doen uitkomen of het nemen van de in den aanvang van ons verslag beschouwde proeven met zand in buizen, tot oplossing van eenig onbeantwoord gebleven vraagpunt, nog vereischt wordt.

De omvang en inrigting der alsdan nog gewenschte proeven, zal het best door de leden die de gegevens verzamelden kunnen worden aangegeven. Vooralsnog meenen wij dat deze proeven niet uit de gewone middelen van de Akademie zullen kunnen bestreden worden, en dat er de medewerking der Regering voor zal moeten worden ingeroepen. Met overlegging van de verzameling der waarnemingen zal de wenschelijkheid, zoo die zal worden uitgesproken, van aanvulling door proefneming wat aan de waarnemingen ontbreekt, ook door de Regering kunnen worden beoordeeld.

De kostbare proefnemingen op groote schaal met een door een zanddijk gevormde kom, met water gevuld gehouden, zal ten slotte nog een onderwerp van overweging uitmaken.

Wij onthouden ons geheel van het aanbevelen dezer proef, die naar onze meening bij het voor de hand liggen van minder kostbare en vermoedelijk even goed afdoende middelen van onderzoek voorloopig buiten beschouwing kan blijven.

Wij meenen dus te moeten aanraden eene nieuwe Commissie te benoemen, wier taak zou zijn in de eerste plaats *gegevens* te verzamelen bij kanalen, rivieren, polders, droogmakerijen en andere werken, tot de kennis van de *mate*, waarin water onder verschillende drukhoogte door zandmassa's van verschillende zamenstelling en breedte stroomt.

De Commissie voornoemd:

VAN DIESEN

J. BOSSCHA

J. M. VAN BEMMELEN.

NIEUWE PROEVEN

OVER DE

DOORDRINGBAARHEID VAN ZAND EN VAN KLEI DOOR WATER,

EN BESCHRIJVING VAN EEN ZANDSCHIFTER.

DOOR

P. HARTING.

In de vergadering van 29 Sept. 1877 heeft de heer T. J. STIELTJES *) eenige opmerkingen gemaakt over de door mij in die van 26 Mei 1877 medegedeelde proeven †) en daarbij tevens verslag gegeven van eenige bij den aanleg van groote werken verkregen uitkomsten die in strijd schijnen met die welke de in het klein genomen proeven leveren. Op zijn voorstel is eene akademische commissie benoemd, belast met de taak om een plan te ontwerpen tot nader onderzoek der doordringbaarheid van zand en klei voor water. Gaarne betuig ik den heer STIELTJES mijnen dank voor zijne bemoeiingen, waardoor het doel dat ik mij voorstelde, toen ik deze zaak in de akademie ter sprake bracht, voorzeker bereikt zal worden, namelijk van zich de zekerheid te verschaffen dat, wanneer eenmaal het groote werk der droogmaking van de Zuiderzee ondernomen wordt, dit niet op onoverkomelijke, door doorkwelling veroorzaakte bezwaren stuiten zal. Evenals een ingenieur zich door voorafgaande proefnemingen overtuigt van de sterkte der materialen, die voor het bouwen eener brug moeten dienen, en daarna met zekerheid voorzeggen kan, dat die brug, zonder meer dan eenige millimeters door te buigen, een last van zoo en zooveel duizend kilogrammen kan dragen, evenzoo acht ik het mogelijk en uitvoerbaar den graad van doordringbaarheid voor water te

*) *Versl. en Meded.* 2de reeks, Dl. XII, p. 219.
†) *Versl. en Meded.* 2de reeks, Dl. XI p. 301.

bepalen, die elke grondsoort in ons vaderland in meerdere of mindere mate bezit, in dier voege, dat men vooraf met juistheid de hoegrootheid der kwel berekenen kan en dienovereenkomstig zijne maatregelen nemen.

Ik haast mij echter er bij te voegen, — en de beneden mede te deelen proefnemingen zullen dit nog nader bevestigen — dat ik mijne vroeger met den zeer gebrekkigen door mij aangewenden toestel verkregen uitkomsten volstrekt niet als een juisten maatstaf voor die doordringbaarheid wil beschouwd hebben. Integendeel, het is mij bij voortzetting der proefnemingen gedurende de laatst verloopen tien maanden gebleken, dat langs dien weg geen betrouwbare uitkomsten bereikbaar zijn, en dat er nog verscheidene voorzorgen zullen moeten worden aangewend — waarop ik trouwens zelf reeds vroeger ten deele gewezen heb — alvorens men uit zulke proeven voor de praktijk bruikbare gevolgtrekkingen kan afleiden. Ik wensch dan ook de tot dusver genomen proeven slechts als voorloopige beschouwd te zien. Toch zijn zij voldoende om althans eene der hoofdredenen te leeren kennen, waarom de uitkomsten der eerste proefnemingen zoozeer in strijd schijnen met de uitkomsten der ervaring in het groot opgedaan.

Alvorens echter een verslag te geven van die proefnemingen, acht ik het noodig enkele opmerkingen over de door den heer STIELTJES aangevoerde voorbeelden, waaruit de geringe doordringbaarheid van zand schijnt te blijken, vooraf te laten gaan. Onder die voorbeelden is er geen enkel, dat rechtstreeks toepasselijk is op het diluviale zand, dat in de diepte onder den bodem der Zuiderzee ligt, en dat voorzeker, wat grofheid van korrel betreft, veel verschillen zal, gelijk bij de diepe putboringen te Amsterdam en bij Zeist gebleken is, van het zand afkomstig uit de Noordzee, dat, door den wind op en overgewaaid, de duinen langs onze westkust heeft doen ontstaan, maar verder ook in meer of minder dikke lagen zich tot op eenigen afstand van de kust binnenslands uitstrekt en de aldaar in de diepte gelegen kleigronden overdekt. De gevallen *a*, *b* en *c*, door den heer STIELTJES vermeld, betreffen dit soort van zand, dat inderdaad zeer fijn is, daar door den wind alleen de fijnste korreltjes zijn medegevoerd. Zulk zand moet derhalve slechts

eene betrekkelijk geringe hoeveelheid water doorlaten. Dat ook het geval *d* van den heer STIELTJES niet afdoende is, schijnt mij te moeten worden afgeleid uit de opmerkingen van ons overleden medelid STARING en de mededeelingen van den heer J. R. T. ORTT *), aangaande de kwel door het bedoelde zeezand. Overigens is ook dit geval, evenmin als de drie eerste, van rechtstreeksche toepassing op den Zuiderzee-bodem. Alleen het geval *e* door den heer STIELTJES aangevoerd, betreft een door diluviale gronden gegraven kanaal. Doch ook daaruit laat zich, zonder nadere bekendheid met den aard van den bodem, geene zekere gevolgtrekking afleiden, die toepasselijk zoude zijn op de vraag die ons bezig houdt, t. w. de mogelijkheid van de droogmaking van een groot deel der Zuiderzee. Dat gedeelte van onzen diluvialen bodem toch, hetwelk zich boven het zeevlak verheft, heeft sedert duizendtallen van jaren blootgestaan eensdeels aan de werking van den regen, die kleine stroomen doet geboren worden, waardoor de fijnere zandkorrels worden medegevoerd, terwijl de grovere achterblijven, anderdeels en vooral aan die van den wind, die hier hetzelfde doet als langs de zeekust en het fijnere gedeelte van het zand doet verstuiven, en het hier en daar tot duinen opwaait die zoolang blijven bestaan als eenig plantendek hen genoegzaam beschut, maar later weder verstuiven, wanneer door de eene of andere oorzaak dit plantenbekleedsel verminderd of verdwenen is. Zoo worden, door deze schiftende werking van water en wind, uitgestrekte lagen van zeer fijn zand gevormd, terwijl elders de grovere korrels van allerlei grootte, als grint en groote steenen, tot van eenige duizenden kilogrammen gewicht, achterblijven. De geheele bovengrond van het Eemdal b. v. is langs dien weg ontstaan. Het ware, niet geremanieerde diluvium, vindt men daar eerst op vrij aanmerkelijke diepte †). Misschien is iets dergelijks

---

*) *Versl. en Meded.* 2de reeks, Dl. XIII, p. 3.

†) Een bezoek, gedurende den vorigen zomer aan Barneveld gebracht, heeft mij overtuigd dat mijne vroegere voorstelling, zich grondende op de opgeboorde gronden (zie *Versl. en Meded.* 1875, 2de reeks, Dl. IX p. 48), dat namelijk de bodem aldaar tot het Eemstelsel behoort, volkomen juist is. Vlak voor het stadhuis kan men het tot 10 à 12 centim. hoogte uit de Norton-buis opspuitende water zien. Het ware diluvium, met grint en steenen, begint eerst op ruim een half uur van het dorp. Daarentegen is het mij bij een bezoek te Putten gebleken, dat de bodem van deze laatste plaats en van hare onmiddellijke omgeving geen deel

het geval in die zandgronden van Overijssel waar de door den heer STIELTJES bedoelde kanalen gegraven zijn. Hoe dit zij, hun bedding zal wel niet uit geheel ongeremanieerd diluviaal zand bestaan, want men kan veilig beweeren dat men dit eigenlijk nergens meer in ons vaderland in de nabijheid der oppervlakte aantreft. In de diepte is dit echter anders. Daar is het zand uit een mengsel van korrels van veel meer verschillende grootte samengesteld. En zoo zal het ook vermoedelijk het geval zijn in de dieperen lagen van den Zuiderzee-bodem. Dat daar althans steenen van allerlei grootte gelegen zijn, leert de bodem rondom Urk. Of de zandlagen onder de klei der Zuiderzee eene groote of eene geringe permeabiliteit hebben, weet eigenlijk niemand, want de verrichte boringen zijn niet diep genoeg geweest om deze te leeren kennen.

Eindelijk moet ik nog doen opmerken, dat het niet aan in het groot gedane waarnemingen ontbreekt, waaruit blijkt, dat zelfs zeer fijn zand, zooals het duinzand, zeer groote hoeveelheden water doorlaat. Immers daarop berust de geheele aanleg onzer duinwaterleidingen. Hoe groot de porositeit van onzen bodem is, zelfs op punten waar men dit niet verwachten zoude, bleek nog onlangs te Utrecht bij het maken van diepe putten volgens de methode van FAUVELLE die daarin bestaat dat een waterstraal door een buis in een boorgat gespoten wordt, dat door een ijzeren boorbuis begrensd is. De kracht van den waterstraal woelt dan den grond in de diepte om, en het weder opstijgende water, dat over den rand der boorbuis wegvloeit, voert de fijnere bodembestanddeelen mede. Op het Vreeburg is dit gedurende velen weken, ja maanden voortgezet. Het water werd aangevoerd door een stoombrandspuit, die, bij volle kracht werkende, per minuut 1000 liters water levert. Veilig mag men stellen dat dit per uur 50 en per dag 500 kubieke meters bedroeg. Welnu, zoolang de spuitbuis zand ontmoette, keerde bijna niets van deze verbazende

---

van het Eemdal uitmaakt, gelijk ik vroeger, op grond van vandaar ontvangen berichten gemeend had. De gronden van het Eemdal zijn echter volkomen herkenbaar te Vanenburg, het buitenverblijf van den heer Baron VAN PALLANDT, dat op ongeveer 20 minuten afstand van Putten en 16 meters lager ligt. Hier zag ik ook het water uit den Norton-put met een straal van meer dan een halven meter hoogte boven den leganen grond spuiten. De bodem, waar thans Putten ligt, vormde derhalve in den tijd toen de Eem zich met een wijden, golfvormigen mond in zee uitstortte, een soort van daarin uitstekende kaap.

hoeveelheid water naar de plaats (de Singelgracht) waar het werd opgepompt terug; alles verdween in de diepte; slechts ongeveer $^1/_4$ of $^1/_3$ van het ingespoten water werd weder opstijgende over den rand der boorbuis heen uitgestort en grootendeels in den onmiddellijken omtrek daarvan door den grond ingezogen. Vele duizenden kubieke meters water zijn zoo op deze kleine plek in den grond gespoten, zonder dat zijne vatbaarheid om water op te nemen of door te laten verminderde. En toch bestaat de bodem aldaar grootendeels uit fijn zand, afgewisseld door klei- en leemlagen van 1 tot 4 meters dikte. Waar deze laatste door den waterstraal bereikt worden, wordt de snelheid waarmede het water wordt doorgelaten, tijdelijk vertraagd; een tamelijk groot deel van het ingespoten water loopt dan terug door het daarvoor bestemde riool naar de Singelgracht, maar zoodra zulk een kleilaag doorboord is, verdwijnt weder, zelfs in lagen van zeer fijn zand, het meeste water in de diepte. Natuurlijk wordt in dit geval de doorzijging zeer bevorderd door de aanmerkelijke hoogte der drukkende waterkolom, die in het boorgat zelf tot 369 meters klom; maar toch blijft dit een merkwaardig bewijs voor de groote snelheid waarmede zich het water in eenen tamelijk dichten bodem verplaatsen kan.

De volgende proeven zijn genomen met denzelfden toestel en op dezelfde wijze als die welke vroeger beschreven zijn *). Ook het daarvoor gebezigde zand en de klei zijn dezelfde. Het eenige verschil bestond daarin, dat elke proef zoolang werd voortgezet totdat het volkomen duidelijk was dat het zand of de klei of wel beiden vereenigd het maximum van dichtheid hadden bereikt, iets waartoe eene onafgebroken doorstrooming van water gedurende verscheidene weken gevorderd werd. Dit is ook de voorname reden, waarom de uitkomsten dezer proeven zooveel afwijken van die welke bij de eerste reeks zijn verkregen, toen de reeds ingediende maar sedert ingetrokken wet op de droogmaking der Zuiderzee met periculum in mora scheen te dreigen. Trouwens, eerst tijdens en ten gevolge dezer proefnemingen, heb ik de noodzakelijkheid dezer voorzorg goed leeren kennen.

*) *Versl. en Meded.* Dl. XI bl. 310.

Eerste Proef.

Enkel klei.

De eerste proef *) die wij hier vermelden is genomen met eene kolom van Zuiderzee-klei, van 20 millim in doorsnede en eene aanvankelijke hoogte van 1m,070, welke echter gedurende de proef verminderde tot op 1m,064, ten gevolge der algemeene contractie die de kleikolom gedurende de doorzijging van het water onderging. Daarbij ontstonden op den 8sten dag der doorzijging twee overdwarse scheuren of barsten in de kleikolom, die aanvankelijk allengs iets wijder werden, de bovenste tot ongeveer 1 millim., de onderste tot 2 millim. Door deze barsten werd de kleikolom in drie nagenoeg gelijke stukken verdeeld. Op den 18den dag hadden zich die barsten weder gesloten, maar tevens was de lengte der kleikolom met 6 millim. verminderd.

De buis was vertikaal gesteld, zoodat de ondervlakte der klei aan de volle drukking eener waterkolom van 5m hoogte was blootgesteld. Deze drukhoogte moet echter verminderd worden 1° met de hoogte der kleikolom en 2° met de hoogte van het daarboven gestegen water. Bij het begin der proef stond het niveau van het water ongeveer 0m,13 boven de bovenvlakte der kleikolom. Daar deze zelf 1m,07 hoog was, zoo moet de hoogte der drukkende waterkolom verminderd worden met 1m,20, waarna er 3m,80 voor de werkelijke drukking overblijft. Deze verminderde echter naar gelang het water in het niet met klei gevulde gedeelte der buis opsteeg, en daar de metingen, hoewel meestal dagelijks geschiedende, waarbij telkens, door opzuiging met een pipet, het water weder op het aangenomen 0-punt werd teruggebracht, toch van tijd tot tijd, gelijk uit onderstaande tafel blijkt, zich over twee of meer dagen uitstrekten, zonder dat het niveau weder op het vroeger punt werd gebracht, zoo zijn voornamelijk hieraan de kleine onregelmatigheden toe te schrijven die de opeenvolgende cijfers aanbieden.

---

*) Hare uitkomsten gedurende de eerste 17 dagen zijn reeds medegedeeld op bl. 322 van het vorige opstel. Deze mededeeling moest toen afgebroken worden omdat het afdrukken van dit opstel niet langer mocht worden uitgesteld.

Intusschen is het mij ook voorgekomen, dat de temperatuur eenigen, zij het ook geringen, invloed uitoefent, en dat namelijk op dagen, wanneer de temperatuur der lucht en bij gevolg ook die van het water lager was, er iets minder water gedurende denzelfden tijd door de klei gedrongen was dan op dagen wanneer de luchttemperatuur hooger was. Eenige thermometrische bepalingen zijn dan ook gedurende den loop van deze en de volgende proeven door mij gedaan, om dit uit te maken. Doch de uitkomsten zijn te onzeker dan dat ik het noodig acht deze hier opzettelijk mede te deelen.

						Hoogte van de in 24 uren doorgetogen kolom water.	
Van	6	Juni	tot	7	Juni	75	millimeters.
〃	7	〃	〃	8	〃	64	〃
〃	8	〃	〃	9	〃	58	〃
〃	9	〃	〃	10	〃	55	〃
〃	10	〃	〃	11	〃	54,5	〃
〃	11	〃	〃	12	〃	50,5	〃
〃	12	〃	〃	13	〃	47	〃
〃	13	〃	〃	14	〃	53	〃
〃	14	〃	〃	15	〃	40	〃
〃	15	〃	〃	16	〃	37	〃
〃	16	〃	〃	17	〃	35	〃
〃	17	〃	〃	18	〃	32	〃
〃	18	〃	〃	19	〃	30	〃
〃	19	〃	〃	20	〃	27	〃
〃	20	〃	〃	21	〃	26	〃
〃	21	〃	〃	22	〃	25	〃
〃	22	〃	〃	23	〃	25	〃
〃	23	〃	〃	24	〃	23	〃
〃	44	〃	〃	25	〃	22	〃
〃	25	〃	〃	26	〃	20	〃
〃	26	〃	〃	27	〃	21	〃
〃	27	〃	〃	28	〃	19,5	〃
〃	30	〃	〃	3	Juli	19,3	〃
〃	3	Juli	〃	7	〃	17,5	〃
〃	7	〃	〃	9	〃	15	〃
〃	9	〃	〃	11	〃	16,5	〃

						Hoogte van de in 24 uren doorgetogen kolom water.
Van	11	Juli	tot	13	Juli	16,5 millimeters.
″	13	″	″	14	″	22 ″
″	14	″	″	15	″	17 ″
″	15	″	″	16	″	14 ″
″	16	″	″	17	″	15 ″
″	17	″	″	18	″	14 ″
″	18	″	″	19	″	14 ″
″	19	″	″	27	″	14,7 ″
″	27	″	″	1	Augustus	14 ″
″	1	Augustus	″	5	″	12 ″
″	4	″	″	6	″	11,5 ″
″	6	″	″	7	″	11 ″
″	7	″	″	8	″	11 ″
″	8	″	″	9	″	11 ″
″	10	″	″	13	″	12,7 ″
″	13	″	″	14	″	12,5 ″
″	14	″	″	16	″	12,5 ″
″	16	″	″	18	″	12,5 ″
″	18	″	″	20	″	12,5 ″
″	20	″	″	24	″	12,5 ″
″	24	″	″	28	″	12 ″
″	28	″	″	29	″	11,5 ″

Uit deze cijfers volgt, dat de kleikolom, waardoor heen, gelijk in het vorige opstel (bl. 322) gezegd is, reeds gedurende 6 dagen vóór deze proef begon, water getogen was, eerst op den 7 Augustus, dus 68 dagen nadat zij in de buis was gebracht, hare grootste dichtheid had bereikt, d. i. die waarbij zij in de 24 uren 11 millim. water doorliet. Wel is waar wijst de tafel aan, dat op 10—13 Augustus de doorgetogen hoeveelheid water wederom iets grooter is geweest, doch dit verklaart zich uit de omstandigheid, dat juist op den 10den Augustus de waterkolom in de buis boven de klei weder op het 0-punt is gebracht en derhalve de drukking daardoor iets grooter dan op de onmiddellijk voorafgaande dagen was. Men mag derhalve wel aannemen dat van 1 Augustus tot 29 Augustus, dus gedurende de laatste 4 weken der proefneming, de

doordringbaarheid der klei onveranderd is gebleven. Tevens echter bewijst de proefneming, welke zich in haar geheel over nagenoeg drie maanden heeft uitgestrekt, dat tot het vaststellen van den graad van doordringbaarheid van klei in den toestand waarin deze geacht kan worden zich in den bodem te bevinden, de doorstrooming van het water gedurende eenen zeer geruimen tijd moet worden voortgezet, daar de vermindering der hoeveelheid van het in denzelfden tijd doorgelaten water, die aanvankelijk tamelijk snel plaats grijpt, later al geringer en geringer wordt, totdat eindelijk het punt bereikt is, waar die vermindering, ook na vele dagen waarnemings, blijkbaar geheel opgehouden heeft en de hoeveelheid van het dagelijks, onder gelijke drukking door de klei doorgetogen water constant is geworden.

Indien men, de dagen als abscissen en de hoogten waartoe het water dagelijks steeg als ordinaten bezigende, den geheelen gang van de allengs afnemende doordringbaarheid der klei graphisch voorstelt, dan verkrijgt men een kromme lijn, die aanvankelijk snel afdaalt, om later dit al minder en minder te doen en ten slotte als eene (behoudens kleine onregelmatigheden) rechte horizontale lijn te eindigen.

Tweede Proef.

Enkel zand.

In de plaats der vorige, klei bevattende buis, werd eene, op de vroeger (Dl. XI bl. 312) beschreven wijze, met nat zand gevulde van onderen 18,8 en van boven 18,01 millim. in middellijn hebbende glazen buis, desgelijks in vertikale stelling, met den toestel verbonden. Boven deze buis was een tweede die 16,5 millim. wijd was geplaatst, om als maatbuis voor het opstijgende water te dienen. Beiden waren door een korte caoutchoucbuis aan elkander verbonden. De hoogte der zandkolom bedroeg bij den aanvang $1^{m},463$; de drukking tegen hare ondervlakte 5^{m}; verminderd met de hoogte der zandkolom en van het tot aan het 0-punt in de tweede buis staande water bedroeg zij $3^{m},12$, bij het begin van elke stijging.

Daar het water veel sneller door het zand dringt dan door de klei, zoo werd niet de stijging in 24 uren gemeten, maar in minuten. Wanneer dus de doorstrooming eenigen tijd had plaats gehad, gedurende welken de hoogte der waterkolom boven 0 herhaaldelijk werd opgeteekend, werd met een pipet het water verwijderd, totdat dit weder op 0 stond. Uit deze gegevens werd vervolgens de snelheid der doorstrooming per minuut berekend. Gedurende het overige van den dag stroomde het water vrijelijk door, zoodat derhalve gedurende 19 dagen, d. i. zoolang als de proef is voortgezet, de zandkolom door water doorstroomd is. Alleen de 9de September, die op een Zondag viel, maakt daarop eene uitzondering. Toen werd de kraan van den toestel gesloten, om te beletten dat het water overstroomde. Daaraan mag wel worden toegeschreven dat den volgenden dag toen de kraan weder geopend was, de aanvankelijke snelheid van de stijging van het water merkelijk geringer dan vroeger en later was.

Aan het einde der proef bleek, dat de hoogte der zandkolom 1m,450 bedroeg, d. i. 13 millim. minder dan in het begin. Er had derhalve ook hier eene contractie van de geheele kolom zand plaats, beantwoordende aan hare allengs verminderende doordringbaarheid. Die contractie bedroeg ongeveer het dubbele der kleikolom, in de vorige proef.

	Tijd van den dag.	Hoogte van het water in de maatbuis, in millim.	Hoogte van de drukkende waterkolom in meters.	Verloopen tijd in minuten.	Gemiddelde stijging van het water in 1 minuut.
	uur. min.				
2 September	11–14	0	3,120		
	11–46	500	2,620	32	15,7 millim.
〃 〃	2–22	0	3,120		
	3–10	500	2,620	48	10,2 〃
3 〃	10–0	0	3,120		
	1–7	500	2,620	187	2,68 〃

	Tijd van den dag.	Hoogte van het water in de maat buis, in millim.	Hoogte van de drukkende water-kolom in meters.	Verloopen tijd in minuten.	Gemiddelde stijging van het water in 1 minuut.
	uur. min.				
5 September	11–30	0	3,120		
	2–0	250	2,870	150	1,67 millim.
	4–20	460	2,660	290	1,59 〃
6 〃	11–18	0	3,120		
	11–39	100	3,020	21	4,70 〃
	12–6	148	2,972	48	3,19 〃
	1–30	290	2,830	132	2,20 〃
	4–20	500	2,620	302	1,65 〃
7 〃	12–24	0	3,120		
	2–33	250	2,870	129	1,98 〃
	3–30	340	2,780	186	1,83 〃
8 〃	11–5	0	3,120		
	12–5	88	3,032	60	1,46 〃
	2–20	261	2,859	195	1,34 〃
	3–48	365	2,755	283	1.29 〃
	4–50	433	2,687	345	1,26 〃
10 〃	11–42	0	3,120		
	12–22	31	3,089	40	0,78 〃
	3–5	160	2,960	203	0,79 〃
	4–20	230	2,890	278	0,83 〃

	Tijd van den dag.	Hoogte van het water in de maatbuis, in millim.	Hoogte van de drukkende waterkolom in meters.	Verloopen tijd in minuten.	Gemiddelde stijging van het water in 1 minuut.
	uur. min.				
11 September	10–30	0	3,120		
	11–0	39	3,081	30	1.30 millim.
	12–10	130	2,990	100	1,30 〃
	1–34	210	2,910	184	1,14 〃
	4–27	308	2,812	357	0,87 〃
12 〃	8–55	0	3,120		
	10–22	97	3,023	87	1,12 〃
	11–0	132	2,988	125	1,06 〃
	12–30	204	2,916	215	0,95 〃
	2–10	256	2,864	315	0,80 〃
	4–12	300	2,820	437	0,70 〃
13 〃	10–36	0	3,120		
	12–30	132	2,988	114	1,16 〃
	1–53	195	2,925	197	0,99 〃
	4–33	348	2,772	357	0,95 〃
14 〃	10–37	0	3,120		
	12–35	147	2,973	118	1,25 〃
	1–58	233	2,887	201	1,15 〃
	3–36	318	2,802	299	1,07 〃
15 〃	10–40	0	3,120		
	12–16	104	3,016	96	1,08 〃
	1–34	188	2,932	174	1,08 〃
	3–6	307	2,813	266	1,11 〃

	Tijd van den dag.	Hoogte van het water in de maatbuis, in millim.	Hoogte van de drukkende waterkolom in meters.	Verloopen tijd in minuten.	Gemiddelde stijging van het water in 1 minuut.
	uur. min.				
18 September	10–30	0	3,120		
	12–9	110	3,010	99	1,11 millim.
	1–50	205	2,915	200	1,02 〃
	3–0	265	2,955	270	0,99 〃
	3–57	305	2,815	327	0,93 〃
19 〃	10–38	0	3,120		
	11–53	92	3,028	75	1,23 〃
	12–0	100	3,020	82	1,22 〃
	1–18	178	2,942	160	1,11 〃
	2–5	223	2,897	207	1,08 〃
	2–34	250	2,870	236	1,06 〃
	3–37	301	2,819	299	1,01 〃
20 〃	10–11	0	3,120		
	11–28	100	3,020	77	1,30 〃
	12–10	151	2,969	119	1,27 〃
	1–30	228	2,892	199	1,15 〃
	1–52	250	2,870	231	1,08 〃
	2–35	286	2,834	264	1,09 〃
21 〃	8–30	0	3,120		
	10–15	110	3,010	105	1,05 〃
	12–16	228	2,892	226	1,01 〃
	12–41	250	2,870	251	1,00 〃
	2–52	345	2,775	382	0,91 〃

De proef werd hier afgebroken, daar het scheen dat de zandkolom in de laatste 4 dagen niet in dichtheid was toegenomen.

Uit de cijfers in de laatste kolom blijkt dat ook hier onregelmatigheden in den gang der vermindering van de snelheid der doorstrooming zijn, waarvan zich moeielijk rekenschap laat geven. Alleen de plotselinge vermindering op I° September laat zich, gelijk boven gezegd is, eenigermate verklaren.

De temperatuur der lucht in den tamelijk duisteren gang met zeer dikke muren, waarin de toestel geplaatst was, wisselde gedurende de dagen der proefneming van 14°,6 tot 17°,6, die van het water van 14°,7 tot 17°,3; zonder dat er eenig merkbaar verband tusschen dit trouwens geringe verschil en de snelheid der doorstrooming kon worden bespeurd.

Duidelijk is de aanmerkelijke invloed van verschil in hoogte der drukkende waterkolom. Wanneer men de cijfers der gemiddelde snelheid in minuten in elkander deelt, dan verkrijgt men nagenoeg gelijke quotienten als door de daaraan beantwoordende drukhoogten in elkander te deelen. De snelheid neemt derhalve in gelijke verhouding met de drukhoogte toe, zoodat men b. v. mag aannemen dat bij eene dubbele hoogte der drukkende waterkolom de snelheid der doorstrooming ook ongeveer verdubbeld zal zijn.

Eene nauwkeurige vergelijking tusschen de in de vorige proef gebruikte kleikolom en de in deze gebezigde zandkolom, ten aanzien der doordringbaarheid van beide stoffen voor water, is niet mogelijk, omdat de zandkolom $0^m,380$ hooger was dan de kleikolom en daarentegen de hoogte der drukkende waterkolom in de tweede proef bij den aanvang $0^m,680$ geringer was. Beide verschillen werken in gelijken zin, d. i. zij verminderen de snelheden, waarmede het water door het zand is getogen in verhouding tot de snelheid der doorstrooming door de klei. De volgende cijfers mogen derhalve als minima beschouwd worden.

Uit de tafel op bl. 237—240 blijkt, dat, toen de klei hare grootste dichtheid had bereikt, in 24 uren het water ongeveer 12 millim. boven hare oppervlakte steeg. Nu leeren de waarnemingen dat gedurende de laatste dagen der proefneming met de zandkolom er in den beginne ongeveer 1,2 millimeter water per minuut

daar doorheen toog, derhalve 12 millimeter in 10 minuten. Daar nu 24 uren 1440 minuten tellen, zoo was de snelheid waarmede het water door het gebruikte zeer fijne zand drong minstens 144 maal grooter dan die voor de gebruikte klei. Natuurlijk is dit slechts een benaderingsresultaat, dat meer als een voorbeeld dan als eene eenigermate juiste uitdrukking der betrekkelijke doordringbaarheid van zand en van klei kan beschouwd worden. Voor elke andere soort van zand en van klei zal men eene andere verhouding vinden.

Derde Proef.

Enkel zand.

Dezelfde buis met zand, die voor de tweede proef heeft gediend, en waardoor het water dus reeds gedurende 19 dagen had gestroomd, werd nu horizontaal gelegd en verbonden met het benedeneinde van den buizentoestel welke de drukkende waterkolom bevat, terwijl aan het andere einde der zandbuis een vertikaal gestelde maatbuis van gelijke wijdte met deze in verband werd gebracht. De drukhoogte boven het 0-punt bij den aanvang van elke proefneming bedroeg 4^{m},820, derhalve 1^{m},700 meer dan bij de vorige reeks van proeven.

	Tijd van den dag.	Hoogte van het water in de maatbuis, in millim.	Hoogte van de drukkende waterkolom in meters.	Verloopen tijd in minuten.	Gemiddelde stijging van het water in 1 minuut.
	uur. min.				
25 September	10–42	0	4,820		
	11–12	215	4,605	30	7,2 millim.
	12–12	540	4,280	90	6,0 〃
	1–12	805	4,015	150	5,2 〃
	1–42	910	3,910	180	5,1 〃
	2–12	1020	3,800	210	4,9 〃

	Tijd van den dag.	Hoogte van het water in de maatbuis, in millim.	Hoogte van de drukkende waterkolom in meters.	Verloopen tijd in minuten.	Gemiddelde stijging van het water in 1 minuut.
	uur min.				
26 September	11–33	0	4,820		
	12– 3	155	4,665	30	5,2 millim.
	12–33	290	4,530	60	4,8 〃
	1–33	525	4,295	120	4,4 〃
	2–33	715	4,105	180	4,0 〃
	3– 3	800	4,020	210	3,8 〃
27 〃	11– 3	0	4,820		
	11–33	110	4,710	30	3,7 〃
	12– 3	210	4,610	60	3,5 〃
	1– 3	390	4,430	120	3,3 〃
	2– 3	560	4,260	180	3,1 〃
	3– 3	700	4,120	240	2,9 〃
28 〃	8–55	0	4,820		
	10–25	295	4,525	90	3,3 〃
	11–25	465	4,355	150	3,1 〃
	11–55	525	4,295	180	2,9 〃
	1–30	735	4,085	275	2,7 〃
	2–45	870	3,950	350	2,5 〃
	2–55	890	3,930	360	2,5 〃
29 〃	9–12	0	4,820		
	10–12	165	4,655	60	2,8 〃
	11–12	300	4,520	120	2,5 〃
	12–12	410	4.410	180	2,3 〃
	1–42	535	4,395	270	2,0 〃
	2–42	620	4,200	330	1,9 〃

	Tijd van den dag.	Hoogte van het water in de maatbuis, in millim.	Hoogte van de drukkende waterkolom in meters.	Verloopen tijd in minuten.	Gemiddelde stijging van het water in 1 minuut.
	uur. min.				
1 October	11–0	0	4,820		
	12–0	110	4,710	60	1,9 millim.
	2–0	310	4,510	180	1,7 〃
	3–0	395	4,412	240	1,6 〃
2 〃	10–40	0	4,820		
	11–40	70	4,750	60	1,2 〃
	1–40	205	4,615	180	1,1 〃
	2–40	260	4,560	240	1,1 〃
	3–5	285	4,435	265	1,1 〃
3 〃	10–30	0	4,820		
	11–30	43	4,777	60	0,7 〃
	12–0	70	4,750	90	0,7 〃
	2–30	197	4,623	180	1,1 〃
	3–0	220	4,600	210	1,1 〃
4 〃	11–0	685	4,135	1410	0,49 〃
	12–0	700	4,120	1470	0,48 〃
5 〃	11–0	920	3 900	2850	0,32 〃
	12–0	935	3,885	2910	0,32 〃
	3–0	960	3,860	3090	0,31 〃
6 〃	11–0	1107	3,713	4290	0,26 〃
	11–30	0	4,820		
	12–0	14	4,806	30	0,47 〃
	12–30	28	4,792	60	0,46 〃
	2–30	70	4,750	180	0,39 〃
	3–0	80	4,740	210	0,38 〃

Daar de vertraging der doorstrooming reeds zeer aanmerkelijk was, zoo werd besloten niet voort te gaan met deze in minuten te meten, maar alleen dagelijks, op een vast uur, het water in de maatbuis op 0 te brengen en de hoogte waartoe het water gedurende de volgende 24 uren steeg te bepalen. Daar echter voor het op het 0-punt brengen ongeveer een kwartiers uurs of 15 minuten gevorderd werd, zoo bedroeg de na elke bepaling verloopen tijd niet volle 24 uren of 1440 minuten, maar 1425 minuten.

Met deze wijze van bepaling werd eerst begonnen op den 15[den] October, nadat de doorstrooming van het water door het zand in den tusschentijd voortdurend was onderhouden.

Van	15	October	tot	16	October	235	millim.
〃	16	〃	〃	17	〃	225	〃
〃	17	〃	〃	18	〃	220	〃
〃	18	〃	〃	19	〃	200	〃
〃	19	〃	〃	20	〃	194	〃
〃	20	〃	〃	21	〃	185	〃
〃	21	〃	〃	22	〃	183	〃
〃	22	〃	〃	23	〃	178	〃
〃	23	〃	〃	24	〃	175	〃
〃	24	〃	〃	25	〃	165	〃
〃	25	〃	〃	26	〃	160	〃
〃	26	〃	〃	27	〃	168	〃
〃	27	〃	〃	28	〃	158	〃
〃	28	〃	〃	29	〃	155	〃
〃	29	〃	〃	30	〃	150	〃
〃	30	〃	〃	31	〃	152	〃
〃	31	〃	〃	1	November	154	〃
〃	1	November	〃	2	〃	150	〃
〃	2	〃	〃	3	〃	146	〃
〃	3	〃	〃	4	〃	144	〃
〃	4	〃	〃	5	〃	142	〃
〃	5	〃	〃	6	〃	170	〃
〃	6	〃	〃	7	〃	180	〃
〃	7	〃	〃	8	〃	190	〃
〃	8	〃	〃	9	〃	210	〃

Van	9 November	tot	10 November	156	millim.
〃	10 〃	〃	11 〃	160	〃
〃	11 〃	〃	12 〃	158	〃
〃	12 〃	〃	13 〃	164	〃

Daar de snelheid der doorstrooming, in stede van in den loop der laatste dagen nog te verminderen, wederom iets toegenomen was, zoo mag men het er voor houden dat deze ook verder, met zekere wankelingen, waarvan zich geen rekenschap laat geven, ongeveer dezelfde zoude blijven.

Wanneer men nu de uitkomsten dezer proef vergelijkt met die der tweede (bl. 240), waarin dezelfde zandkolom zich in vertikale stelling bevond, dan vallen aanstonds twee zaken in het oog, waarvan de vermeerderde drukking van de waterkolom alleen bezwaarlijk rekenschap kan geven. Vooreerst is de aanvankelijke snelheid der doorstrooming merkelijk grooter dan dat zij alleen daardoor zou kunnen verklaard worden. In de tweede plaats heeft er, terwijl het scheen als of de zandkolom in de vertikale stelling reeds haar punt van grootste dichtheid had bereikt, nadat deze in horizontale stelling was gebracht nog eene gedurende omstreeks 42 dagen voortgaande vertraging van de doorstrooming plaats. Op het einde der tweede proef bedroeg de snelheid der opstijging van het water in de maatbuis ongeveer 1 millim. per minuut; tegen het einde der derde proef was de snelheid verminderd tot 142 millim. in 1425 minuten, dus 1 millim. in ongeveer 10 minuten; en dat in weerwil van de meerde hoogte der drukkende waterkolom.

Dit kan alleen worden verklaard uit eene nog voortgaande vernauwing der capillaire ruimten tusschen de zandkorrels, nadat de vertikale stelling met de horizontale is verwisseld. Men kan zich de zaak op de volgende wijze voorstellen. De kleine zandkorreltjes, die zich te midden van een waterstroom bevinden, zijn bewegelijk. Deels door den stroom zelven, deels uithoofde hunner onregelmatige gedaante, tengevolge waarvan het zwaartepunt van elk korreltje zich niet juist in het midden bevindt, maken de korreltjes wentelende bewegingen, totdat zij zich zoo geplaatst hebben, dat zij, in verhouding tot de stelling waarin de geheele massa ten opzichte der aarde geplaatst is, in een zekeren even-

wichtstoestand geraakt zijn, waarbij de korreltjes elkander wederkeerig zooveel mogelijk steunen. Zij bevinden zich dan echter nog daarom niet in eenen onveranderlijken toestand, waarin de capillaire ruimten haar minimum en bij gevolg de geheele massa haar maximum van dichtheid bereikt heeft. Zoodra de zandkolom in eene andere stelling wordt gebracht, b. v. van de vertikale in de horizontale, zal de langzaam wentelende beweging der korreltjes onder den invloed van den waterstroom op nieuw aanvangen, en elk hunner zal naar eenen nieuwen evenwichtstoestand streven. In het algemeen zal dit tengevolge hebben dat de korreltjes zich nog dichter aaneen sluiten, dat de capillaire ruimten nog kleiner worden en derhalve de hoeveelheid van het in gelijke tijden doorzijgend water afneemt, totdat eindelijk al de korreltjes zich zoo geplaatst hebben, dat zij in hun geheel de geringst mogelijke ruimte innemen, die tevens aan het maximum van dichtheid beantwoordt.

Hiermede zal dan ook eene verdere algemeene contractie van de zandkolom moeten gepaard gaan. Werkelijk bleek dan ook dat de lengte der zandkolom, die (zie bl. 236), in den beginne $1^m,463$ had bedragen en op het einde der 2^{de} proef tot $1^m,450$ gedaald was, op het einde der 3^{de} proef nog slechts $1^m,447$ bedroeg.

Zijn deze beschouwingen juist, dan volgt daaruit, dat men bij proeven die ten doel hebben dit maximum van dichtheid te bepalen, — hetgeen met andere woorden zeggen wil de dichtheid der lagen, zooals deze werkelijk in eenen lang door water doorstroomden bodem voorkomen, in maat uit te drukken, — achtereenvolgens het water in minstens twee richtingen, de vertikale en de horizontale er doorheen moet laten stroomen en dit een zeer geruimen tijd voortzetten. Dit is dan ook bij de volgende proeven in het oog gehouden. Aan de met nat zand op vroeger (Dl. XI, blz. 312) beschreven wijze gevulde buizen werd door middel van een caoutchoucring een tweede dergelijke, 1,5 meter lange, buis verbonden en beide buizen in vertikale stelling opgehangen, in dier voege, dat zich de met zand gevulde buis van onderen bevond. Nu werd de bovenste buis vol water gegoten en dit dagelijks aangevuld, naarmate het doorliep, hetgeen in den beginne zeer snel, later al langzamer en langzamer ge-

schiedde. De voor de volgende proeven gebruikte met zand gevulde buizen zijn alle, alvorens met den toestel in horizontale stelling verbonden te worden, gedurende 4 tot 6 weken aldus aan eene doorstrooming in vertikale richting blootgesteld geweest.

Nog iets anders mag met waarschijnlijkheid uit bovenstaande beschouwingen worden afgeleid. Indien namelijk de wentelende beweging der zandkorrels de oorzaak is van het allengs dichter worden der geheele zandmassa, dan mag men aannemen, dat kleine aan de met zand gevulde buizen aangebrachte schokken, die zich aan de zandkorrels mededeelen en daardoor hunne verplaatsing verhaasten, ook op de snelheid der doorstrooming invloed uitoefenen. Nu zijn de proeven genomen in een gang met een houten vloer, waarop de buizen, gesteund door daaronder geplaatste houten blokken rustten. Dagelijks liepen verscheidene personen op dien gang heen en weder, want deze geeft toegang tot het zoötomisch laboratorium, en zoo acht ik het zeer waarschijnlijk, dat een gedeelte der onregelmatigheden, welke in de dan eens iets versnelde, dan weder vertraagde doorstrooming zijn waargenomen, aan genoemde omstandigheden moeten worden toegeschreven. Dit kan wel is waar geen invloed hebben op het eind-resultaat; maar mocht men later met betere toestellen dergelijke proeven willen herhalen en daarbij tevens het geheele beloop van het allengs dichter worden van het zand bestudeeren, dan zal het noodig zijn de buizen op een steenen vloer te doen steunen, om daardoor elke beweging, die van buiten zoude kunnen worden medegedeeld, te voorkomen.

Vierde proef.

Enkel zand.

Een glazen buis, waarvan de wijdte aan het vooreinde 18,9 en aan het achtereinde 19,5 millim. bedroeg, gevuld met een zandkolom, waardoor reeds zes weken lang water op boven (blz. 247) gezegde wijze in vertikale richting gestroomd had, werd nu door een caoutchoucbuis verbonden aan de vorige. De lengte der zandkolom in deze tweede buis, gemeten aan het einde der

proef, derhalve toen deze geacht mocht worden in den toestand van grootste dichtheid te zijn gekomen, bedroeg $1^m,507$. Hierbij de lengte voegende der zandkolom in de eerste buis, $1^m,447$, verkrijgt men voor de geheele lengte der horizontaal gelegen zandkolom, waardoor het water heen toog, $2^m,954$.

De hoogte van de drukkenden waterkolom boven het 0-punt, was, evenals in de vorige proef, $4^m,820$. De meting geschiedde als bij deze:

						Stijging van het water in 24 uren.	
Van	13	November	tot	14	November	115	millim.
〃	14	〃	〃	15	〃	75	〃
〃	15	〃	〃	16	〃	65	〃
〃	16	〃	〃	17	〃	63	〃
〃	17	〃	〃	18	〃	56	〃
〃	18	〃	〃	19	〃	54	〃
〃	19	〃	〃	20	〃	53	〃
〃	20	〃	〃	21	〃	53	〃
〃	21	〃	〃	22	〃	53	〃
〃	22	〃	〃	23	〃	55	〃

Tusschen 19 en 20 November, derhalve 6 dagen na het begin der proef, was het maximum van dichtheid bereikt. Er ging door de geheele zandkolom, welker lengte iets meer dan verdubbeld was, nog slechts ongeveer $^1/_3$ van de hoeveelheid water, die door de enkele stroomde.

Vijfde proef.

Enkel zand.

Aan de beide zandkolommen der vorige proef werd een derde toegevoegd, die ook vooraf, gedurende zes weken in vertikale stelling, door water doorstroomd was. De wijdte der buis of de doormeter der zandkolom bedroeg aan het vooreinde 19,9, aan het achtereinde 21,6 millim., hare lengte op het einde

der proef $1^m,451$, zoodat dus de gezamenlijke lengte der drie zandkolommen $4^m,405$ bedroeg

						Stijging van het water in 24 uren.
Van	23	November	tot	24	November	50 millim.
〃	24	〃	〃	25	〃	54 〃
〃	25	〃	〃	26	〃	54 〃
〃	26	〃	〃	27	〃	54 〃
〃	27	〃	〃	28	〃	52 〃
〃	28	〃	〃	29	〃	56 〃
〃	29	〃	〃	30	〃	55 〃

Het bleek dus dat de aanvoeging eener derde zandkolom nagenoeg volstrekt geen invloed had op de hoeveelheid van het in gelijke tijden, bij gelijke drukking, door het zand stroomende water. Dit is des te opvallender, omdat de wijdte der derde buis iets grooter dan die der beide vorige was. Toch zullen wij beneden zien dat dit nog geen recht geeft tot het besluit, dat bij verdere verlenging der zandkolom de snelheid der doorstrooming dezelfde blijft.

Zesde proef.

Zand en klei.

Om te beproeven, hoe groot de invloed is der vertraging, die het water ondergaan heeft na eerst door een zandlaag van $4^m,405$ lengte getogen te zijn, op de snelheid waarmede het vervolgens door eene kleilaag naar boven dringt, werd dezelfde met klei gevulde buis, die voor de eerste proef heeft gediend, (bl. 233) in vertikale stelling verbonden aan het einde der derde zandbuis. De drukking was derhalve in den aanvang der proef dezelfde als bij de eerste.

Daar het zich echter voorzien liet dat de stijging van het water in de ruimte der buis boven de kleikolom slechts gering en bij gevolg het daardoor veroorzaakte verschil van drukking van weinig beteekenis zoude zijn, zoo werd alleen dagelijks op

denzelfden tijd de hoogte van het water in de buis boven het aangenomen 0-punt gemeten en opgeteekend, zonder dit water telkens weder te verwijderen, gelijk in de eerste proef is geschied.

	Stand van het water boven het nulpunt in millimeters.	Stijging van het water in 24 uren.
30 November	0	
1 December	2,5	2,5 millimeter
3 〃	13,0	5,7 〃
4 〃	18,0	5,0 〃
5 〃	23,0	5,0 〃
6 〃	29,5	6,5 〃
7 〃	36,0	6,5 〃
8 〃	41,0	5,0 〃
10 〃	52,0	5,5 〃
11 〃	57,5	5,5 〃

De hoogte der drukkende waterkolom, die bij het begin der proef $3^m,800$ bedroeg, was bij het einde verminderd tot $3^m,743$. Gedurende de eerste 24 uren bedroeg, gelijk men ziet, de stijging niet meer dan de helft van die der volgende dagen. Het is alsof het water bij den aanvang der doorstrooming een zekeren weerstand te overwinnen had die, toen eenmaal de doorstrooming regelmatig plaats had, niet meer bestond.

Wanneer men het resultaat vergelijkt met dat in de eerste proef verkregen (blz. 235), toen dezelfde kleikolom aan de rechtstreeksche, onverminderde drukking derzelfde waterkolom was blootgesteld, dan blijkt dat door de tusschenvoeging van 4,405 meters zand de snelheid van den door de klei opstijgenden waterstroom tot op ongeveer de helft was verminderd.

Zevende Proef.

Enkel zand.

Nadat de buis met klei weder verwijderd was, werd nogmaals een met zand gevulde buis aan de reeds met den toestel verbonden drie zandbuizen toegevoegd. Evenals de beide vorigen was ook deze vooraf verscheidene weken lang aan een doorloopenden vertikalen waterstroom blootgesteld geweest. De wijdte der buis, derhalve de breedte der nieuwe zandkolom bedroeg aan het vooreinde 18,6, aan het achtereinde 18,5 millim., hare lengte op het einde der proef $1^m,511$, zoodat derhalve de geheele lengte der vier zandkolommen te samen $5^m,916$ bedroeg. De hoogte der drukkende waterkolom was wederom $4^m,820$.

						Stijging van het water in 24 uren.	
Van	11	December	tot	12	December	95	millim.
〃	12	〃	〃	13	〃	54	〃
〃	13	〃	〃	14	〃	54	〃
〃	14	〃	〃	15	〃	37	〃
〃	15	〃	〃	16	〃	37	〃
〃	16	〃	〃	17	〃	36	〃
〃	17	〃	〃	18	〃	38	〃
〃	18	〃	〃	19	〃	38	〃
〃	19	〃	〃	20	〃	35	〃
〃	20	〃	〃	21	〃	32	〃
〃	21	〃	〃	22	〃	30	〃
〃	22	〃	〃	23	〃	28	〃
〃	23	〃	〃	24	〃	26	〃
〃	24	〃	〃	25	〃	26	〃
〃	25	〃	〃	26	〃	25	〃
〃	26	〃	〃	27	〃	24	〃
〃	27	〃	〃	28	〃	24	〃
〃	28	〃	〃	29	〃	22	〃
〃	29	〃	〃	30	〃	26	〃
〃	30	〃	〃	31	〃	26	〃
〃	31	〃	〃	1	Januari	28	〃
〃	1	Januari	〃	2	〃	28	〃
〃	2	〃	〃	3	〃	25	〃

						Stijging van het water in 24 uren.	
Van	3	Januari	tot	4	Januari	26	millim.
〃	4	〃	〃	5	〃	26	〃
〃	5	〃	〃	6	〃	25	〃
〃	6	〃	〃	7	〃	25	〃
〃	7	〃	〃	8	〃	23	〃
〃	8	〃	〃	9	〃	24	〃
〃	9	〃	〃	10	〃	24	〃
〃	10	〃	〃	11	〃	23	〃
〃	11	〃	〃	12	〃	25	〃
〃	12	〃	〃	13	〃	24	〃
〃	13	〃	〃	14	〃	23	〃
〃	14	〃	〃	15	〃	24	〃
〃	15	〃	〃	16	〃	23	〃
〃	16	〃	〃	17	〃	24	〃
〃	17	〃	〃	18	〃	23	〃
〃	18	〃	〃	19	〃	25	〃

Terwijl het scheen te blijken uit de 5de proef (bl. 250), dat door vermeerdering der lengte van de zandkolom van 2^{m},405 tot 4^{m},405, de hoeveelheid van het in gelijke tijden doorstroomend water dezelfde bleef, treedt in deze proef, nu de zandkolom tot 5^{m},916 verlengd is, eene zeer in het oog loopende vermindering op, zoodat, toen het zand in de laatste buis zijne grootste dichtheid bereikt had, die hoeveelheid tot op minder dan de helft gedaald was. Het geringe verschil in doormeter der derde en der vierde buis kan daarvan wel tot op zekere hoogte, maar bezwaarlijk geheel rekenschap geven. Deze uitkomst is des te vreemder omdat, gelijk beneden blijken zal, hetzelfde zand, zonder oogenschijnlijke verandering in den toestel, later weder eene grootere permeabiliteit vertoonde.

Achtste Proef.

Zand en klei.

Op dezelfde wijze als in de zesde proef met de derde zandbuis, werd de bij deze en in de eerste proef gebruikte kleikolom

van 1m,064 hoogte met de vierde zandbuis verbonden. Daar bij de vorige proef gebleken was dat de snelheid van de doorstrooming door de zandkolom zeer verminderd was, zoo mocht men verwachten dat dit zich ook openbaren zoude in de merkelijk geringere hoogte waartoe het water dagelijks boven de oppervlakte der kleikolom zoude stijgen, vergeleken met de stijging van het water in de zesde proef, toen dit eene zandkolom, die ruim 1,5 meter korter was, vooraf had doorgestroomd.

Uit onderstaande cijfers blijkt, dat de door de meerdere lengte der zandkolom veroorzaakte vertraging werkelijk ook gedurende de eerste dagen zeer merkbaar was, maar dat later de snelheid weder is toegenomen, totdat zij slechts weinig meer verschilde van die welke het water bij de zesde proef bezat.

	Stand van het water boven het nulpunt in millimeters.	Stijging van het water in 24 uren.
19 Januari	0	
21 〃	3	1,5 millimeter
22 〃	6	3,0 〃
23 〃	9	3,0 〃
24 〃	13	4,0 〃
25 〃	17	4,0 〃
26 〃	21	4,0 〃
28 〃	29	4,0 〃
29 〃	33	4,0 〃
30 〃	37,5	4,5 〃
31 〃	41	3,5 〃
1 Februari	45	4,0 〃
2 〃	49	4,0 〃
4 〃	57	4,0 〃
5 〃	61	4,0 〃
6 〃	65,5	4,5 〃

	Stand van het water boven het nulpunt in millimeters.	Stijging van het water in 24 uren.
7 Februari	70	4,5 millimeter
8 〃	75	5,0 〃
9 〃	79	4,0 〃
11 〃	87	4,0 〃
12 〃	92	5,0 〃
13 〃	96	4,0 〃
14 〃	100	4,0 〃
15 〃	105	5,0 〃
16 〃	110	5,0 〃
19	125	5,0 〃
21 〃	135	5,0 〃
22 〃	140	5,0 〃
23 〃	145	5,0 〃
25 〃	155	5,0 〃
26 〃	160	5,0 〃

Men ziet: de dagelijksche stijging in deze proef staat tot die in de zesde proef ongeveer als 4 : 5.

Negende Proef

Deze proef moest alleen tot controle dienen, namelijk om te onderzoeken, of de graad van doordringbaarheid, welke de geheele, 5^{m},916 lange zandkolom op het einde der 7^{de} proef bezat, dezelfde was gebleven, nadat het water gedurende eenige weken bovendien door de daarmede verbonden kleikolom was gedrongen. Na verwijdering van deze was de toestel wederom geheel in denzelfden toestand als bij de 7^{de} proef gebracht.

						Stijging van het water in 24 uren.	
Van	26	Februari	tot	27	Februari	275	millim.
〃	27	〃	〃	28	〃	195	〃
〃	28	〃	〃	1	Maart	180	〃
〃	1	Maart	〃	2	〃	148	〃
〃	2	〃	〃	3	〃	175	〃
〃	3	〃	〃	4	〃	168	〃
〃	4	〃	〃	5	〃	170	〃
〃	5	〃	〃	6	〃	158	〃
〃	6	〃	〃	7	〃	145	〃
〃	7	〃	〃	8	〃	125	〃
〃	8	〃	〃	9	〃	110	〃
〃	9	〃	〃	10	〃	95	〃
〃	10	〃	〃	11	〃	90	〃
〃	11	〃	〃	12	〃	80	〃
〃	12	〃	〃	13	〃	76	〃
〃	13	〃	〃	14	〃	74	〃
〃	14	〃	〃	15	〃	67	〃
〃	15	〃	〃	16	〃	73	〃
〃	16	〃	〃	17	〃	72	〃
〃	17	〃	〃	18	〃	65	〃
〃	18	〃	〃	19	〃	61	〃
〃	19	〃	〃	20	〃	58	〃
〃	20	〃	〃	21	〃	56	〃
〃	21	〃	〃	22	〃	55	〃
〃	22	〃	〃	23	〃	54	〃
〃	23	〃	〃	24	〃	55	〃
〃	24	〃	〃	25	〃	54	〃
〃	25	〃	〃	26	〃	45	〃
〃	26	〃	〃	27	〃	44	〃
〃	27	〃	〃	28	〃	45	〃
〃	28	〃	〃	29	〃	45	〃
〃	29	〃	〃	30	〃	45	〃
〃	30	〃	〃	31	〃	45	〃
〃	31	〃	〃	1	April	44	〃
〃	1	April	〃	2	〃	44	〃
〃	2	〃	〃	3	〃	45	〃

Van	3	April	tot	4	April	45	millim.
〃	4	〃	〃	5	〃	44	〃
〃	5	〃	〃	6	〃	45	〃
〃	6	〃	〃	7	〃	45	〃
〃	7	〃	〃	8	〃	45	〃

Dat in het eerste begin der proef de doorstrooming sneller was dan op het einde der 7de proef, zoude wellicht verklaard kunnen worden door de omstandigheid dat, ten gevolge van de tijdelijke aanmerkelijke vertraging die de toevoeging der kleikolom bij de 8ste proef had teweeg gebracht, de verbindende caoutchoucbuizen sterk uitgezet waren en nu als even zoo vele zich ontspannende veeren werkten, waardoor derhalve de drukking versterkt werd. Doch deze omstandigheid kan onmogelijk verklaren waarom na zes weken tijds de zandkolom nog bijna de dubbele hoeveelheid water doorliet van die op het einde der 7de proef. Opzettelijk is deze laatste proef langer voortgezet dan strikt noodig was. Zij is eerst afgebroken toen 15 dagen lang dagelijks dezelfde hoeveelheid water door het zand toog en het derhalve duidelijk bleek, dat de dichtheid der zandkolom niet meer tot haar vroeger punt zoude terugkeeren.

Meer dan eene der vroegere proeven, leidde deze tot de overtuiging dat met den gebruikten gebrekkigen toestel onmogelijk numerische uitkomsten te verkrijgen waren, die nauwkeurig genoeg zijn, om daarop eenige zekere berekening en praktische gevolgtrekkingen te gronden.

Doch hoe onvolkomen ook, zijn de nu genomen proeven toch niet onvruchtbaar geweest. Zij hebben den weg aangeduid, dien men volgen moet om met hoop op goeden uitslag dergelijke proeven met eenen beteren toestel te herhalen. Hoe ik mij voorstel dat zulk een toestel zou behooren te worden ingericht, heb ik reeds vroeger *) gezegd. Ik voeg er nog slechts het volgende bij.

Vooreerst zoude ik aanraden niet enkel de binnenvlakte van elke buis door eene zandbekleeding op vroeger gezegde wijze

*) *Versl. en Meded.* Dl. XI, bl. 313.

ruw te maken, maar bovendien haar voor- en achtereinde van een rand te voorzien, die drie of vier millimeters naar binnen puilt, om aldus door een plaatselijke vernauwing der buis op deze punten de zand- of kleikolom beter af te sluiten en elk vrij doorloopen van het water langs den bovenkant te verhinderen.

Ten tweede zoude ik, behalve de reeds voorgestelde uit metaalgaas vervaardigde tusschenschotten, nog aanraden daarachter schijven uit een stuk spons gesneden te plaatsen. Spons heeft het voordeel van veerkrachtig te zijn en houdt reeds daardoor de zand- of kleikorreltjes bij den aan- en doordringenden waterstroom beter op hun plaats, dan metaalgaas alleen dit zoude doen.

Ten derde ben ik het volkomen eens met den heer STIELTJES, dat het raadzaam is voor de te nemen proeven buizen van b. v. drieërlei doormeter te bezigen, om na te gaan in hoeverre dit verschil invloed heeft, namelijk op de hoeveelheid water die door het zand of de klei zelve of daar buiten omheen langs de binnenvlakte der buis stroomt. Is deze echter behoorlijk ruw gemaakt, dan zal die invloed van den doormeter der buis vermoedelijk niet groot zijn, d. w. z. de hoeveelheid doorgevloeid water zal blijken in rechtstreeksche verhouding tot den inhoud der doorsnede van de gebruikte buis te staan.

Ten vierde komt het mij voor verkieslijker te zijn, het doorgevloeide water niet te laten opstijgen in een maatbuis, gelijk tot dusver geschied is, maar het op te vangen en hetzij te meten of te wegen. Dan blijft de drukking gedurende de proef even groot en vermindert niet met de toenemende hoogte der opstijgende waterkolom. Ook behoeft men het waterniveau in de maatbuis dan niet telkens weder op het nulpunt te brengen, hetgeen lastig en tijdroovend is en bovendien niet nauwkeurig, wanneer zulks niet met groote zorg geschiedt, daar het terugvloeiende water natuurlijk eenigen tijd noodig heeft, alvorens het tot het nulpunt gedaald is.

Eindelijk *ten vijfde* is het volstrekt noodig, zich bij de proef te vergewissen, dat het gebruikte zand of de klei in den buizentoestel in denzelfden staat van grootste dichtheid gekomen is,

waarin het zich ongetwijfeld ook in den bodem bevindt, althans daar waar deze niet omgewoeld is. Die staat wordt eerst bereikt na eene zeer langdurige doorstrooming, eerst in vertikale en dan in horizontale richting. Alle proeven bewijzen hoe noodig die voorzorg is. En ook dan nog zijn contrôle-proeven niet overbodig, om zich te overtuigen, dat die staat een blijvende is.

Indien echter al de genoemde voorzorgen behoorlijk worden in acht genomen, dan twijfel ik niet of het zal gelukken numerische resultaten te verkrijgen, ten aanzien van de mate van doordringbaarheid van verschillende zand- en kleisoorten, waarop de praktijk met volle vertrouwen hare berekeningen gronden kan.

Uit het voorgaande blijkt echter, dat zulke proeven veel tijd kosten en alleen onder toezicht van wetenschappelijk ontwikkelde personen kunnen worden in het werk gesteld. De vraag is dus niet misplaatst: of zich niet langs een korteren en eenvoudigeren weg de graad van permeabiliteit van eenen bodem met een voor de praktijk voldoende nauwkeurigheid laat bepalen, wanneer namelijk vooraf een voldoend aantal proeven met verschillende bodemsoorten de wetten dier permeabiliteit voor water heeft doen kennen.

Hoe kleiner de deeltjes zijn, die zekeren bodem samenstellen, des te geringer zal in het algemeen zijne doordringbaarheid zijn. Het komt er derhalve slechts op aan om de grootte der samenstellende deeltjes van zekeren bodem, waarvan men den graad van doordringbaarheid niet kent, te vergelijken bij die der deeltjes van een der bodemsoorten waarvan de proef dien graad heeft doen kennen.

Dit kan wel is waar geschieden door mikrometrische bepalingen onder het mikroskoop, maar deze methode is voor de gewone praktijk onbruikbaar.

Er moet een ander middel gezocht worden, dat in de handen van elken opzichter bruikbare resultaten levert.

Voor klei en leem is dit middel niet gemakkelijk te vinden. Slibbing en daarop volgende bezinking veroorlooft wel is waar de in water tijdelijk gesuspendeerde klei in grovere en fijnere

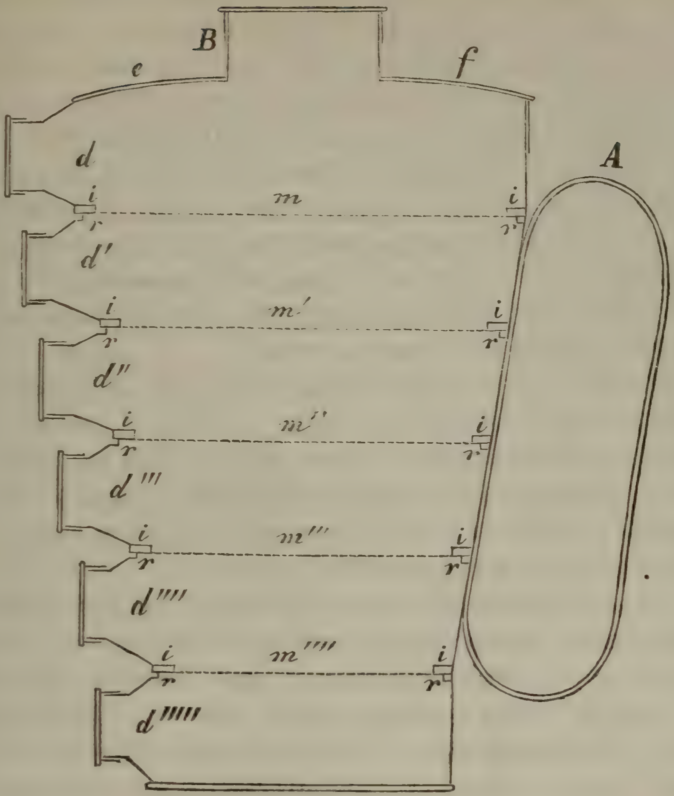
deelen te scheiden, waarvan de hoeveelheid vervolgens door weging of meting kan bepaald worden, maar een en ander vordert veel tijd en zorg in de toepassing. Het eenig middel dat mij toeschijnt in aanmerking te komen is datgene wat ik zelf vóór vele jaren bij mijn onderzoek der klei- en leemmergelsoorten in den bodem onder Amsterdam *) heb in toepassing gebracht, en dat daarin bestaat dat, onder aanwending van zekere voorzorgen, die ter aangehaalde plaats nader beschreven zijn, de snelheid waarmede de in water omgeroerde klei bezinkt, en het bovendrijvende vocht weder een bepaalden graad van doorschijnendheid verkrijgt, in tijd gemeten wordt. Natuurlijk duurt die bezinking des te langer, hoe kleiner de kleideeltjes zijn.

Voor zand daarentegen is het niet moeielijk een voor de behoeften der praktijk voldoend hulpmiddel aantewijzen. Men behoeft namelijk slechts eene zekere hoeveelheid zand achtereenvolgens door de openingen van een zeker aantal zeven waarvan de mazen al fijner en fijner worden, te laten vallen, om aldus de grootte der korrels in maat te kunnen uitdrukken. Weegt of meet men de hoeveelheid zand die door elke zeef gaat, dan heeft men al de gegevens die noodig zijn ter vergelijking met ander zand, waarvan men de permeabiliteit kent.

Zoo vond ik dat van eene afgewogen hoeveelheid van het zand dat in de bovenvermelde proeven is gebruikt, de volgende procenten door drie zeven gingen, de twee eersten van koper-, de derde van zijde-gaas. De wijdte der mazen, mikrometrisch bepaald, is er bij aangeteekend.

1ste zeef	0,640 millim. . . .	53,27	proc.
2de 〃	0,196 〃 . . .	34,28	〃
3de 〃	0,116 〃 . . .	6,84	〃
Op de bovenste zeef achterblijvend .		5,61	〃
	Te samen . . .	100,00	

*) *Verhand. v. h. Kon. Ned. Instituut*, 1ste kl. 1852, 3de Reeks, Dl. V, bl. 28.



In bovenstaande figuur is op de helft der grootte het schema eener doorsnede van het kleine werktuig geteekend, dat, naar ik meen, aan alle praktische behoeften voldoen kan. Men kan er den naam van *zandbuiler* of *zandschifter* aan geven. Het is een ronde geelkoperen bus, die benedenwaarts conisch toeloopt, met een handvat A en een deksel *e f*, voorzien van een hals B, die door een dop of stop kan gesloten worden. Door de zeven *m*—*m*'''' is de bus in gelijke vakken verdeeld. Deze zeven zijn gevat in koperen, goed sluiteude ringen *ii*, die juist elk op zijn plaats in de bus passen en daar rusten op smalle naar binnen puilende ringvormige kanten *r*. De zeefringen worden daar op vastgezet door kleine (niet afgebeelde) klemmen, zóó echter dat zij gemakkelijk kunnen worden losgemaakt, wanneer het noodig is de zeven uit de bus te nemen, om,

door klopping, de zandkorreltjes te verwijderen die in de mazen zijn achter gebleven. Daar ten gevolge van de conische gedaante van dat gedeelte der bus hetwelk de zeefringen bevat, de doormeter van dezen naar beneden toe al kleiner en kleiner wordt, zoo kunnen de diepere gemakkelijk door de voor de hoogere bestemde openingen worden doorgelaten en, is de dekplaat *e f* verwijderd en zijn de klemmen losgemaakt, dan zullen allen uit de bus vallen, zoodra deze omgekeerd wordt. Om de zeefringen, na gezuiverd te zijn, weder gemakkelijk op hun plaats te kunnen brengen, zal het noodig zijn elk van een klein knopje te voorzien om aan te vatten.

Elk vak heeft eene zijdelingsche opening ($d - d'''$), begrensd door een trechtervormigen rand, die op het punt waar deze in den binnenwand der bus overgaat volkomen glad is, zoodat er geene zandkorreltjes ergens kunnen worden teruggehouden. Aan elke opening bevindt zich een kort cylindrisch halsje, dat met een dop of stop kan gesloten worden.

Om het tijdroovende wegen te vermijden, kan men, wanneer geen groote nauwkeurigheid wordt gevorderd, het zand meten met een in kubiek-centimeters verdeeld maatglas. Worden b. v. 100 kubiek-centimeters zand door den hals B op de eerste zeefplaat *m* gebracht, dan zullen door schudding gedurende eenige minuten zich de zandkorrels van verschillende grootte verzamelen in de opeenvolgende vakken. Nu worden de zijdelingsche halsjes achtereenvolgens geopend en men laat telkens het in een der vakken bevatte zand weder in het maatglas loopen en teekent de daardoor bereikte hoogte op. Zoo leert men onmiddellijk de procentische verhouding der aldus door de zeven geschifte zandsoorten van ongelijke fijnheid kennen.

Het spreekt van zelf dat men het getal der zeven naar willekeur vergrooten kan. Bezigt men er niet meer dan 6, zoo als voor praktische doeleinden toereikend schijnt, dan zullen de openingen daarin, van boven naar beneden, b. v. ongeveer 1,5 — 1,— 0,5— 0,3— 0,15 en 0,1 millim. kunnen bedragen. Kopergaas met mazen welke ten naastenbij die grootten hebben, komt in den handel voor. Alleen voor de onderste, fijnste zeefplaat zal men zijne toevlucht tot een zijden zeef moeten

nemen, daar ik niet geloof dat kopergaas van die fijnheid in den handel verkrijgbaar is. De bepaling van de ware grootte der mazen moet natuurlijk mikrometrisch geschieden. Daar echter deze grootte, gelijk mij gebleken is, aan een en hetzelfde stuk gaas, tamelijk gelijk blijft, zoo geldt zulk eene bepaling, eenmaal gedaan, voor al de zandschifters, welker zeefplaten uit dezelfde stukken gaas genomen zijn, De daarmede gedane waarnemingen zijn derhalve onderling vergelijkbaar.

Met dit eenvoudige werktuig kan dan elk opzichter, mits zorg dragende het voor het onderzoek bestemde zand vooraf goed te drogen, voor elk soort van zand de betrekkelijke fijnheid van korrel numerisch bepalen. Uitdrukkingen als die van *fijn zand*, *zeer fijn zand*, *grof zand*, *loopzand,* geven slechts zeer onbepaalde voorstellingen en behooren, ook voor de praktijk, door waarden in cijfers uitgedrukt vervangen te worden.

25 April 1878.

NASCHRIFT.

Toen dit opstel bij de Akademie was ingediend, bestond de zandschifter nog slechts in plan. Sedert is zulk een werktuig werkelijk vervaardigd door den bekenden instrumentmaker H. OLLAND, echter onder aanbrenging van een paar wijzigingen, die het gemakkelijker te gebruiken maken.

Vooreerst is het hengsel of handvat niet ter zijde maar boven op het deksel bevestigd. Dit geeft een steviger houvast bij het op en neder schudden.

In de tweede plaats is het werktuig samengesteld uit afzonderlijke vakken die van onderen in elkander sluiten, in dier voege dat de zeefringen daardoor van zelf op hunne plaats worden gehouden, waardoor het altijd eenigzins lastige gebruik van

klemmen vermeden is. Elk vak is aan het volgende stevig verbonden door twee tegenover elkander aangebrachte bajonet-verbindingen, hetgeen veroorlooft den geheelen toestel gemakkelijk uit elkander te nemen, wanneer eene reiniging noodig mocht zijn.

De aldus ingerichte, door mij in de Vergadering van 29 Juni vertoonde toestel, voldoet zeer goed aan het voorgestelde doel. Later zal ik wellicht daarop terugkomen en dan ook eenige daarmede genomen proeven mededeelen.

10 Juni 1878. P. Harting.

INHOUD

VAN

DEEL XIII. — STUK 2.

---

bladz.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Dertiende Deel. — Derde Stuk.

AMSTERDAM.
C. G. VAN DER POST.
1878.

OVER

DE

THEORIE VAN DEN RADIOMETER

DOOR

R. A. MEES.

De afstootende werking van licht- en warmtestralen op door hen beschenen lichte voorwerpen, door CROOKES het eerst nauwkeurig bestudeerd, heeft men op zeer uiteenloopende wijze trachten te verklaren. Ik geloof echter, dat er niettegenstaande de vele fraaie experimenteele onderzoekingen van CROOKES zelven en van anderen nog geen verklaring dezer werking gevonden is, die allen bevredigt en daarom algemeen is aangenomen. Er blijft in de verschijnselen, die door licht of warmte bestraalde voorwerpen ons doen zien, altijd nog veel raadselachtigs; en dit raadselachtige vermindert wel allengs, hoe meer feiten er bekend worden, maar volkomen verklaard zijn deze verschijnselen toch nog geenszins.

Van de hypothesen en theoriën ter verklaring dezer verschijnselen opgesteld is de eerste die door CROOKES zelven in den aanvang aangenomen, waarbij wordt ondersteld, dat de lichtstralen zelve een afstootende werking op de lichte voorwerpen zouden uitoefenen *). Deze hypothese vond echter weinig aanhangers en is volkomen weêrlegd door proeven van SCHUSTER †) en later

*) CROOKES, *Phil. Mag.* (4) vol. 48, p. 94; *Phil. Trans.* (1874), vol. 164, p 527.
†) SCHUSTER, *Phil. Trans.* (1876) vol. 166, p. 715.

van CROOKES, zoodat ook laatstgenoemde door de feiten gedrongen werd zijn hypothese te laten varen. Die proeven toonden toch aan, dat de krachten, die hier optreden, geene directe werking kunnen zijn van de lichtstralen op de voorwerpen waarop zij vallen, dat het veeleer werkingen zijn tusschen de beschenen voorwerpen en de stoffen, die daarmede in aanraking zijn.

Verder heeft men in de electriciteit de oorzaak dezer verschijnselen willen zoeken *). Maar ik geloof, dat wij deze electrische hypothese, die ook slechts weinige aanhangers gevonden heeft, gerust kunnen voorbijgaan. CROOKES †) en anderen hebben door proeven en redeneeringen de onhoudbaarheid der electrische theorie genoegzaam aangetoond, en ik geloof dan ook, dat al mogen er bij de te verklaren verschijnselen somtijds electrische verschijnselen optreden, deze toch niet als oorzaak van de waargenomen werkingen kunnen beschouwd worden.

Eveneens wenschen wij niet stil te staan bij het ontwerp eener theorie van W. HANKEL §), en evenmin bij de door CHALLIS gegeven theorie **), daar deze pogingen tot verklaring zoo kort en zoo onvolledig zijn, dat wij er moeielijk een oordeel over kunnen vellen, en zij ons ook zeer weinig waarschijnlijk schijnen te zijn.

Laten wij dus deze theoriën rusten, dan blijven ons nog de volgende over: 1°. de verdampingstheorie van OSBORNE REYNOLDS en de daarmede in vele opzichten overeenstemmende emissietheorie van ZÖLLNER: 2°. de theoriën, die de werking der lichtstralen verklaren uit gasstroomingen; 3°. de theoriën van OSBORNE REYNOLDS, JOHNSTONE STONEY en anderen, die de werking verklaren met behulp van de kinetische gastheorie als een werking tusschen een vast lichaam en het daartegenaan gelegen gas, welke het gevolg is van den overgang van warmte uit het lichaam op het gas of omgekeerd.

---

*) Zie bij ZÖLLNER, POGG. *Ann.* Bd. 160, S. 162.

†) COOKES, *Phil. Mag.* (4) vol. 48, p. 90; *Phil. Trans.* (1875) vol. 165, pp. 545—6. ZÖLLNER, l. c.

§) HANKEL, *Berichte d. Leipziger Gesellsch. d. Wiss.* (1877) Bd. 29, S. 67.

**) CHALLIS, *Phil. Mag.* (5) vol. 1, p. 395 en vol. 2, p. 374.

Wij wenschen deze theoriën achtereenvolgens wat nader in oogenschouw te nemen.

1°. *De verdampingstheorie.* Voor de afstooting van een in een verdund gas geplaatst licht voorwerp door een warm lichaam en de aantrekking van dat voorwerp door een koud lichaam heeft het eerst OSBORNE REYNOLDS een rationeele en niet geheel onwaarschijnlijke verklaring gegeven *). Hij schreef de afstooting toe aan eene verdamping van water, kwikzilver of andere vloeistoffen aan die zijde van het voorwerp welke naar het warme lichaam gekeerd is, de aantrekking daarentegen aan de verdichting der genoemde stoffen in dampvorm tot vloeistof tegen de naar het koude lichaam gekeerde zijde van het voorwerp

Wij hebben hier met een verklaringsgrond te doen, die tot de mogelijke moet gerekend worden. Zeer zeker is waar, dat wanneer aan het oppervlak van een lichaam een sterke verdamping bestaat, hiervan een vermeerdering der drukking op dit oppervlak een gevolg kan zijn, dat daarentegen wanneer damp op een lichaam tot vloeistof neêrslaat, hierdoor een vermindering der drukking op het lichaam kan worden teweeggebracht. Deze gevolgtrekking van de kinetische theorie der verdamping is volkomen juist. Dat door verdamping of door verdichting van damp tot vloeistof beweging kan verkregen worden, houd ik niet voor twijfelachtig, en is door REYNOLDS en door GOVI †) proefondervindelijk aangetoond.

Deze verdampingstheorie van REYNOLDS, die later door GOVI ook op de beweging van de wieken des radiometers is toegepast, heeft bij eene oppervlakkige beschouwing veel aanlokkelijks. In een niet met den uitersten zorg vervaardigden radiometer kan allicht nog een kleine hoeveelheid van water en misschien ook van andere vluchtige stoffen, zooals vetten, voorhanden zijn, de proeven van KUNDT en WARBURG §) hebben dit voldoende aangetoond Daar voorts een radiometer gewoonlijk door middel van een kwikluchtpomp wordt ledig gepompt, kan

---

*) *Phil. Mag.* (4) vol. 48, p. 146.

†) GOVI, *Comptes rendus*, (1876 II) t. 83, p. 51.

§) KUNDT en WARBURG, POGG. *Ann.* Bd. 156, S. 198

het ook zijn, wanneer niet groote voorzorgen genomen worden om het te verhinderen, dat er kwikdamp in het vat van den radiometer komt. Het is dus a priori niet onmogelijk te achten, dat in radiometers zooveel vluchtige stoffen achterblijven, dat hare verdamping op de warme plaatsen en hare verdichting op de koele plaatsen een beweging van de wieken zouden kunnen doen ontstaan.

Dat dit echter ook met de met den uitersten zorg geconstrueerde radiometers van CROOKES het geval zou zijn, meen ik te moeten betwijfelen. En ten tweede, ook al kon hierdoor een begin van beweging in den radiometer worden voortgebracht, ik zie niet in, hoe of door deze oorzaak de beweging op den duur zou kunnen onderhouden worden. Heeft de bestraling van den radiometer toch gedurende eenigen tijd plaats gehad, dan zal al de vluchtige stof van de warmere plaatsen door verdamping zijn verdwenen en op de koudere plaatsen zijn neêrgeslagen. Een verdere verdamping en daaropvolgende verdichting kan dan niet meer bestaan, de oorzaak der beweging is dus verdwenen, en met deze moet ook de beweging zelve ophouden. En men kan niet de veronderstelling maken, dat de damp, die van de eene zijde der wieken verdampt is, terwijl deze naar de warmte-bron is toegekeerd, weder op diezelfde zijde als vloeistof nederslaat gedurende het gedeelte van de omdraaiing des radiometers dat zij van de warmtebron is afgekeerd, zoodat hierdoor de door de verdamping veroorzaakte beweegkracht bij voortduring kan blijven werken. Want ten eerste is het uiterst onwaarschijnlijk, dat die zijde gedurende den tijd, dat zij van de warmte-bron is afgekeerd, zoo snel haar hoogere temperatuur zou verliezen, dat er dan van een neêrslag van damp op die zijde sprake zou kunnen zijn, en ten tweede dat neêrslaan van damp gedurende de eene helft der omdraaiing zou een kracht in het leven roepen juist tegengesteld aan die door de verdamping gedurende de andere helft veroorzaakt, en zou dus de werking dezer laatste kracht opheffen en vernietigen. Ten derde, ook wanneer de afgestooten zijde voortdurend naar de warmte-bron is toegekeerd, zooals het geval is bij de radiometers, waarop van alle zijden warmtestralen invallen, of bij de toestelletjes van CROOKES, waarmede hij door de wringing van een draad de afstootende werking op een beschenen plaatje ge-

meten heeft, blijft bij voortduring die afstootende werking bestaan *).

Ongegrond komt mij daarentegen de bedenking voor door JOHNSTONE STONEY tegen de verdampingstheorie geopperd †). Deze zegt: „In investigating the force arising from evaporation and condensation, he (OSBORNE REYNOLDS) has overlooked the circumstance that the evaporation from the disc will keep back part of the vapour which would otherwise have reached it, and in investigating the effect of condensation he tacitly assumes that it does keep it back." Ik geloof, dat JOHNSTONE STONEY hier dwaalt. De verdamping aan het oppervlak zal het aantal moleculen, die in de éénheid van tijd daartegen aanbotsen, niet verminderen, want al mogen de aan het oppervlak ontstane dampmoleculen ook al verhinderen, dat sommige zich naar het oppervlak heen bewegende moleculen het bereiken, zij zelve zullen dan door die tegengehouden moleculen naar het oppervlak teruggeslingerd worden en in plaats van deze daartegen aankomen en er dezelfde drukking uitoefenen, die anders die tegengehouden moleculen door hare botsing zouden hebben bewerkt. Evenmin zal de verdichting van damp tegen een oppervlak bewerken, dat het aantal moleculen, hetgeen in de éénheid van tijd het oppervlak treft, grooter wordt, want wel is waar zullen die in den vloeibaren toestand overgegane dampmoleculen niet meer andere moleculen van het oppervlak kunnen terughouden, maar zij zelve zullen ook niet meer tegen het oppervlak kunnen aanbotsen, omdat zij opgehouden hebben als dampmoleculen te bestaan, en haar plaats wordt dus eenvoudig ingenomen door die andere moleculen, die zij vroeger terughielden, maar die nu vrijelijk tot het oppervlak kunnen naderen. Dus noch de verdamping noch de verdichting zal verandering brengen in het aantal moleculen, die in de éénheid van tijd het oppervlak treffen, ten minste niet in den zin zooals JOHNSTONE STONEY aanneemt. De verdamping zal dus een vermeerdering van drukking ten gevolge hebben, omdat

*) CROOKES, *Phil. Trans.* (1876) vol. 166, p. 326. *Phil. Trans.* (1875) vol. 165, p. 533.

†) JOHNSTONE STONEY, *Nature*, vol. 17, p. 261, Jan. 31, 1878.

het verdampende oppervlak nu niet alleen hoeveelheid van beweging moet mededeelen aan de daartegen aanbotsende moleculen maar tevens nog aan de nieuw ontstaande dampmoleculen. De verdichting zal daarentegen eene vermindering van drukking ten gevolge hebben, omdat het oppervlak aan de tot vloeistof overgaande dampmoleculen niet meer de hoeveelheid van beweging behoeft mede te geven, die het anders aan de het verlatende moleculen mededeelt.

De argumenten en proeven van ZÖLLNER *) zijn, geloof ik, niet in staat, de verdampingstheorie eene grootere waarschijnlijkheid te geven. Weinigen toch zullen ZÖLLNER toestemmen, dat de bewegingen in den radiometer wellicht aan de verdamping van de vaste deelen van het instrument moeten worden toegeschreven. ZÖLLNER toone eerst aan, dat in het luchtledige en bij een temperatuur, zooals die in een radiometer bestaat, de verdamping van glas, van mica, van metalen zoo sterk zij, dat daardoor de wieken des radiometers in beweging kunnen gebracht worden. Bestaat die verdamping in die mate, — dat er in het geheel geen verdamping dier stoffen optreedt, wil ik volstrekt niet beweren, — maar bestaat zij in die mate, als men ter verklaring van de verschijnselen van CROOKES genoodzaakt zou zijn aan te nemen, dan zal het ook niet zoo moeielijk zijn dit aan te toonen. Voordat dit geschied is, ben ik niet genegen zulk een hypothetische en onwaarschijnlijke oorzaaak als ZÖLLNER doet voor de verschijnselen van CROOKES aan te nemen, namelijk de verdamping van vaste lichamen of ten minste de emissie van kleine deeltjes door het oppervlak van vaste lichamen, want ZÖLLNER spreekt in de *eerste* zijner verhandelingen nog niet zooals in zijne tweede verhandeling van verdamping maar eenvoudig van emissie van kleine deeltjes, waaronder echter moeielijk iets anders dan verdamping zal kunnen worden verstaan.

Een argument tegen de emissie-hypothese van ZÖLLNER is verder ook dit, dat men door haar niet kan verklaren, waarom de draaiingssnelheid in den radiometer, wanneer men eene bepaalde verdunning van het gas overschrijdt, begint af te nemen.

---

*) ZÖLLNER, POGG. *Ann.* Bd. 160.

De door de vaste stoffen uitgezonden deeltjes moesten toch de grootste werking doen bij de grootste verdunning, vooreerst omdat dan de weêrstand tegen de beweging het geringst, ten tweede omdat dan het aantal uitgezonden deeltjes het grootst moet zijn.

Hoewel ik volstrekt niet beweren wil, dat somtijds bewegingen aan verdamping of misschien ook aan het vrij of geabsorbeerd worden van gassen moeten worden toegeschreven, kan ik toch niet aannemen, dat alle bewegingen en krachten waar genomen bij lichamen, die aan de bestraling van licht en warmte zijn blootgesteld, hierdoor te verklaren zijn, en wel voornamelijk niet hierom, omdat deze oorzaak wel een begin van beweging kan voortbrengen, maar niet voortdurend de beweging kan onderhouden.

2°. *De theoriën, die de werking der lichtstralen verklaren uit gasstroomingen.*

Door de ongelijke temperatuursverhooging der verschillende vaste deelen van den radiometer moeten ook de verschillende deelen van het in den radiometer bevatte gas zich ongelijk verwarmen, en hiervan zijn gasstroomingen het noodzakelijke gevolg. Sommigen meenen dat het deze gasstroomingen zijn, die de wieken des radiometers in beweging brengen. Zoo bijv. O. E. MEIJER. Deze zegt *): „De wieken der kleine molen, welke aan de eene zijde zwart, aan de andere wit zijn, worden door warmte- of ook lichtstraling . . . . verwarmd, en wel in ongelijke mate, de zwarte zijde sterker. Daardoor wordt ook de lucht tegen de zwarte zijde warmer, zij zet zich uit en stroomt om de randen der wieken naar de witte zijde over, waarbij zij door wrijving tegen de randen de wieken mede in beweging zet.” Deze verklaring van MEIJER komt mij hoogst onwaarschijnlijk voor. Ik zie volstrekt niet in, waarom de aan de warme zijde der wiek zich uitzettende lucht een uitweg zoekt om de randen heen naar de koelere zijde der wiek. Ik

---

*) *Die Kinetische Theorie der Gase,* Breslau 1877, S. 154. In een noot zegt MEIJER, dat zijn verklaring met die van FINKENER, waarover later, overeenstemt; het komt mij echter voor, dat die overeenstemming al een zeer geringe is, wanneer mijne opvatting van de verklaring van FINKENER, die zich niet aan overgroote duidelijkheid schuldig maakt, ten minste niet volkomen mank gaat.

zou eerder meenen, dat zij naar boven zou opstijgen, of zich aan de warme zijde van de wiek zou verwijderen; maar dat zij zich direct om de randen heen naar de koelere zijde der wiek zou begeven, komt mij hoogst onwaarschijnlijk voor, omdat toch ook die koelere zijde zich verwarmd heeft boven de temperatuur der omgeving, en dus ook aan die zijde de daartegen aan liggende lucht zich heeft uitgezet, zij het dan ook in mindere mate dan aan den warmen kant. Die uitzetting der lucht ook aan de koelere zijde moet dan toch verhinderen, dat de lucht van den warmen kant om de randen heen naar den koelen kant stroomt; en gebeurt dit niet, dan vervalt van zelve de verklaring.

Uitvoeriger heeft F. NEESEN getracht van de bewegingen in den radiometer een verklaring te geven door luchtstroomingen. *) Die werking der stroomingen vat NEESEN echter geheel anders op dan MEIJER. Terwijl bij dezen de wrijving der zich uitzettende lucht tegen de randen der wieken de beweegkracht is, zoekt NEESEN die beweegkracht in de stootkracht der tegen de wieken aankomende en daarheen gerichte luchtstroomingen. De zijde van de radiometerwiek of van het lichte voorwerp, die naar de warmte-bron is toegekeerd, verkrijgt een hoogere temperatuur dan de omgeving, de tegen die zijde aangelegen lucht zal in die verwarming deelen en daardoor opstijgen, en dit zal horizontale luchtstroomen doen ontstaan, die naar de verwarmde zijde heengericht zijn en deze voor zich uitdrijven. Als ik NEESEN goed begrijp zijn het immer de naar de plaats, waar de verwarmde lucht opstijgt, gerichte luchtstroomen, die de beweging voortbrengen, omdat zij de zich op hun weg bevindende lichte voorwerpen voor zich uitdrijven; soms echter is het bij NEESEN's proeven een der zijden der radiometerwiek, een ander maal een deel van den glazen wand des radiometers, waarvan de temperatuur het meest boven die van het in den radiometer bevatte gas stijgt, en waarheen dus de luchtstroomingen gericht zijn; maar altijd zijn het toch die in de verschillende gevallen verschillend gerichte luchtstroomen, welke volgens hem als drijvende kracht werken.

---

*) *Pogg Ann.* Bd. 156, S. 144; Bd. 160, S. 143.

Neesen krijgt op de beschreven wijze een verklaring van het feit, dat in een verdund gas een voorwerp, waarvan de eene zijde warmer is dan de omgeving, een beweging verkrijgt in een zoodanige richting, dat de warme zijde zich achteraan bevindt. Dat die verklaring echter onmogelijk de juiste kan zijn, zien wij terstond in, wanneer wij het geval beschouwen, dat de eene zijde van het lichte voorwerp zich afkoelt, door uitstraling bijvoorbeeld, onder de temperatuur van het omringende gas. Passen wij hierop neesen's redeneering toe. Van opstijgende verwarmde luchtstroomen kan hier geen sprake zijn, daar geen deel van een vast oppervlak zich verwarmd heeft boven de temperatuur van het gas. Tegen de afgekoelde zijde van het lichte voorwerp zal echter ook het gas kouder worden, en daardoor zal daar ter plaatse een neërdalende luchtstroom ontstaan. Dit zal, altijd volgens de wijze van redeneeren van neesen, aanleiding geven tot luchtstroomen, die naar de afgekoelde zijde heen gericht zijn, omdat de omringende lucht de plaats van de langs die zijde naar beneden gedaalde afgekoelde lucht zal gaan innemen. Die luchtstroomen zullen het lichte voorwerp voor zich uitdrijven, en het dus zulk een beweging mededeelen, dat de afgekoelde zijde zich achteraan bevindt. Is deze gevolgtrekking uit neesen's theorie in overeenstemming met de ervaring? Zeker niet, want volgens alle waarnemingen verkrijgt een in een ijl gas geplaatst licht voorwerp, waarvan de eene zijde onder de temperatuur van het omringende gas is afgekoeld, een beweging met de afgekoelde zijde vóóraan. De ervaring is hier dus volkomen in strijd met neesen's theorie.

Maar er is meer, waarom ik niet met neesen de directe werking der stroomingen als de kracht kan aanzien, die in een ijl gas de beweging van lichte voorwerpen bij straling veroorzaakt. Waren toch in een ijl gas de afstooting dier voorwerpen door een warmer lichaam en de aantrekking dier voorwerpen door een kouder lichaam toe te schrijven aan de drijvende kracht der ontstaande gasstroomingen, dan moesten wij dezelfde verschijnselen, doch nog in sterker mate, zien optreden in een dichter gas. In dat dichtere gas zullen toch zeker niet in mindere mate stroomingen optreden dan in het ijlere

gas, en de kracht dier stroomingen zal in het dichtere gas zeker veel grooter moeten zijn; want die kracht zal evenredig moeten zijn aan de dichtheid van het gas, omdat de massa van het zich bij die stroomingen bewegende gas aan die dichtheid evenredig is. Nu is het uit CROOKES' waarnemingen bekend, dat de verschijnselen in een gas, waarvan de dichtheid een zekere grootte overschrijdt, juist de omgekeerde zijn van die in een ijler gas; dat dan namelijk een licht voorwerp door een warmer lichaam wordt aangetrokken, door een kouder lichaam daarentegen wordt afgestooten. Dit is dus volkomen in strijd met NEESEN's theorie. NEESEN zelf heeft wel getracht van die verschillende wijze, waarop een licht voorwerp zich ten opzichte van een warmer lichaam gedraagt in een dicht en in een ijl gas, een verklaring te geven, en aan te toonen, dat de richting der luchtstroomen in beide gevallen een verschillende moet zijn, maar ik kan die verklaring niet laten gelden. Die verklaring steunt toch op een verschil in de warmte-geleiding bij verdunde en bij meer dichte gassen, dat door de proeven van KUNDT en WARBURG zou zijn aangetoond. Deze proeven *) hebben voorzeker doen zien, dat de grootte der warmte-geleiding, die boven een zekeren graad van dichtheid van het gas onafhankelijk is van de dichtheid, bij zeer ver gedreven verdunning van het gas gaat afnemen; maar de graad van dichtheid, waarbij dit afnemen der warmte-geleiding merkbaar wordt, is zeer veel lager gelegen dan de graad van dichtheid, waarbij de aantrekking door een warm lichaam in een afstooting overgaat. Bij een verdunning, waarbij de afstooting reeds zeer duidelijk kan zijn, is volgens de proeven van KUNDT en WARBURG de warmte-geleiding in het gas nog volkomen even groot als bij grootere dichtheid, waarbij een aantrekking wordt waargenomen, zoodat in een verschil in de grootte der warmte-geleiding niet de reden kan gelegen zijn van de verschillende wijze, waarop het voorwerp zich in een dichter of een ijler gas ten opzichte van een warmer lichaam gedraagt.

Ditzelfde argument is ook tegen MEIJER's verklaring aan te

---

*) KUNDT en WARBURG, POGG. *Ann.* Bd. 156, S. 177.

voeren. Hier is de wrijving van de zich uitzettende lucht tegen de randen der wiek de beweegkracht; maar die uitwendige wrijving der lucht tegen vaste lichamen neemt volgens de meening van MEIJER zelven evenredig aan de dichtheid der lucht toe en af, en moet dus bij grootere dichtheid grooter worden. Elke oorzaak nu van de beweging der wieken van den radiometer, die evenredig aan de dichtheid toeneemt, is te verwerpen, want met zulk een oorzaak is niet te rijmen het afnemen van de snelheid en ten slotte zelfs de omkeering van den zin der beweging bij het toenemen van de dichtheid van het gas.

Ofschoon ik volstrekt niet beweren wil, dat de gasstroomingen in geen geval tot de radiometerbewegingen eenigszins kunnen medewerken, geloof ik toch, dat die stroomingen niet kunnen beschouwd worden als de hoofdoorzaak van de door CROOKES ontdekte werking van licht- en warmte-stralen op in verdunde gassen geplaatste licht bewegelijke voorwerpen.

3°. *De theoriën, die de werking der lichtstralen verklaren, met behulp van de kinetische gas-theorie, uit den overgang van warmte uit een vast lichaam in het daartegenaan gelegen gas.*

Het is weder OSBORNE REYNOLDS, die het eerst op dien overgang van warmte uit een warmer oppervlak op het daartegen gelegen gas als een mogelijke oorzaak der CROOKES'sche verschijnselen de aandacht gevestigd heeft. Reeds in zijn eerste verhandeling, *) waarin hij zijn verdampings-theorie bekend maakt, wijst hij er op; en in zijn latere verhandeling †) komt deze nieuwe zienswijze bij hem zoodanig op den voorgrond, dat er van de vroegere verdampingstheorie bijna geen sprake meer is. Volgens OSBORNE REYNOLDS zal, wanneer een warmer oppervlak warmte afgeeft aan een gas, dat oppervlak van het gas een grootere drukking ondervinden; omgekeerd wanneer het oppervlak warmte opneemt van een gas, zal het van dat gas een kleinere drukking ondervinden.

---

*) *Phil. Mag.* (4) vol. 48, p. 152.
†) *Phil. Trans.* vol. 166, p. 725.

Die stelling is, geloof ik, ten deele juist, maar ook slechts ten deele Zij geldt slechts gedurende een korten tijd, wanneer een gas met een oppervlak van een andere temperatuur dan het zelf bezit, in aanraking komt, maar ook alleen slechts zoolang als nog niet is opgetreden, wat wij met CLAUSIUS willen noemen den stationnairen toestand van warmte-geleiding; en zulk een toestand zal reeds spoedig moeten optreden, tenzij gasstroomingen dit verhinderen. Wij willen echter voorloopig den invloed dier mogelijk optredende gasstroomingen buiten beschouwing laten, vooral ook omdat REYNOLDS aan die stroomingen in verdunde gassen bijna geen invloed wil toekennen. Hij toch beschouwt die stroomingen als de oorzaak der door CROOKES waargenomen verschijnselen in dichtere gassen, en daar nu de werking van licht- en warmtestralen in een ijl gas juist de omgekeerde is van die in een dichter gas, kan hij aan die stroomingen in een ijl gas slechts uiterst weinig invloed toekennen, daar zij anders in beide gevallen dezelfde werking moesten teweegbrengen. In zijn tweede verhandeling is van die stroomingen dan ook in het geheel geen sprake meer, en hij beschouwt daarin dus den toestand van het gas als een stationnairen toestand.

In zulk een stationnairen toestand van het gas zonder stroomingen zal echter mijns inziens de overgang van warmte uit een vast oppervlak in een gas hoogst waarschijnlijk geen overdruk teweeg brengen. Om dit in te zien willen wij dien stationnairen toestand eenigszins nader bespreken.

Het is het eerst CLAUSIUS geweest, die ons in zijn bekende verhandeling over de warmte-geleiding in gassen een goed inzicht gegeven heeft van hetgeen men onder den stationnairen toestand van warmte geleiding in een gas te verstaan heeft. In dien toestand heeft er wel een overgang van warmte plaats van het eene deel van het gas op het andere en van het gas op de vaste of vloeibare lichamen of omgekeerd, en die overgang van warmte is wel in de eene richting in het algemeen een andere dan in de tegengestelde richting, maar de warmtetoestand, de drukking en de dichtheid blijven voor elk deel der gasmassa voortdurend dezelfde waarden behouden, en stroo-

mingen hebben in het gas niet plaats, zoodat door elke vlakte-uitgebreidheid, waar ook in het gas geplaatst en hoe ook gericht, in denzelfden tijd in beide richtingen evenveel gasmoleculen gaan.

Clausius nu heeft aangetoond, dat in den stationnairen toestand van warmte-geleiding in een gas tusschen twee onbegrensde vlakke evenwijdige wanden van verschillende temperatuur door elke vlakte-éénheid evenwijdig aan die wanden en dus loodrecht op de richting van warmte-geleiding, in de tijdséénheid een hoeveelheid positieve bewegings-grootheid gaat, die overal in het gas dezelfde waarde heeft. Want ware dit niet het geval, dan zou er in sommige gaslagen hetzij vermeerdering hetzij vermindering van de daarin voorhanden positieve bewegings-grootheid plaats grijpen, hetgeen in strijd zou zijn met de veronderstelling, dat de toestand een stationnaire geworden is. Hetgeen clausius de door een vlak gaande positieve bewegings-grootheid noemt is de som van de positieve hoeveelheid van beweging die in positieve richting en van de negatieve hoeveelheid van beweging die in negatieve richting door het vlak gaat, wanneer men de eene richting der normaal op het vlak als de positieve, de tegengestelde richting als de negatieve beschouwt, en van de hoeveelheid van beweging der door het vlak gaande moleculen altijd de componente neemt volgens de richting dier normaal. Die som is een maat voor de drukking op het vlakte-element, en de bovengenoemde stelling van clausius kan daarom ook aldus worden uitgedrukt: de drukking op een vlak loodrecht op de richting der warmte-geleiding heeft overal in het gas dezelfde waarde.

Dat die drukking overal dezelfde is kan op het eerste gezicht vreemd schijnen. De gasmoleculen bezitten in de nabijheid van den warmen wand een grootere snelheid dan in de nabijheid van den koelen wand, en men zou daardoor geneigd zijn te meenen, dat de drukking des te grooter moet zijn, naarmate men meer tot den warmen wand nadert. Dit is echter niet het geval om de zeer eenvoudige reden, dat de dichtheid van het gas in de nabijheid van den warmen wand wegens de daar heerschende hoogere temperatuur geringer is dan op grooteren afstand van dien wand. Door een vlak evenwijdig aan en dicht

bij den warmen wand zal elke molecule, die er doorheen gaat wegens hare grootere snelheid, wel is waar een grootere hoeveelheid van beweging medevoeren, maar het aantal moleculen, dat in de éénheid van tijd door het vlak gaat, zal wegens de geringere dichtheid van het gas kleiner zijn, zoodat de geheele door de moleculen in beide richtingen door het vlak overgevoerde hoeveelheid van beweging dezelfde kan zijn voor een vlak in de nabijheid van den warmen en voor een vlak in de nabijheid van den koelen wand gelegen.

Doch CLAUSIUS vindt niet slechts de drukking overal in het gas dezelfde op een vlak loodrecht op de richting van warmtegeleiding maar op elk vlak in het gas waar het ook geplaatst en hoe het ook gericht moge zijn *). Met andere woorden hij vindt de drukking overal in het gas en in alle richtingen dezelfde.

Dat in den stationnairen toestand van warmte-geleiding even goed als in den stationnairen toestand zonder warmte-geleiding, wanneer het gas overal dezelfde temperatuur en dichtheid bezit, de drukking in alle richtingen even groot is, moet hieraan worden toegeschreven, dat terwijl in den laatstgenoemden toestand van het gas in elke richting zich een even groot aantal moleculen bewegen, en de moleculen in alle richtingen gelijke snelheden bezitten, dit voor den eerstgenoemden toestand niet het geval is In dezen toestand zullen de moleculen, die zich gelijktijdig bevinden in een laag begrensd door twee oppervlakken loodrecht op de richting van warmte-geleiding, niet alle gelijke snelheid bezitten. De moleculen, die van den warmen kant komen, hebben een iets grootere, die welke van den koelen kant komen een iets kleinere snelheid dan de moleculen, welke zich in een richting bewegen loodrecht op de richting van warmte-geleiding. Van de genoemde moleculen zullen zich een grooter aantal naar den warmen wand toe dan van den warmen wand af bewegen. Én de snelheid én het betrekkelijk aantal der moleculen, die

---

*) Door middel van de formules door CLAUSIUS in zijn verhandeling opgesteld vindt men voor de drukking in de richtingen loodrecht op die der warmte-geleiding een iets *grootere* waarde dan in de richting der warmte-geleiding. Het verschil is echter een grootheid van de orde van het kwadraat van ε, en grootheden van die orde worden door CLAUSIUS verwaarloosd.

zich gelijktijdig in een bepaalde richting bewegen, hebben hier voor de verschillende richtingen verschillende waarden, en de verdeeling van die snelheid en van dat betrekkelijk aantal over de verschillende richtingen is juist een zoodanige, dat niettegenstaande er warmte-geleiding plaats heeft de drukking toch in alle richtingen dezelfde is.

Heeft dus de warmte-geleiding in een gas plaats op de wijze, waarop dit door CLAUSIUS uit de beginselen der kinetische gastheorie is afgeleid, dan kan het vaste oppervlak, hetgeen de warmte aan het gas mededeelt, geen grootere drukking van het gas ondervinden dan het gas overal en in alle richtingen gelijkelijk uitoefent, zoodra de stationnaire toestand van warmtegeleiding is ingetreden.

CLAUSIUS heeft echter alleen nagegaan de warmte-geleiding in een gas tusschen twee onbegrensde vlakke evenwijdige wanden. Alleen voor dit bijzondere geval dus heeft hij aangetoond, dat, zoodra de stationnaire toestand is ingetreden, de druk overal in de gasmassa dezelfde zal zijn. Men zou nu kunnen meenen, dat al moge dit voor dit bijzondere geval waar zijn, het niet geldt voor het algemeene geval, waarin zich warmte door geleiding in een gas voortplant tusschen een in het gas geplaatst warmer oppervlak van willekeurigen vorm en koudere oppervlakken die hetzij behooren tot lichamen in het gas geplaatst of de binnenzijde van den wand vormen, welke het gas aan alle zijden begrenst. Ik geloof echter, dat het ook in dit meer algemeene geval waar is.

Het eenige onderscheid tusschen dit geval en het eenvoudiger geval van CLAUSIUS is toch dit, dat bij CLAUSIUS de isothermische oppervlakken platte vlakken zijn, en de richting, volgens welke de warmte-geleiding plaats heeft, overal in het gas dezelfde is, terwijl in het meer algemeene geval de isothermische oppervlakken in het algemeen gebogen oppervlakken zullen zijn, en de lijnen, volgens welke de warmte-geleiding plaats heeft, die de orthogonalen zijn dier oppervlakken, in het algemeen kromme lijnen. Evenals nu in het meer eenvoudige geval van CLAUSIUS door de onophoudelijke botsingen der moleculen eindelijk een stationnaire toestand optreedt, waarin de snelheden der moleculen in eenig volumen-element van het gas

zoodanig over de verschillende richtingen verdeeld zijn en het betrekkelijk aantal moleculen, dat zich in een bepaalde richting beweegt, zoodanig is als CLAUSIUS voor dat geval vindt, zoodat niettegenstaande de warmte-geleiding de drukking overal in het gas en in alle richtingen dezelfde is, eveneens zal mijns inziens in het algemeene geval in elk volumen-element van het gas ten slotte, als de stationnaire toestand bereikt is, een volkomen analoge verdeeling van snelheid en aantal over de verschillende richtingen moeten bestaan. Die verdeeling zal in beide gevallen symmetrisch zijn ten opzichte van de richting volgens welke in het beschouwde oneindig kleine volumen-element de warmte-geleiding plaats heeft, d. i. de richting van de orthogonaal aan het isothermisch oppervlak in het volumen-element. *) In het algemeene geval zal echter niet zooals bij CLAUSIUS die verdeeling overal langs een zelfde isothermisch oppervlak dezelfde zijn, daar hier niet het temperatuurverval in de richting der warmte-geleiding langs het geheele isothermische oppervlak dezelfde waarde behoeft te hebben, maar voor de verschillende deelen van dat oppervlak verschillend kan zijn, en de aard dier verdeeling van de grootte van het temperatuurverval in het beschouwde volumen-element zal afhangen.

Ofschoon ik het dus voor het waarschijnlijkst houd, dat uit de beginselen der kinetische gastheorie, zooals zij door MAXWELL en CLAUSIUS zijn opgesteld en toegepast, in den stationnairen toestand van warmte-geleiding geen drukkingsverschillen af te leiden zijn, en dat zoo men het bestaan daarvan wilde aannemen, daartoe de beginselen der kinetische gastheorie wijzigingen zouden moeten ondergaan; moet ik er echter bijvoegen, dat voor deze meening nog geen streng bewijs geleverd is. Mocht het blijken, dat deze meening onjuist is, dat men wel degelijk uit

---

*) In het algemeene geval zal die verdeeling slechts ongeveer en niet volkomen symmetrisch zijn ten opzichte van de richting der warmte-geleiding, omdat de afstand van de beide isothermische oppervlakken, waartusschen het volumen-element begrepen is, niet in alle richtingen loodrecht op de richting van warmte-geleiding een even snelle verandering ondergaat. In sommige bijzondere gevallen zal op sommige plaatsen in het gas zelfs geen toenadering tot zulk een symmetrische verdeeling behoeven te bestaan.

de beginselen der kinetische gastheorie drukkingsverschillen in sommige stationnaire toestanden van warmte-geleiding kan afleiden, of mocht men zoodanige veranderingen aan die theorie kunnen aanbrengen, dat die drukkingsverschillen volgens de theorie mogelijk worden, want ik wil volstrekt niet beweren, dat de stellingen der gastheorie alle zoo onwankelbaar vast staan, dat zij in het geheel geen verandering meer zullen ondergaan, dan zal echter nog moeten worden aangetoond, dat die mogelijke drukkingsverschillen zoodanig kunnen zijn, dat zij de CROOKES'sche verschijnselen verklaren.

Nu geloof ik te kunnen beweren, dat men in het geval van warmte-geleiding tusschen twee evenwijdige even groote vlakke wanden van verschillende temperatuur, zooals dit door CLAUSIUS behandeld is, nooit tot zoodanige drukkingsverschillen zal kunnen komen.

Want het verschijnsel, om wiens verklaring het voornamelijk te doen is, is toch dit, dat een vast oppervlak een grootere drukking ondervindt, wanneer het een hoogere temperatuur heeft dan het gas en er dus warmte uit het oppervlak in het gas overgaat, daarentegen een geringere drukking, wanneer het een lagere temperatuur heeft dan het gas en er dus warmte uit het gas op het oppervlak overgaat. Nu zou om die vermeerdering respectieve vermindering van drukking tegen het warmere respectieve koudere oppervlak te verklaren door drukkingsverschillen in het gas, dat in den door CLAUSIUS behandelden toestand van warmte-geleiding verkeert, daartoe niet alleen gevorderd worden, dat de drukking in de richting der warmte-geleiding een *andere* is dan in de hierop loodrechte richtingen, maar tevens zou de drukking in de eerstgenoemde richting in de nabijheid van den warmen wand *grooter*, in de nabijheid van den kouden wand daarentegen *kleiner* moeten zijn dan in de op de richting van warmte-geleiding loodrechte richtingen. Zulke drukkingsverschillen kunnen echter niet worden aangenomen. Ook al zou men de mogelijkheid willen toegeven van een verschil in druk in de richting der warmte-geleiding en in de daarop loodrechte richtingen, dat verschil zal toch altijd hetzelfde teeken moeten hebben, de druk in de richting der warmte-geleiding

zal f altijd grooter óf altijd kleiner moeten zijn dan in de andere richtingen; maar dat dit verschil op de eene plaats in het gas een positieve op een andere plaats een negatieve waarde zou hebben, acht ik volstrekt onmogelijk.

In het door CLAUSIUS behandelde geval van warmte-geleiding kunnen dus zoodanige drukkingsverschillen in het gas als ter verklaring der verschijnselen van CROOKES zoowel bij een warm als bij een koud oppervlak vereischt worden, niet voorkomen.

Zou dit echter in het algemeene geval, waarbij de warmtegeleiding in het gas plaats heeft tusschen oppervlakken van willekeurigen vorm en van verschillende grootte, mogelijk zijn?

Wanneer men wil, dat in *elk* geval het warmere oppervlak een grootere, het koudere oppervlak een geringere drukking ondervindt, houd ik dit ook in het algemeene geval van warmtegeleiding voor niet mogelijk.

Wanneer men echter de waarnemingen van CROOKES en anderen nagaat, dan ziet men, dat in de meeste gevallen het oppervlak, waarbij een vermeerdering of vermindering der drukking is waargenomen, het *kleinste* is der beide oppervlakken van verschillende temperatuur, waartusschen de warmte-geleiding in het gas plaats heeft. Neemt men nu aan, dat het bij die waarnemingen altijd het kleinste oppervlak geweest is, waarbij bij verwarming van dat oppervlak een vermeerdering, bij afkoeling daarentegen een vermindering der drukking is gevonden, dan zou men wellicht op de volgende wijze drukkingsverschillen in het gas kunnen aannemen, die het waargenomene verklaren en waarvan het bestaan niet a priori volstrekt onmogelijk te achten is.

Het zou kunnen zijn, dat wel is waar in het door CLAUSIUS behandelde geval, waarbij de warmte-geleiding in het gas plaats heeft tusschen twee evenwijdige *even groote* oppervlakken van verschillende temperatuur, zulke drukkingsverschillen onmogelijk zijn, en waarschijnlijk zelfs in het geheel geen drukkingsverschillen in verschillende richtingen kunnen optreden, maar dat dit wel het geval is, wanneer de beide oppervlakken, tusschen welke de warmte-geleiding in het gas plaats heeft, *een verschillende grootte* bezitten. Wanneer men toch datgene der oppervlakken, hetgeen eerst het warmste van beide is, vervol-

gens tot het koudste maakt, dan zal in het eerste geval, dat van CLAUSIUS, niets anders gebeuren dan dat de richting van warmte-geleiding in het gas wordt omgekeerd, en dit kan onmogelijk ten gevolge hebben, dat het verschil tusschen de drukking langs de lijn, volgens welke de warmte wordt voortgeleid, en die in de daarop loodrechte richtingen van teeken verandert. In het tweede geval, waarbij de beide oppervlakken een verschillende grootte hebben, verandert echter behalve de richting van warmtegeleiding nog iets anders. Wanneer toch den eersten keer het kleinste der beide oppervlakken het warmste, den tweeden keer daarentegen het koudste is, dan gaat den eersten keer de warmte door het gas van een kleiner op een grooter, den tweeden keer van een grooter op een kleiner oppervlak over. Nu zou men kunnen veronderstellen, dat in het geval, dat de warmte zich bij de voortgeleiding allengs over grootere oppervlakken verbreidt, de drukking in de richting der warmte-geleiding grooter is dan in de daarop loodrechte richtingen, dat daarentegen de drukking in eerstgenoemde richting kleiner is dan in de tweede, wanneer de warmte zich allengs op kleinere oppervlakken concentreert. Men zou op die wijze dan kunnen verklaren, waarom een oppervlak, dat omgeven is door een grooter oppervlak, een grootere of kleinere drukking van het tusschen de beide oppervlakken zich bevindende gas ondervindt, al naarmate het een hoogere of een lagere temperatuur bezit dan het omringende oppervlak. Men zou op die wijze van vele der CROOKES'sche verschijnselen een verklaring verkrijgen Ik betwijfel echter, of die verklaring op alle waargenomen verschijnselen zou zijn toe te passen; en ik voor mij zou dan ook volstrekt niet geneigd zijn zulk een hypothese op te stellen, vóórdat het gebleken is, dat niet op andere wijze een verklaring der verschijnselen van CROOKES te vinden is.

Mijn doel met het voorafgaande was dan ook alleen, om aan te toonen, dat het nog niet zoo zeer gemakkelijk is de ter verklaring der verschijnselen vereischte drukkingsverschillen te vinden, ook al wil men de mogelijkheid van het bestaan van zulke drukkingsverschillen in het algemeen niet geheel ontkennen, en om aan te duiden, hoe of naar mijne meening die drukkingsverschillen zouden moeten zijn, wilde men

door hen ten minste de hoofdverschijnselen kunnen verklaren. Ik blijf er bij, dat ik het bestaan van zulke voortdurende drukkingsverschillen voor niet waarschijnlijk houd. Volgens de gastheorie, zooals die tegenwoordig algemeen wordt aangenomen, is het voor mij het waarschijnlijkst, dat de onophoudelijke botsingen van de gasmoleculen onderling alle bestaande drukkingsverschillen zeer spoedig zullen doen verdwijnen. Maar ook onafhankelijk van een bepaalde theorie omtrent de moleculaire constitutie der gassen geloof ik, dat al hetgeen ons de ervaring geleerd heeft omtrent de drukverdeeling in een gas, er ons op wijst, dat blijvende drukkingsverschillen van zoodanigen aard, dat zij de verschijnselen van CROOKES verklaren, niet kunnen voorkomen in een stationnairen toestand van warmte-geleiding *zonder stroomingen,* een toestand, en dit worde vooral niet over het hoofd gezien, waarbij wij de werking van uitwendige krachten van de soort als bijv. de zwaartekracht geheel hebben buitengesloten, en waarbij het gemiddelde aantal der moleculen, die in een bepaalden tijd, hoe klein men dien tijd ook nemen moge, in de twee tegengestelde richtingen door eenig vlakte-element gaan, waar dat vlakte-element ook in het gas geplaatst, en hoe het ook gericht moge zijn, voor beide richtingen dezelfde is en voor eenzelfde vlakte-element voordurend dezelfde waarde blijft behouden. *)

Dit staat echter vast, dat indien die drukkingsverschillen niet bestaan, wanneer het gas onder de normale dichtheid, d. i. die behoorende bij de drukking van één atmospheer, verkeert, zij door een verdunning van het gas niet kunnen optreden; want de ijlheid van het gas kan wellicht het optreden van den stationnairen toestand vertragen; ten slotte, wanneer het gas maar lang genoeg aan zich zelf is overgelaten, zal die stationnaire toestand toch moeten optreden, tenzij stroomingen dit verhinderen.

---

*) Een toestand dus, die volstrekt niet te verwarren is met dien in geluidsgolven; want door vlakken loodrecht op de richting van voortplanting der golven gaan niet voortdurend in beide richtingen evenveel moleculen, maar het eene oogenblik gaan er meer in de eene richting, een volgend oogenblik meer in de tegengestelde richting.

Alleen in het geval, dat het gas zulk een graad van ijlheid bezit, dat de gemiddelde weglengte der moleculen van dezelfde orde van grootte wordt als de afmetingen van het vat, waarin de gasmassa besloten is, zal een lichaam, waarvan het oppervlak niet overal dezelfde temperatuur bezit, op die ongelijk warme deelen van dat oppervlak een verschillende drukking van het gas kunnen ondervinden. Dan toch kan men de stellingen der kinetische gastheorie niet meer op zulk een kleine ruimte toepassen als door het beschouwde gas wordt ingenomen; dan toch zal elke der moleculen de geheele ruimte doorloopen en niet meer bij haar bewegingen aan een bepaald deel dier ruimte gebonden zijn; dan toch zal van een verschil in dichtheid van het gas in de verschillende deelen der ruimte geen sprake meer kunnen zijn, en de moleculen zullen, ten minste in het geval, dat de gemiddelde weglengte groot wordt ten opzichte van de afmetingen van het vat, waarin de gasmassa besloten is, in ongeveer gelijk aantal en met dezelfde snelheid tegen het koude en tegen het warme deel van het oppervlak van het lichaam aankomen.

Sommigen hebben dan ook gemeend de verschijnselen van CROOKES te kunnen verklaren uit de drukkingsverschillen, die bij zulk een ijl gas voor de oppervlakken van verschillende temperatuur moeten bestaan. Zoo o. a. DEWAR en TAIT *), CROOKES †), enz. Ik kan echter ook deze verklaringswijze niet als een algemeene laten gelden. Als men let op de gewone afmetingen der radiometers en op die van de door CROOKES gebruikte toestellen, dan zou men om zulk een toestand te bereiken, waarbij de gemiddelde weglengte even groot wordt als de afmetingen dier toestellen, tot graden van verdunning moeten opklimmen, waarvan het tot nog toe niet bewezen is, dat zij reeds verkregen zijn. Bij de grootste verdunningen, die DEWAR en TAIT en ook CROOKES zeggen verkregen te hebben, — DEWAR en TAIT geven op, dat zij de dichtheid tot een viermillioenste van de normale dichtheid hebben herleid, — zou zeker zulk een toestand als de bovenbe-

*) TAIT en DEWAR, *Nature*, vol. 12, p. 217, July 15, 1875.

†) CROOKES, *Phil. Trans.*, vol. 166, p. 375.

doelde bereikt zijn. Maar vooreerst is het voor mij hoogst onzeker, of zij wezenlijk tot dien uitersten graad van verdunning gekomen zijn als door hen wordt opgegeven, en zal dit ten minste moeielijk door hen met zekerheid kunnen bewezen worden; en ten tweede CROOKES heeft zelf aangetoond, dat juist bij die groote verdunningen de draaiingssnelheid van de wieken des radiometers reeds sterk aan het afnemen is. Bij dien graad van verdunning, waarbij volgens CROOKES die draaiingssnelheid haar maximumwaarde bereikt, en CROOKES geeft hiervoor een graad van verdunning op, die zeer waarschijnlijk te hoog is, is de gemiddelde weglengte nog veel kleiner dan de afmetingen van het vat des radiometers *). Bij de proeven van FINKENER †) begon de draaiing in lucht reeds bij een drukking van 3 à 4 mm., d. i. bij een ongeveer 200-voudige verdunning, waarbij de gemiddelde weglengte slechts een vijftigsten millimeter bedraagt, als men voor die weglengte bij de normale drukking van 760 mm. de waarde 0,0001 mm. aanneemt. Bij CROOKES' proeven ging de bij grootere dichtheid waargenomen aantrekking van een voorwerp door een warm lichaam bij verdunning in een afstooting over, en dit geschiedde in vele gevallen bij drukkingen, die 50 mm. en meer bedroegen §). Wanneer men dit alles in aanmerking neemt, zal men moeten toegeven, dat afstooting door licht- en warmtestralen is waargenomen bij graden van verdunning, waarbij de gemiddelde weglengte nog volstrekt niet vergelijkbaar was met de afmetingen der gebruikte toestellen, en waarbij dus van drukkingsverschillen, veroorzaakt doordat de gemiddelde weglengte dezelfde grootte had als de afmetingen der toestellen, geen sprake kan zijn.

Maar ook al moge de gemiddelde weglengte nog niet de grootte van de afmetingen der toestellen bereikt hebben, dan zouden toch wellicht de moleculen, die grootere wegen dan de gemiddelde weglengte afleggen, haar invloed kunnen doen gelden? Dat die invloed bij de verdunningen, waarbij de

---

*) TOLVER PRESTON, *Phil. Mag.* (5) vol. 4, p.114.

†) FINKENER, *Pogg. Ann.* Bd. 158, S. 572.

§) CROOKES, *Phil. Trans.* vol. 165, p. 541.

beweging des radiometers bijv. door FINKENER is waargenomen, echter nog zoo ontzaggelijk klein is, dat hij gerust gelijk nul kan gesteld worden, blijkt ten duidelijkste uit de volgende berekening.

Bij de drukking van 760 mm. bedraagt de gemiddelde weglengte in lucht ongeveer 0,0001 mm. Bij een honderd-, tweehonderd- of duizendvoudige verdunning bedraagt zij dus 0,01, 0,02 of 0,1 mm. Berekent men nu hoeveel moleculen een weglengte hebben grooter dan honderd of duizendmaal de gemiddelde weglengte *), dan vindt men dat slechts 1 molecule op de $(10)^{43}$ moleculen een weg aflegt grooter dan 100maal de gemiddelde weglengte, en slechts 1 op de $(10)^{434}$ moleculen een weg grooter dan 1000maal de gemiddelde weglengte. Bij een 200-voudige verdunning, waarbij FINKENER in zijn radiometer reeds duidelijk draaiing waarnam, zal dus slechts 1 onder de $(10)^{43}$ moleculen een grooteren afstand afleggen dan 2 mm., slechts 1 onder de $(10)^{434}$ een grooteren afstand dan 20 mm., en toch zijn deze beide wegen van 2 en van 20 millimeters nog kleiner, de eerste zelfs veel kleiner dan de afmetingen van het radiometer-vat. Ja zelfs bij een duizendvoudige verdunning zal slechts 1 op de $(10)^{434}$ moleculen een weg afleggen grooter dan 10 cm., dat wil zeggen een afstand slechts weinig grooter dan de afmetingen van het radiometer-vat, terwijl slechts 1 op de $(10)^{43}$ moleculen een weg grooter dan 1 cm. tusschen twee opvolgende botsingen zal doorloopen. Zelfs bij een duizendvoudige verdunning kan men dus aan de moleculen, die wegen afleggen van dezelfde grootte als de afmetingen van het vat des radiometers, nog geen merkbaren invloed toeschrijven, daar het aantal der moleculen, die zulke groote wegen doorloopen zonder in botsing te komen, zoo uiterst gering is. Bij gerin-

---

*) De formule voor deze berekening vindt men bij O. E. Meyer, *Die kinetische Theorie der Gase*, S. 116. Wanneer men met TOLVER PRESTON (*Phil. Mag.* (5) vol. 4. p. 111) voor den gemiddelden afstand tusschen de moleculen van een gas bij de normale dichtheid, bij 0° en 760 mm., aanneemt $\frac{1}{2.668.400}$ centimeter verkrijgt men bij een 100- of 1000-voudige verdunning ongeveer dezelfde waarde, of men de benaderde of de strenge formule van Meyer gebruikt; bij de normale dichtheid is het verschil tusschen de waarden door de benaderde of de strenge formule verkregen reeds meer merkbaar, ofschoon altijd nog gering.

gere verdunningen kan men dien invloed a fortiori gerust gelijk nul stellen. Dit is dan ook volkomen in overeenstemming met de proeven van KUNDT en WARBURG *). In vaten kleiner dan die van de meeste radiometers vonden dezen voor lucht geen verandering in het geleidingsvermogen en in den wrijvingscoëfficient tot een drukking van 1 mm. toe, zoodat bij die geringe drukking op lucht de stellingen van de kinetische gastheorie nog volkomen toepasselijk bleken te zijn. Tot die verdunning toe ten minste kan daarom van het optreden van drukkingsverschillen geen sprake zijn, wanneer onze voorafgaande redeneering als juist mag beschouwd worden.

Ik kan om de bovengenoemde redenen niet medegaan met hen, die de CROOKES'sche verschijnselen uit drukkingsverschillen trachten te verklaren, die in den stationnairen toestand van warmte-geleiding zonder stroomingen zouden kunnen voorkomen, daar ik het bestaan dier drukkingsverschillen als niet waarschijnlijk en ten minste als niet bewezen beschouw, en daar ik, ook al wilde ik de mogelijkheid van zulke blijvende drukkingsverschillen toegeven, betwijfel, of zij zoodanig kunnen zijn, dat zij van alle waargenomen verschijnselen een voldoende verklaring geven.

Ik zou hiermede in mijn kritiek der zich hierop grondende verklaringen kunnen volstaan, ware het niet, dat eenigen zoo zeer uitgewerkte en schijnbaar nauwkeurige formules voor de grootte dier drukkingsverschillen hebben trachten te geven, dat het wel noodig mag gerekend worden, dat worde aangetoond, waarin zij bij de afleiding dier formules hebben gefaald. Doen wij dit in de eerste plaats voor de formules door FINKENER gegeven.

FINKENER schrijft volgens § 9 zijner vroeger reeds aangehaalde verhandeling aan de stroomingen geen merkbaren invloed toe. Hij neemt dus een stationnairen toestand van warmte-geleiding aan, en tracht in dien stationnairen toestand den overdruk op de warme zijde te verklaren (zie zijn §§ 4—8).

Voor een uiterst verdund gas, waarbij de afmetingen van het

---

*) KUNDT en WARBURG, *Pogg. Ann.* Bd. 155 und 156.

vat des radiometers en die der wieken slechts een klein veelvoud der gemiddelde weglengte bedragen, meent hij, dat zoowel in het midden als op de randen der wieken een overdruk kan bestaan (§ 8). De gronden, waarop zijn besluit berust, komen mij voor niet zeer juist te zijn. Wat het besluit zelf betreft, kan ik echter, zooals ik reeds vroeger gezegd heb, wel met hem instemmen, zij het dan ook op eenigszins andere gronden.

Bij niet zoo groote verdunning van het gas, zoodat de gemiddelde weglengte nog zeer klein blijft ten opzichte van de afmetingen van de wieken en van het vat des radiometers, meent FINKENER dat op het midden der wieken in den stationnairen toestand geen overdruk voorhanden is (§ 6), wel echter op de randen der wieken (§ 7). Om de werking op die randen te bepalen, denkt hij zich aan de wiek aansluitend een haar voortzettend plat vlak, en geeft hij aan de verschillende punten in het vlak zulk een temperatuur, dat de snelheid der moleculen daardoor overal onveranderd blijft. Met de verwijdering van de wiek neemt in het vlak de temperatuur af, en in de nabijheid van den rand stelt hij de daarmede overeenkomende vermindering van de snelheid der moleculen evenredig aan den afstand tot den rand. Op den afstand gelijk aan de gemiddelde weglengte l zou die snelheid zijn $v = v_1 - m\,(v_1 - v_0)\dfrac{l}{E_1}$, waarin v_1 en v_0 de waarden van v op de wiek en aan den wand des radiometers, E_1 de afstand van den rand tot den wand, en m een constante grooter dan 1. Het aantal en de snelheid der moleculen, die in een punt het vlak treffen, zijn afhankelijk van de temperatuur der omgeving van dit punt, en zijn ongeveer dezelfde, als wanneer de omgeving tot op den afstand l het gemiddelde der temperaturen der verschillende punten binnen dien afstand gelegen tot temperatuur had. Voor een element aan den rand hebben zij dus dezelfde waarde, alsof de temperatuur der omgeving overeenkwam met een waarde van $v = v_1 - 0,2\,m\,\dfrac{l}{E_1}(v_1 - v_0)$. Een element van het vlak met deze temperatuur zou door de er tegen aanbotsende moleculen de normale drukking ondervinden, een element van de wiek ondervindt dus een overdruk evenredig

aan de uitdrukking $0{,}2\, m \frac{l}{E_1} (v_1 - v_0)$. Deze overdruk strekt zich op de wiek met allengs afnemende sterkte uit tot op een afstand l van den rand. FINKENER stelt dan vervolgens een uitdrukking op voor den overdruk, dien de geheele warme zijde der wiek ondervindt ten gevolge van dien overdruk in de nabijheid van den rand, en door hiervan af te trekken den wegens de lagere temperatuur kleineren overdruk op de koele zijde der wiek, en dit verschil te deelen door den vlakte-inhoud der wiek, komt hij tot den druk per kwadraat centimeter, die de wiek in beweging tracht te brengen.

FINKENER meent dus gevonden te hebben, dat ook in den stationnairen toestand van warmte-geleiding zonder stroomingen een overdruk zij het dan ook slechts op de randen der wiek kan bestaan. Het is echter in de eerste plaats zeer vreemd, dat men op deze wijze wel een verklaring verkrijgt van de beweging door licht- en warmtestralen voortgebracht bij een platte radiometer-wiek met scherpe randen, maar niet van die door CROOKES onder volkomen dezelfde omstandigheden waargenomen bij een licht bolletje, bij een voorwerp dus zonder scherpe randen. En in de tweede plaats geloof ik, dat er op de wijze, waarop FINKENER tot zijn formule voor den overdruk komt, zeer veel aan te merken is. De wijze, waarop hij de temperatuur laat afnemen in het verlengde van het vlak der radiometer-wiek is zeer willekeurig, en is bij een bestaand verschil in temperatuur van de beide kanten der wiek zeker niet in overeenstemming met den loop der isothermische oppervlakken in het den radiometer vullende gas. En verder wordt door hem in het geheel niet gelet op het afnemen van de temperatuur aan de warme zijde der wiek naar de randen toe. Die lagere temperatuur aan de randen dan in het midden zal zich wel is waar slechts tot op zeer kleinen afstand van den rand uitstrekken, maar naar den rand toe neemt de temperatuur toch zeker iets af. Dit moet zoo zijn, omdat de warmere kant der wiek in de éénheid van tijd over zijn geheele oppervlak evenveel warmte opneemt; de randen verliezen echter door het zijdelingsche warmte-verlies, door uitstraling en door warmte-geleiding, meer warmte in dezelfden tijd dan het mid-

den; die randen zullen daarom een iets lagere temperatuur moeten bezitten dan het midden. Wel zal door warmte-geleiding in de wiek van het midden naar de randen de temperatuur aldaar slechts weinig onder die van het midden dalen, maar zij is daar toch noodzakelijk iets lager. Die warmte-geleiding naar de randen in de wiek zelve zal, zoodra de toestand stationnair geworden is, juist het grootere warmte-verlies aan de randen dekken. Ook aan de andere koelere zijde der wiek zal de temperatuur in de nabijheid der randen een iets andere moeten zijn dan in het midden.

Had FINKENER den loop der isothermische oppervlakken in het gas en de temperatuurs-veranderingen op de wiek zelve in de nabijheid van hare randen nauwkeuriger in rekening gebracht, dan had hij zeer waarschijnlijk geen overdruk op de randen in den stationnairen warmte-toestand gevonden.

In de tweede plaats een enkel woord over JOHNSTONE STONEY's theorie *). Een enkel woord hierover houd ik echter voor genoeg, omdat STONEY in zijne verhandelingen over dit onderwerp telkens de doorslaande bewijzen geeft, dat het hem ontbreekt aan een juist inzicht van hetgeen men onder warmte-geleiding in een gas te verstaan heeft.

JOHNSTONE STONEY neemt aan, dat de invloed van de hoogere temperatuur van een vast oppervlak zich slechts tot op zekeren afstand in het omringende gas doet gevoelen. Een laag gas tegen het oppervlak aan gelegen gaat in de hoogere temperatuur van dat oppervlak deelen, het overige gas buiten die laag behoudt de oorspronkelijke temperatuur. In de laag verandert de temperatuur van het gas allengs van de temperatuur van het vaste oppervlak aan de eene zijde tot die van het omgevende gas aan de andere zijde.

De dikte dier laag is in lucht van normale dichtheid uiterst klein. Zij neemt bij verdunning der lucht echter toe evenredig aan de gemiddelde weglengte. Bij zeer groote verdunning zal de dikte van die tegen de wieken des radiometers

---

*) JOHNSTONE STONEY, *Phil. Mag.* (5; vol. 1, pp. 177 and 305; vol 4, p. 424.

aan gelegen lagen van STONEY dus zoo groot kunnen worden, dat zij grooter wordt dan de afstand van de wieken tot den wand van het radiometer-vat. In dat geval kan die laag zich dus niet in haar geheel maar slechts voor een gedeelte vormen, terwijl bij grootere dichtheid van het gas, zoolang de dikte dier laag van STONEY nog kleiner is dan de afstand van de wiek tot den wand des radiometers, die laag zich volkomen kan ontwikkelen. Nu meent STONEY, dat in het geval, dat die laag zich geheel kan vormen, d. i. dus boven een bepaalden graad van dichtheid van het gas, het warmere oppervlak geen overdruk van het gas kan ondervinden, dat daarentegen in het geval, dat die laag zich slechts ten deele kan ontwikkelen, doordat zich tegenover het warme oppervlak een ander koeler vast oppervlak bevindt op een afstand kleiner dan de dikte der laag, de drukking van het gas in die laag grooter zal zijn in de richting van de dikte der laag, zoodat zoowel het warme als het daartegenover geplaatste koelere oppervlak een overdruk van het gas zal ondervinden.

Aan den op deze wijze bewerkten overdruk op de warme zijde van de wieken des radiometers bij groote verdunning van het gas schrijft STONEY de beweging der wieken in den radiometer toe.

Waarom STONEY's zienswijze niet door mij kan gedeeld worden, zal ik zelfs na het zeer korte résumé van zijn theorie wel niet behoeven uiteen te zetten STONEY vergeet blijkbaar, dat de gassen warmte-geleidingsvermogen bezitten, en dat de invloed der hoogere temperatuur van het warme oppervlak op de temperatuur van het gas zich daarom niet zal bepalen tot een laagje gas tegen het warme oppervlak aan gelegen, maar zich over de geheele gasmassa zal uitstrekken, ook al laat men de stroomingen, die in het gas zullen optreden, geheel buiten beschouwing.

Hierop heeft OSBORNE REYNOLDS STONEY reeds opmerkzaam gemaakt in een brief aan het tijdschrift *Nature* *). Maar

---

*) In het 17de deel van *Nature* bevinden zich verschillende brieven én van OSBORNE REINOLDS én van JOHNSTONE STONEY, waarin zij elkanders theoriën aan een scherpe kritiek onderwerpen

STONEY meent te kunnen volhouden, dat al mogen ook eenige verbeteringen wegens die warmte-geleiding in het gas aan zijn theorie moeten worden aangebracht, zijn theorie toch in de hoofdzaken juist blijft. In een zijner brieven aan *Nature* *) vind ik bijv. het volgende: „The corrections that are required do not, however, affect any of the material parts of my theories of CROOKES' force and of penetration, which depend essentially on the fact that there is a layer in the gas extending to a limited distance from a heater or cooler, throughout which the effects of the discontinuity in the gaseous motions at the surface will be felt, and that within that layer the stresses and the communication of heat follow special laws." STONEY voert hiervoor echter geen gronden aan, en ik blijf daarom betwijfelen of hij gelijk heeft. Uit de aangehaalde woorden blijkt echter, dat STONEY tegenwoordig den overdruk op een warm vast oppervlak meent te moeten toeschrijven aan een discontinuïteit in de bewegingen der gasmoleculen in de nabijheid van het warme oppervlak. Dat er zulk een discontinuïteit bestaat, of liever dat de gasmoleculen aan het oppervlak niet geheel dezelfde bewegingen kunnen uitvoeren als verder in de gasmassa, wil ik STONEY gaarne toestemmen, maar dat daarvan een grootere drukking op het warme oppervlak het gevolg zou zijn, betwijfel ik sterk op gronden, die wij later zullen aangeven.

Ten slotte wenschen wij nog een proef van ZÖLLNER te bespreken, die volgens hem in strijd zou zijn met de op de kinetische theorie der gassen zich grondende verklaringen der radiometerverschijnselen, en die daarom tegen deze verklaringen en ten gunste zijner emissie-theorie zou getuigen.

Die proef is de volgende †). Een plaatje mica wordt den eenen keer aan beide zijden met plaatjes aluminiumblik bedekt, den anderen keer daarentegen slechts aan éénе zijde. Liet hij de eene zijde van het eerste plaatje in een met verdund gas gevuld glazen vat door de zon beschijnen, dan nam hij geen

---

*) *Nature*, vol. 17, p. 261, Jan. 31, 1878.

†) ZÖLLNER, *Pogg. Ann.*, Bd. 160, SS. 156—158.

afstooting waar; liet hij het zonnelicht op de met aluminium bedekte zijde van het tweede plaatje invallen, dan nam hij daarentegen een zeer krachtige afstooting waar.

Bij deze proeven kan volgens ZÖLLNER niet door temperatuursverschil van de beide zijden van het beschenen plaatje de waargenomen beweging verklaard worden. Want, zegt hij, in het tweede geval, waarin beweging werd waargenomen, moet klaarblijkelijk het temperatuursverschil tusschen de beschenen en niet beschenen zijde kleiner geweest zijn dan in het eerste geval, daar hier de beide zijden niet slechts door de dikte van het plaatje mica maar ook nog door de dubbele dikte van het aluminium-blik van elkander gescheiden zijn, en daarom de opheffing van het temperatuursverschil door geleiding minder snel moet plaats hebben dan in het tweede geval.

Ik kan dit aan ZÖLLNER niet toegeven. De geleiding zal in beide gevallen niet veel verschillen; want het is in beide gevallen voornamelijk het mica-plaatje, hetgeen door zijn gering geleidingsvermogen verhinderen kan, dat het temperatuursverschil tusschen de beide zijden wordt opgeheven, en of nu het eene plaatje één laagje aluminiumblik, hetgeen de warmte zoo goed geleidt, meer bezit dan het andere, kan hierop weinig verschil maken. En verder er is wel degelijk een reden aan te geven, waarom het temperatuursverschil in het eerste geval veel geringer moet zijn dan in het tweede, dus juist het omgekeerde van hetgeen ZÖLLNER meent. De achterzijde van het plaatje zal toch ook verwarmd worden, namelijk door de stralen, die door den glazen achterwand van den radiometer teruggekaatst zijn. Door deze teruggekaatste stralen wordt nu, omdat aluminium een grooter absorbeerend vermogen bezit voor licht dan mica, de achterzijde van het plaatje sterker verwarmd, als die achterzijde uit aluminium dan als zij uit mica bestaat. In het eerste geval zal daarom het temperatuursverschil tusschen de beide zijden geringer moeten zijn dan in het tweede geval. Het kan nu zeer goed zijn, dat dit temperatuursverschil in het tweede geval wel groot genoeg is om een beweging van het plaatje voort te brengen, terwijl dit in het eerste geval, waarbij het te bewegen plaatje daarenboven nog zwaarder moet geweest zijn, daartoe niet voldoende is.

Ook in ZÖLLNER's theorie moet men aannemen, dat bij het plaatje met twee blaadjes aluminium slechts een zeer klein temperatuursverschil tusschen de beide zijden moet bestaan hebben. Anders is het niet te begrijpen, waarom het niet in beweging kwam. De warmere zijde moet toch volgens ZÖLLNER's hypothese meer deeltjes hebben uitgezonden dan de koude zijde, en dit had de beweging van het plaatje ten gevolge moeten hebben. Ik geloof, dat ZÖLLNER's proef niet met de verklaring volgens de kinetische gastheorie in strijd is; maar is zij het, dan is zij het even goed met de theorie van ZÖLLNER zelven.

Hebben wij in het voorafgaande de verschillende theoriën kritisch onderzocht, die tot heden ter verklaring der door CROOKES ontdekte verschijnselen zijn opgesteld, en is het uit dat onderzoek gebleken, dat naar onze meening geen enkele dier theoriën den toets der kritiek kan weêrstaan, wij wenschen thans er toe over te gaan, om te onderzoeken, of er toch niet nog een oorzaak te vinden is, die van die verschijnselen rekenschap kan geven.

De nu volgende denkbeelden meen ik echter niet als zekere maar slechts als meer of min waarschijnlijke te moeten voordragen, en de reden hiervan is deze, dat wij een gebied der natuurkunde moeten betreden, waarvan ons nog slechts zeer weinig bekend is, en waarvan de theorie daarom nog zeer weinig ontwikkeld is Wij moeten namelijk nagaan, wat er gebeurt, wanneer een gasmassa in aanraking komt met een vast oppervlak van andere temperatuur, en wel wat er gedurende de eerste oogenblikken gebeurt, vóórdat de stationnaire toestand van warmte-geleiding in die gasmassa is opgetreden. Die overgangstoestand, waarin de gasmassa tijdelijk verkeert, kan echter vooralsnog niet streng mathematisch behandeld worden, en wel voornamelijk niet om twee redenen. Terwijl toch de kinetische gastheorie van vele vraagstukken een strenge oplossing geeft, wanneer die vraagstukken betrekking hebben op een stationnairen toestand van het gas, is dit niet het geval met de veel moeielijker en meer gecompliceerde vraagstukken, die de niet-stationnaire of overgangstoestanden betreffen. Maar

ook al schoot hier de mathematische analyse niet in de meeste gevallen te kort, ook dan nog zou in den regel geen strenge oplossing der vraagstukken verkregen kunnen worden, omdat ons nog zoo uiterst weinig bekend is omtrent de wijze waarop de moleculen van het gas en die van het vaste lichaam hare bewegingen onder elkander uitwisselen. En dit is eigenlijk niet alleen het geval voor den nu te beschouwen overgangstoestand, maar diezelfde onbekendheid en onzekerheid bestaat ook voor den stationnairen toestand van warmte geleiding, zooals die door CLAUSIUS behandeld is. De formules door CLAUSIUS voor dien toestand opgesteld gelden dan ook slechts tot op een bepaalden afstand van het warme oppervlak, maar mogen op dit oppervlak zelf niet meer worden toegepast. De juistheid dezer bewering moge uit het volgende blijken.

Wanneer wij de formules van CLAUSIUS ook op het warme oppervlak zelf toepassen, vinden wij bijv., dat de moleculen, die door dat oppervlak worden teruggekaatst, een snelheid bezitten, die afhangt van de richting, waarin de terugkaatsing plaats heeft. Voor de richting, die met de normaal op het oppervlak een hoek maakt, waarvan de cosinus een waarde μ heeft, wordt die snelheid bepaald door de uitdrukking:

$$u + q\mu\varepsilon + \text{enz.}$$

en is dus verschillend voor verschillende waarden van μ.

Deze uitkomst is hieraan toe te schrijven, dat de formules van CLAUSIUS zijn opgesteld voor het aantal en de snelheid der moleculen, die in een bepaalde richting door een vlak gaan evenwijdig aan den wand maar in het gas zelf gelegen. De snelheid moet dan veranderlijk zijn met de richting, omdat de door de moleculen na de laatste botsing afgelegde weg in de richting loodrecht op het beschouwde vlak dan gemiddeld des te grooter is, naarmate de richting, waarin de moleculen zich bewegen, meer nadert tot die van de normaal op het beschouwde vlak, d. i. naarmate μ minder verschilt van 1 of -1.

Wij mogen die formules dus eigenlijk niet toepassen op een vlak, hetgeen met den vasten wand samenvalt; want beschouwen wij dien wand als een volkomen plat vlak, dan zullen alle moleculen, die zich van dien wand verwijderen, in dat

vlak van den wand in botsing zijn geweest, en dus alle met dezelfde snelheid den wand moeten verlaten, welke de richting zij ten opzichte van de normaal op den wand, waarin die verwijdering plaats heeft.

De formules van CLAUSIUS blijven dus slechts geldig tot een zeer korten afstand van den wand, maar zijn het niet meer voor den wand zelven. En dit moet ook noodzakelijk het geval zijn; want ten opzichte van de kleine gasmoleculen is de wand zeker niet glad maar zeer ruw. Wij kunnen een plat vlak aannemen evenwijdig aan den wand en op uiterst kleinen afstand daarvan verwijderd, waar de formules van CLAUSIUS geldig beginnen te worden; tusschen den wand en dat platte vlak zijn zij het zeker niet, en voor die ruimte is het ons onmogelijk de beweging van de daarin voorhanden gasmoleculen met zekerheid en juistheid aan te geven. Wij zouden daartoe ook den bewegingstoestand en de natuur der moleculen van den vasten wand nauwkeurig moeten kennen, en daarvan is tot nu toe zoo goed als niets bekend. Waarschijnlijk bevindt het gas zich in die ruimte in een minder vrijen toestand, en worden de gasmoleculen door de oneffenheden van den wand en door de aantrekking van de moleculen van den wand verhinderd zich vrij te bewegen. In die ruimte dringen van de zijde van het gas voortdurend iets koelere moleculen naar binnen, en uit die ruimte worden naar de zijde van het gas een even groot aantal moleculen teruggeworpen De in die ruimte zich bevindende gasmoleculen zullen dus waarschijnlijk niet voortdurend dezelfde zijn, maar ten minste voor een deel telkens vervangen worden door andere moleculen die van buiten in de laag binnendringen en daar tijdelijk haar vrijheid verliezen, terwijl andere naar buiten tredende haar onvrijen toestand met dien der vrijheid verwisselen. De juiste beweging van de moleculen in die laag is zooals gezegd niet aan te geven. Die beweging moet echter, daar er ook door deze laag warmte van den warmen wand naar het gas wordt overgevoerd, zoodanig zijn, dat de beweging naar den wand toe in het algemeen iets kleiner is dan die van den wand af *).

*) Dat het niet onnoodig is er eens op te wijzen, dat in het geval van warmtegeleiding de drukking in het gas zelf niet, zooals men in het geval van overal

Hieruit, dat de formules van CLAUSIUS niet mogen worden toegepast op het oppervlak van het warme lichaam, mag echter niet de gevolgtrekking gemaakt worden, dat wij dus eigenlijk in het onzekere verkeeren omtrent de drukking, die het warme lichaam van het gas ondervindt, en dat het dus niet onmogelijk zou zijn, wanneer die drukking aan het oppervlak van het lichaam verschilde van de drukking die in het gas heerscht. Want de stelling, waaruit wij met CLAUSIUS tot de gelijkheid van drukking door de geheele gasmassa besloten, welke stelling aldus luidde, dat door elke vlakte-éénheid loodrecht op de richting van warmte-geleiding in de tijds-éénheid een hoeveelheid positieve bewegingsgrootheid gaat, die overal in het gas dezelfde waarde heeft, moet blijven gelden, hoe na aan den warmen wand de beschouwde vlakte-eenheid ook gesteld worde. Want hoedanig ook de onbekende bewegingstoestand van het gas in de onmiddellijke nabijheid van den warmen wand zijn moge, aan de bovengenoemde stelling moet toch ook daar ter plaatse voldaan zijn, daar anders de toestand in de onmiddellijk aan den wand grenzende gaslagen geen stationnaire zou kunnen zijn. De drukking kan daarom vlak tegen den wand aan geen andere zijn dan op eenigen afstand van den wand.

Wanneer men nu reeds bij den stationnairen toestand van warmte-geleiding niet kan aangeven op welke wijze de molecülen van het gas en van het vaste oppervlak hare bewegingen uitwisselen, omdat men omtrent den aard dier bewegingen nog geheel in het onzekere is, zal dit natuurlijk in nog veel sterkere mate het geval zijn bij den veel gecompliceerderen en nog veel minder gekenden overgangstoestand, die den stationnairen voorafgaat. Het zal daarom dan ook niet vreemd gevonden kunnen worden, dat ik zooals ik reeds zeide aan mijne nu voor te

---

gelijke temperatuur veelal doet, kan worden berekend als de drukking van het gas op een vast oppervlak, kan bijv. hieruit blijken, dat VERDET, als hij in zijn *Théorie mécanique de la chaleur* de warmte-geleiding in een gas volgens CLAUSIUS behandelt, juist bij de berekening van de drukking in het gas in de fout vervalt van hierop niet te letten (l. c. t. II, § 277), en daardoor natuurlijk tot een verkeerde uitdrukking (F van § 279) komt voor die drukking. Dat die fout geen invloed heeft op zijn einduitkomsten, komt alleen hierdoor, dat hij later (in § 282), zonder het te zeggen, niet zijn eigen formule maar die van CLAUSIUS gebruikt.

dragen denkbeelden omtrent dien overgangstoestand geen volstrekte zekerheid maar hoogstens een zekere mate van waarschijnlijkheid meen te moeten toekennen, en de toepassing dier denkbeelden op den radiometer niet anders dan als een poging tot verklaring dier theoretisch nog zoo duistere verschijnselen meen te moeten beschouwen, volstrekt echter niet als een volledige theorie.

Zooals wij bij de bespreking van de tweede theorie van OSBORNE REYNOLDS gelegenheid hadden op te merken, zal, als een gas in aanraking komt met een vast oppervlak van hoogere temperatuur dan het gas, dit laatste op het oppervlak tijdelijk een grootere drukking uitoefenen. Eveneens, zal, wanneer een gas in aanraking komt met een vast oppervlak van lagere temperatuur dan het gas, dit laatste op het oppervlak tijdelijk een geringere drukking uitoefenen. Zoodra echter de stationnaire toestand van warmte-geleiding is ingetreden, houdt die vermeerdering of vermindering der drukking tegen het oppervlak op en wordt de drukking loodrecht op het oppervlak gelijk aan die evenwijdig daaraan. Wanneer echter, zooals naar ik geloof bij den radiometer en bij de andere toestellen van CROOKES het geval moet zijn, die stationnaire toestand verhinderd wordt op te treden door de noodzakelijk wegens de temperatuursverschillen in de gasmassa te gelijkertijd optredende gasstroomingen, dan zullen de deelen van het oppervlak der vaste voorwerpen, al naarmate zij warmer of kouder zijn dan het omringende gas, bij voortduring een grootere of een kleinere drukking van dat gas kunnen ondervinden, en dan zal misschien hierin de oorzaak gevonden zijn van de verschijnselen door CROOKES waargenomen bij de bestraling van lichte voorwerpen in verdunde gassen.

Wij nemen dus aan, dat een gas, als het in aanraking komt met een vast oppervlak van hoogere of lagere temperatuur gedurende korten tijd een grootere of geringere drukking op dat oppervlak uitoefent; en wij willen nu vooreerst nagaan, of zich wezenlijk de tot heden waargenomen bewegingen bij de radiometers hierdoor laten verklaren. Wij zullen daarbij in het oog moeten houden, dat die verandering van de drukking van het gas slechts een tijdelijke verandering is, en dat alleen

door aan te nemen, dat het tegen het vaste oppervlak gelegen gas voortdurend door stroomingen ververscht wordt, die verandering van drukking, welke het vaste oppervlak ondervindt, tot een voortdurende beweegkracht kan worden. Daaruit vloeit van zelf voort, dat de werking van die drukverandering des te grooter zal zijn, naarmate de gasstroomingen langs het vaste oppervlak krachtiger kunnen optreden. Verder zullen wij ter verklaring van sommige verschijnselen moeten aannemen, dat die werking op het vaste oppervlak des te grooter is, naarmate de temperatuur in het gas in de nabijheid van het oppervlak sneller verandert. Wij laten echter voorloopig in het midden, waaraan die grootere werking bij grooter temperatuurverval is toe te schrijven.

Bij den gewonen radiometer met verticale platte wieken en bij de toestellen van CROOKES door hem gebruikt om de grootte van de kracht te meten, waarmede een verticaal plaatje door de licht- en warmte-stralen schijnbaar afgestooten wordt, is het verschil in absorptie-vermogen der beide zijden van het plaatje de eerste oorzaak voor die schijnbare afstootende kracht der warmtestralen. Beide zijden van het plaatje verkrijgen door de bestraling een temperatuur hooger dan die van het omringende gas; langs beide zijden van het plaatje zullen daardoor gasstroomingen ontstaan. Die opstijgende gasmassaas zullen warmte van het plaatje overnemen en daarbij tijdelijk in den beschreven overgangstoestand verkeeren, gedurende welken zij een grootere drukking op het plaatje uitoefenen. Die overdruk van de opstijgende gasstroomingen zal echter niet aan beide zijden van het plaatje dezelfde zijn, maar zal grooter zijn aan die zijde, welke de hoogste temperatuur bezit. Ten eerste omdat de werking van den overdruk gedurende den overgangstoestand des te grooter is, naarmate de temperatuur van het vaste oppervlak meer verschilt van die van het omhulsel des radiometers, omdat daardoor het temperatuurverval in het gas een grootere waarde verkrijgt; en ten tweede omdat de gasstroomingen aan de warmere zijde een grootere snelheid zullen bezitten. Het verschil tusschen den op deze wijze verkregen overdruk op de beide zijden van het plaatje is volgens de zoo even door mij opgestelde zienswijze als de kracht te beschouwen, die in de CROOKES'sche toestellen zich

vertoont en die de wieken des radiometers in beweging brengt.

Doch het geval kan zich ook voordoen, dat het plaatje door uitstraling van warmte afkoelt onder de temperatuur van het omringende gas, dan zal ook het gas, dat tegen het plaatje aan ligt, in die afkoeling gaan deelen, doordat het daaraan warmte afgeeft. Daarvan zal het gevolg zijn, dat het gas een geringere drukking op het plaatje uitoefent dan wanneer het geen warmte daaraan afstond, en daar het gas tegen het plaatje door neêrdalende gasstroomingen telkens ververscht wordt, zal de oorzaak voor die geringere drukking een voortdurende zijn, zoolang de temperatuur van het plaatje maar lager blijft dan die van het omringende gas. Heeft nu de eene zijde van het plaatje een grooter uitstralingsvermogen dan de andere zijde, dan zal de eerste zijde sterker afkoelen dan de andere; de drukking tegen de eerste zijde zal sterker afnemen dan tegen de andere zijde, en er zal dus ook hier een verschil in drukking optreden, dat als beweegkracht kan werken. Ook hier evenals in het vorige geval werkt die kracht op de warmste of het minst afgekoelde zijde van het plaatje.

Op deze wijze laten zich naar mijne meening, al de waargenomen bewegingen bij een radiometer verklaren, waarvan de beide zijden der wieken een verschillend absorptie-vermogen voor de invallende stralen bezitten. Men moet daarbij echter niet over het hoofd zien, dat wanneer een der zijden voor stralen van bepaalde golflengte een grooter absorptie-vermogen bezit dan de andere zijde, dit voor stralen van andere golflengte somtijds juist omgekeerd kan zijn *).

---

*) Zoo hebben bijv. ALVERGNIAT en ZÖLLNER gevonden, dat bij een radiometer, waarvan de platte verticale wieken uit niet met zwartsel bedekt aluminiumblik bestaan dat aan de eene zijde met een dun plaatje mica bedekt is, de zin der draaiing verschillend is al naarmate de radiometer door licht- of door donkere warmte-stralen beschenen wordt, hetgeen waarschijnlijk hieraan is toe te schrijven, dat terwijl voor lichtstralen het aluminium een grooter absorptie-vermogen bezit dan het mica, dit voor donkere warmte-stralen juist omgekeerd is, zoodat voor deze stralen het mica een grooter absorptie-vermogen bezit dan het aluminium. ZÖLLNER, POGG. *Ann.* Bd. 160, S. 168. Ook de proeven van G. G. STOKES, beschreven in *Nature* van 27 Dec. 1877, vol. 17, p. 172, laten dien invloed van het verschillend absorptie-vermogen eener zelfde stof voor stralen van verschillende golflengte op de draaiingsrichting van de wieken des radiometers duidelijk zien. Zie ook CROOKES op verschillende plaatsen zijner verhandelingen, o. a. ook *Comptes rendus* 4 Fevrier 1878, t. 86, p. 323.

In de beschouwde gevallen verkregen de wieken een temperatuur hetzij hooger hetzij lager dan die van het omringende gas, en daardoor werden die wieken de plaatsen van waar de opstijgende of neërdalende gasstroomingen in den aanvang ten minste uitgaan. Geeft men echter het glazen omhulsel des radiometers een temperatuur hooger of lager dan die van het daarbinnen bevatte gas, dan zal dat glazen omhulsel de plaats van ontstaan zijn der optredende gasstroomingen. Denken wij ons het geval van een gewonen radiometer met aan de eene zijde met zwartsel bedekte verticale platte wieken van mica of aluminium, dan ziet men in het geval dat het glazen omhulsel warmer is dan de inhoud des radiometers een zoogenaamde abnormale draaiing optreden, dat wil zeggen de wieken ziet men draaien met de zwarte zijde vooraan. Hiervoor kunnen twee verschillende verklaringen worden gegeven. In de eerste plaats is het niet onmogelijk, dat voor de donkere warmte-stralen door het glazen omhulsel naar de wieken des radiometers uitgestraald het lampenzwart een geringer absorptie-vermogen bezit dan de niet met lampenzwart bedekte zijde van aluminium of mica. Dan zou deze laatste zijde zich sterker verwarmen dan de zwarte zijde en daardoor de grootste drukking van het koelere gas ondervinden. De wieken zouden daardoor in abnormale draaiing moeten geraken. Maar er is nog een tweede verklaringswijze mogelijk. Door de hoogere temperatuur van het omhulsel verwarmt zich het daartegen gelegen gas en geraakt daardoor in strooming. Deze door het omhulsel verwarmde gasmassa zal, als zij langs de wieken stroomt, aan deze warmte afgeven; maar daar de met lampenzwart bedekte zijde der wieken door de grootere ruwheid van haar oppervlak aan het gas een grooter oppervlak aanbiedt dan de andere gladde zijde, zal de eerste zijde de warmte van het gas sneller overnemen, en hiervan zal het gevolg zijn, dat de gasstroomen in sterker mate hun weg nemen langs de zwarte dan langs de glimmende zijde der wieken. De warmte-overgang van het gas op de wiek zal dus grooter zijn aan de zwarte zijde, de drukking zal daarom aan deze zijde het sterkst moeten verminderen, en een abnormale draaiing zal daarvan het gevolg moeten zijn.

In het beschreven geval is het twijfelachtig welke van de

beide verklaringswijzen de juiste is. Er zijn echter gevallen, waarbij mijns inziens de verschijnselen alleen op de laatstgenoemde wijze te verklaren zijn. STOKES heeft waargenomen, *) dat, wanneer de wieken bestonden uit metalen plaatjes, waarvan de eene zijde glad was en de andere zijde hetzij met een scherp mes bekrasd, hetzij op electrolytischen weg met een laagje fijn verdeeld metaal bedekt, de laatste of ruwere zijde de rol op zich nam van de zwarte zijde in den gewonen radiometer. Hier kan van een temperatuursverschil der beide zijden van de geheel uit een metaal bestaande wiek geen sprake zijn. De ruwere zijde bezit echter door hare ruwheid een grooter oppervlak en moet daarom de warmte sneller afgeven aan of opnemen van de aangrenzende gaslaag dan de andere gladde zijde, de gasstroomingen nemen daardoor in sterker mate hun weg langs eerstgenoemde zijde, en de door den warmte-overgang van de wiek op het gas veroorzaakte verandering in de drukking zal daarom aan de ruwe zijde het grootst zijn. Stijgt de temperatuur der wieken door bestraling boven die van het omringende gas, dan zullen dus de wieken gaan draaien met de ruwe zijde achteraan. Daalt daarentegen de temperatuur der wieken door uitstraling beneden die van het gas, dan zal een draaiing moeten optreden met de ruwe zijde vooraan.

Een soortgelijke verklaringswijze past ook bij de verschijnselen door CROOKES, ZÖLLNER en anderen waargenomen bij radiometers met gebogen wieken. ZÖLLNER bijv. †) gaf aan de wieken den vorm van halfbolvormige schalen geheel overeenstemmende met die van een anemometer, verder dien van holle kegels of halve holle cilinders. Niettegenstaande hier de beide oppervlakken alleen in vorm verschillen, maar in aard en absorbeerend vermogen volkomen gelijk zijn, niettegenstaande hier van geen temperatuursverschil sprake kan zijn, wanneer ten minste de wieken uit dun, aan beide zijden glad, aluminiumblik bestaan, komen ook deze wieken bij bestraling in draaiende beweging. De convexe zijde dezer wieken neemt

---

*) *Nature* van 17 Jan. 1878, vol. 17, p. 234.

†) l. c.

de rol op zich van de meest absorbeerende zwarte zijde van de wieken eens gewonen radiometers. Door licht bestraald nemen de wieken een hoogere temperatuur aan dan het omringende gas, en gaan daardoor draaien met de concave zijde vooraan, dus in omgekeerde richting van de wieken des anemometers onder den invloed van den wind *). Daalt de temperatuur der wieken, door uitstraling bijv., onder die van het omringende gas, dan gaan zij draaien met de convexe zijde vóóraan.

De ware oorzaak der beweging is hier volgens onze theorie weder deze, dat de warmte-overgang tusschen de wieken en het gas niet aan beide zijden der wieken even groot is. Zijn de wieken warmer dan de omgeving, dan geven beide zijden der wieken warmte af aan het daartegenaan gelegen gas. Hiervan zijn gasstroomingen het noodzakelijk gevolg, maar die gasstroomingen zullen aan de convexe zijde in veel sterker mate moeten optreden dan aan de concave zijde. Aan de convexe zijde kunnen de verticale luchtstroomingen veel gemakkelijker plaats hebben dan aan de concave zijde, waar de lucht in de holte meer blijft hangen. Voorts is de convexe zijde meer gekeerd naar het koele omhulsel van den radiometer, en zoowel om deze reden als ook om den bijzonderen vorm der wiek zal in de richtingen loodrecht op het oppervlak der wiek de temperatuur in het tegen dat oppervlak aan gelegen gas veel sneller veranderen aan de convexe dan aan de concave zijde; het temperatuurverval in het gas zal veel grooter zijn aan de eerste dan aan de laatste zijde en de tijdelijke overdruk gedurende den overgangstoestand zal daarom aan de convexe zijde een grootere werking moeten uitoefenen dan aan de concave zijde. Volgens onze theorie zal dus de overdruk aan de convexe zijde een veel

---

*) ZÖLLNER ziet in dit feit een bewijs tegen de theorie, die de bewegingen in den radiometer verklaart door de directe werking der gasstroomingen zooals dit bijv. in de theorie van NEESEN geschiedt; want zegt ZÖLLNER, dan moesten de wieken dezer radiometers zich in dezelfde richting bewegen als dit bij den anemometer plaats heeft. Met deze redeneering van ZÖLLNER kan ik wel medegaan. Wanneer hij echter in de verschijnselen bij deze soort radiometers argumenten ziet voor zijn verdampings- of emissie-theorie, dan kan ik niet met hem instemmen, daar ik geloof, dat deze verschijnselen zich nog veel eenvoudiger en beter door onze theorie laten verklaren.

grootere waarde moeten hebben dan aan de concave zijde, zoodat wij in dien grooteren overdruk aan den eenen kant der wiek de kracht hebben, die de wiek in beweging brengt. In het geval dat de wieken kouder zijn dan de omgeving is de verklaring der waargenomen beweging volkomen analoog. Aan de convexe zijde zal dan de drukking van het gas sterker verminderen dan aan de concave zijde, omdat de neêrdalende gasstroomingen voornamelijk aan de eerstgenoemde zijde zullen optreden, en het temperatuurverval in het gas aan die zijde grooter zal zijn. Dat, wanneer op eenigerhande wijze het glazen omhulsel een hoogere temperatuur verkrijgt dan de inhoud des radiometers, de wieken, zooals door ZÖLLNER is waargenomen, gaan draaien met de convexe zijde vóóraan, is ook zeer gemakkelijk uit onze theorie te verklaren. De wieken verwarmen zich dan allengs gedeeltelijk door straling, gedeeltelijk door geleiding en gedeeltelijk door gasstroomingen. Het gas aan het omhulsel verwarmd komt in strooming en zal met de koudere wieken in aanraking komen en aan deze warmte afgeven. Het stroomt echter gemakkelijker en daarom in ruimere mate langs de convexe dan langs de concave zijde der wieken, en tevens verandert aan de eerstgenoemde zijde de temperatuur in het gas sneller met den afstand dan aan de concave zijde. De convexe zijde ondervindt daardoor de grootste vermindering van drukking en gaat daarom bij de draaiing vóóraan.

ZÖLLNER en CROOKES hebben hunne proeven met radiometers met gebogen wieken nog zoodanig gewijzigd, dat er ook bij deze wieken een temperatuursverschil tusschen de beide zijden kon optreden, door een of beide zijden der wieken met een laagje lampenzwart te bedekken. Men verkrijgt dan twee verschillende invloeden, die een draaiing kunnen bewerken, een invloed van het verschil in temperatuur en een invloed van het verschil in vorm van de beide oppervlakken der wiek. Ook deze meer gecompliceerde verschijnselen zijn volkomen in overeenstemming met onze theorie.

Bij een proef van ZÖLLNER bijv. *) werden bij een radiometer met twee halfcilindervormige wieken uit aluminiumblik

*) l. c. S. 164.

deze aan beide zijden, de convexe zoowel als de concave, met lampenzwart gelijkmatig bedekt. Met behulp van een scherm kon men de lichtstralen op slechts een der helften van den radiometer laten vallen, zoodat hetzij alleen de concave hetzij alleen de convexe zijden der wieken beschenen werden. In beide gevallen werd afstooting van de beschenen zijde der wiek waargenomen. In het eerste geval werd een draaiing verkregen met de convexe zijde vóóraan, in het tweede geval eene met de concave zijde vóóraan De draaiingssnelheid was echter in het tweede geval veel grooter dan in het eerste. Dit is alles volkomen in overeenstemming met onze theorie. Wij hebben hier een invloed van den vorm der wieken en een invloed van een temperatuursverschil tusschen de beide zijden der wieken, want bij de aan beide zijden met roet bedekte aluminiumwieken zal wegens het geringe geleidingsvermogen der roetlagen de beschenen zijde een hoogere temperatuur verkrijgen dan de andere zijde. Nu zullen in het tweede geval, wanneer de convexe zijde beschenen wordt, de beide invloeden van den vorm en van het temperatuursverschil in denzelfden zin werken, en daarom een snelle draaiing teweegbrengen. In het eerste geval werken de beide invloeden elkander tegen, wij krijgen daarom een langzame draaing in den zin, waarin de sterkste der beide invloeden werkt, die hier blijkt de invloed van het temperatuursverschil te zijn; het komt mij echter volstrekt niet onmogelijk voor, dat in andere gevallen de invloed van den vorm de overhand zou kunnen hebben.

Bij deze halfcilindervormige wieken schijnen de gasstroomingen wel in veel sterker mate langs de convexe dan langs de concave zijde op te treden; maar men moet ter verklaring der beschreven verschijnselen aannemen, dat die gasstroomingen ook aan de concave zijde hun invloed nog vrij krachtig doen gevoelen, hetgeen ook bij dezen vorm van wieken volstrekt niet te verwonderen is. Bij radiometers met komvormige of halfbolvormige wieken zullen de stroomingen aan de concave zijde veel moeielijker kunnen optreden en waarschijnlijk bijna geheel ontbreken. Bij deze soort wieken schijnt dan ook aan de concave zijde de invloed der stroomingen bijna tot nul gereduceerd te zijn, en hangt de overdruk aan de convexe zijde bijna

alleen af van het verschil tusschen de temperatuur van deze zijde en die der omgeving. Dit blijkt uit sommige waarnemingen van CROOKES *). Beschouwen wij die beschreven op de eerste aangehaalde plaats onder N⁰. 1035, 37, 38 en 39. In N⁰. 1035 hebben wij een radiometer met twee komvormige wieken, uit dun metaalblad die tegenovergesteld gericht en aan beide zijden glimmend zijn. Dat deze radiometer, wanneer het licht slechts op de concave of slechts op de convexe zijde valt, hetgeen door middel van een scherm kan verkregen worden, in elk geval met ongeveer de halve snelheid draait van die, wanneer het licht op beide zijden valt, vindt hierin zijn gereede verklaring, dat de temperatuursverhooging van de wieken in elk der beide eerste gevallen slechts de helft bedraagt van die in het laatste geval, omdat in het laatste geval elk der wieken voortdurend, in de beide eerste gevallen daarentegen slechts gedurende den halven tijd beschenen wordt. De wieken hebben hier aan beide zijden gelijke temperatuur; welke der beide zijden beschenen wordt, de concave of de convexe, heeft op de grootte van de daardoor ontstaande temperatuursverhooging der wiek geen invloed

In N°. 1037 hebben wij denzelfden radiometer, maar de wieken zijn aan de concave zijde met lampenzwart bedekt. In het licht heeft draaiing plaats met de convexe zijde achteraan. Valt het licht slechts op de glimmende convexe zijde dan wordt geen beweging verkregen; maar wanneer het alleen op de zwarte concave zijde valt, treedt beweging op in de aangegeven richting. Dat de werking hier, als het licht alleen op de glimmende convexe zijde invalt, niet groot genoeg is om beweging voort te brengen, moet mijns inziens hieraan worden toegeschreven, dat in dit geval de temperatuursverhooging van de wiek uiterst klein zal zijn. De beschenen glimmende zijde heeft slechts een klein absorptie-vermogen en neemt daarom betrekkelijk weinig warmte op, en die warmte zal wegens het groote uitstralingsvermogen van de niet beschenen zwarte concave zijde der wiek zeer snel weder worden afgegeven. Wordt daarentegen de zwarte concave zijde beschenen, dan wordt veel

*) *Phil. Mag.* (5) vol. 3, pp. 475—6, of vol. 5, p. 71.

warmte door de wiek opgenomen, en de convexe zijde zal door geleiding zooveel warmte van de sterk verhitte concave zijde ontvangen, dat hare temperatuur aanmerkelijk stijgt boven die der omgeving. Wel is waar zal de temperatuur aan de concave zijde hooger zijn dan aan de convexe, maar daar langs de concave zijde het gas bijna niet in strooming komt, zal die hoogere temperatuur aan deze zijde bijna geen invloed hebben op de beweging van den radiometer. Dat de werking van het licht in dit geval zooveel krachtiger is, wanneer de concave dan wanneer de convexe zijde beschenen wordt, schrijf ik dus hieraan toe, dat de laatstgenoemde zijde in het eerste geval veel meer in temperatuur stijgt dan in het tweede geval.

In n°. 1038 zijn de convexe zijden met lampenzwart bedekt, de concave niet. Door licht wordt snelle draaiing voortgebracht met de convexe zijde achteraan. Geen draaiing werd waargenomen, wanneer het licht slechts op de glimmende concave zijde viel, een fiksche draaiing wanneer het licht de zwarte convexe zijde bescheen. De verklaring dezer verschijnselen is volkomen gelijk aan die van het vorige nummer.

Eveneens behoef ik niet stil te staan bij de verklaring van het in n°. 1039 beschrevene. Hier zijn beide zijden van de wieken des radiometers met lampenzwart bedekt. Beweging werd verkregen met de concave zijde vooraan, hetzij het licht beide zijden of slechts een der zijden bescheen. In het eerste geval was echter de beweging sterker.

Al de voorafgaande door CROOKES bij komvormige radiometers waargenomen verschijnselen vinden dus in de door ons voorgestelde oorzaak hun gereede verklaring, wanneer men er slechts op let, dat, daar de gasstroomingen bijna uitsluitend aan de convexe en bijna niet aan de concave zijde der wieken kunnen optreden, de draaiingssnelheid des te grooter zal zijn, naarmate de *convexe* zijde een hoogere temperatuur heeft, en dat die snelheid slechts weinig afhangt van de temperatuur, die de *concave* zijde bezit. Bij een bepaalde temperatuursverhooging der convexe zijde, zal de draaiingssnelheid waarschijnlijk wel des te grooter zijn, naarmate de temperatuur der concave zijde lager is, omdat de invloed der gasstroomingen op de concave zijde wel zeer gering maar niet volkomen nul

zal zijn; maar een hooger zijn van de temperatuur der convexe zijde zal op de draaiingssnelheid van veel grooteren invloed zijn dan een groot temperatuursverschil tusschen de beide zijden.

Deze door CROOKES waargenomen verschijnselen zijn naar mij voorkomt, met geen der vroegere theorien goed en ongedwongen in overeenstemming te brengen, terwijl zij in onze theorie een zeer eenvoudige verklaring vinden.

Wanneer een der vier voorgaande radiometers van CROOKES bedekt wordt door een warme glazen klok of gedompeld wordt in warm water, dan verkrijgt men volgens CROOKES altijd een draaiing tegengesteld aan die door het licht voortgebracht; omdat de donkere warmtestralen van zeer groote golflengte sterk door het glazen omhulsel geabsorbeerd worden, en daardoor dat omhulsel een hoogere temperatuur verkrijgt dan de wieken. Wanneer na eenigen tijd de warmte-bron wordt weggenomen begint weldra een draaiing in tegengestelden zin, d. i. in denzelfden zin als onder den invloed van het licht, doordat nu in de eerste plaats het glazen omhulsel en daarna eerst de door het voorafgaande proces verwarmde wieken gaan afkoelen, zoodat gedurende dit tweede gedeelte van het proces de wieken weder een temperatuur hebben boven het omhulsel evenals bij de bestraling door licht het geval is. Ook bij afkoeling van een der radiometers door middel van ether verkreeg CROOKES natuurlijk weder eene draaiing in dezelfde richting als bij bestraling met licht. Het onderscheid tusschen de verschijnselen bij de bestraling met licht en de laatst behandelde verschijnselen, waarbij een draaiing in denzelfden zin als bij de bestraling met licht verkregen werd, is eenvoudig dit, dat in het eerste geval de wieken verhit worden boven het omgevende gas, in de andere gevallen het omhulsel des radiometers afgekoeld wordt onder den inhoud des radiometers. In het eerste geval ontstaan de gasstroomingen dus tegen de wieken, in de andere gevallen tegen het glazen omhulsel aan, maar in beide gevallen is het de overgang van warmte uit de wieken op het daar langs stroomende koelere gas, welke als bewegingsoorzaak moet worden aangezien *).

*) Ik heb hier slechts eenige der meest belangrijke door CROOKES beschreven verschijnselen aan de door mij voorgestelde theorie getoetst. Ook die door hem

Crookes heeft verder gevonden, dat de wieken des te sneller ronddraaien, naarmate het radiometervat kleiner is, de wand des radiometers zich dus dichter bij de wieken bevindt. Hij bevestigde voorts in zijn wringingsbalans aan een der armen een plaatje mica, dat aan de eene zijde met zwartsel bedekt was, en plaatste tegenover de zwarte zijde en evenwijdig daaraan een plaat heldere mica, waarvan hij den afstand tot de zwarte zijde van het bewegelijke mica-plaatje naar willekeur kon wijzigen. Liet hij nu licht vallen op de zwarte zijde, dan kreeg hij afstooting, waarvan hij de grootte door middel van zijn wringings-

---

beschreven *Phil. Mag.* (5) vol. 3, pp. 474—5 zijn echter geheel met die theorie in overeenstemming. Men moet altijd slechts hierop letten, dat beweging in den radiometer kan optreden óf door een temperatuursverschil tusschen de beide zijden der wieken, óf wanneer beide zijden der wieken dezelfde temperatuur bezitten, doordat de gasstroomingen sterker haar weg nemen langs de eene dan langs de andere zijde der wieken of het temperatuurverval in het gas aan de eene zijde grooter is. Deze verschillende invloeden, die de beweging in den radiometer kunnen teweegbrengen, kunnen ook gelijktijdig werkzaam zijn, en kunnen dan met elkander in denzelfden zin samenwerken of elkander tegenwerken. Op bladz. 474 van de aangehaalde plaats van crookes vindt men een fraai voorbeeld, hoe de verschillende invloeden elkanders werking juist kunnen opheffen, zoodat de resulteerende werking nul is.

In de *Sitzungsberichte d. Wiener Akad.*, Juli 1877, Bd. 76, S. 226 komt de beschrijving voor van een radiometer door j. puluj, waarmede ik eerst na het schrijven van mijn opstel in kennis ben gekomen. In een noot vermeldt hij, dat kundt een radiometer heeft vervaardigd, waarvan de wieken in plaats van uit een bolvormige schaal uit soliede halve bollen van vlierpit bestonden. Deze wieken bewogen zich met de vlakke zijde der halve bollen vooraan. Puluj meent hiervan de verklaring te vinden in de wrijving van de luchtstroomingen tegen de wieken, welke verklaring mij voorkomt niet onmogelijk te zijn. Ik geloof echter, dat de door kundt waargenomen beweging ook wel met mijne zienswijze in overeenstemming te brengen is. Op het eerste gezicht schijnt zij daarmede in strijd, want bij de proef van kundt zullen de verticale luchtstroomingen zeker niet minder sterk langs de platte verticale zijde dan langs de bolvormige convexe zijde plaats hebben. Dat toch de laatste zijde den grootsten overdruk van het gas ondervindt moet misschien worden toegeschreven, in de eerste plaats hieraan, dat de temperatuur in het gas aan de convexe zijde sneller verandert, dat het temperatuurverval ten minste langs een deel dier zijde grooter is, en ten tweede hieraan, dat de luchtstroomingen alleen of ten minste het krachtigst hun overdruk uitoefenen op die deelen van het oppervlak, waarmede zij het eerst in aanraking komen. Terwijl nu aan de vlakke verticale zijde dit deel zich bepaalt tot de onderste helft van den cirkelvormigen rand dier zijde, zal aan de convexe zijde het deel van het oppervlak, waartegen de opstijgende luchtstroomen direct aankomen en waarop zij daarom een overdruk uitoefenen, veel grooter zijn. Om deze redenen zal wellicht de geheele overdruk aan de convexe zijde het kunnen winnen over dien aan de vlakke zijde.

balans kon meten. Die afstooting vond hij bij een bepaalden graad van verdunning van het gas des te grooter, naarmate de mica-plaat dichter bij de zwarte zijde zich bevond. Wanneer hij den afstand tusschen de vaste mica-plaat en de bewegelijke zwarte zijde zeer klein maakte, kon hij nog een afstooting waarnemen bij betrekkelijk groote drukkingen; bij een druk van ongeveer 100 mm. had hij bijv. nog een meetbare afstooting, wanneer die afstand 3 mm. bedroeg, en bij nog veel grootere drukkingen, ja zelfs bij de atmospherische drukking was die afstooting nog te bespeuren, wanneer hij dien afstand nog veel kleiner maakte *).

Op deze verschijnselen kom ik later terug. Op het oogenblik zij slechts opgemerkt, dat zij schijnen te bewijzen, dat de werking van het langs de wieken stroomende gas des te grooter is, naarmate de temperatuur in het gas sneller verandert.

Wij hebben vroeger bij de bespreking der theoriën van MEIJER en van NEESEN als onze meening uitgesproken, dat de directe werking der stroomingen, zooals die door de beide genoemde natuurkundigen wordt opgevat, niet als de beweegkracht bij de gewone radiometers kan worden aangezien. Daarmede hebben wij echter volstrekt niet willen beweren, dat die directe werking der stroomingen nooit eenigen invloed heeft, welke ook de inrichting des radiometers moge zijn. Wanneer men bijv. de platte wieken des radiometers niet verticaal stelt, maar meer of minder ten opzichte van den verticalen stand doet hellen, dan zou die directe werking der stroomingen wellicht als beweegkracht kunnen optreden. Opstijgende gasstroomen zouden zulke hellende wieken in den eenen zin, neêrdalende gasstroomen zouden haar in den tegenovergestelden zin in beweging kunnen brengen; en zij zouden dit kunnen doen, óf volgens NEESEN's zienswijze door hun directe stootwerking tegen de wieken, óf, hetgeen meer ofschoon niet geheel met MEIJER's zienswijze zou overeenstemmen, door de wrijving, welke zij tegen de wieken zouden uitoefenen, waardoor zij deze met zich zouden kunnen medevoeren. Al naarmate de eene of andere zienswijze de juiste

---

*) *Phil. Mag.* (5), vol. 3, p. 471 and 473.

was, zou men dan bij een bepaalde stroomingsrichting van het gas een verschillende bewegingsrichting der wieken moeten verkrijgen. Om ons tot de opstijgende gasstroomen te bepalen, deze zullen volgens de eerste zienswijze tegen de onderzijde der wieken hun drukking uitoefenen, en die wieken dus in zulk een richting in beweging moeten brengen, dat de bovenzijde der wieken vooraan gaat. Schreef men daarentegen de werking der luchtstroomen op de wieken toe aan de wrijving, die zij langs de wieken strijkende op deze uitoefenen, dan zouden de wieken door de opstijgende gasstroomen een beweging moeten aannemen met de onderzijde vóóraan.

Verschillende natuurkundigen hebben radiometers met zulke hellende platte wieken vervaardigd. Beschouwen wij slechts een paar proeven door ZÖLLNER met zoodanige radiometers genomen, en gaan wij daarbij na, of wij bij de verklaring der daarbij waargenomen verschijnselen de directe werking der gasstroomingen noodig hebben, of dat wij ook zonder haar uit de door ons voorgestelde oorzaak die verschijnselen kunnen verklaren.

ZÖLLNER liet een radiometer vervaardigen, waarvan de vier wieken uit doorzichtige, niet zwart gemaakte, vlakke mica-plaatjes bestonden, die om een hoek van ongeveer 35^0 ten opzichte van den horizon helden. Dit kruis van wieken vertoonde alleen, op dezelfde wijze als de gewone radiometerkruisen in een glazen vat gesloten, zelfs in den sterksten zonneschijn geen draaiende beweging. Werd echter zoo dicht mogelijk daaronder een schijf van blank aluminium horizontaal aangebracht, dan draaide het kruis zelfs bij sterk bedekten hemel even snel als de gevoeligste radiometer. De draaiingsrichting is een zoodanige, alsof de onderzijde der hellende wieken afgestooten werd *).

---

*) *Pogg. Ann.* Bd. 160, S. 166. ZÖLLNER kreeg later bij deze proef dezelfde uitkomsten, wanneer hij de onder het bewegelijke radiometer-kruis aangebrachte aluminiumschijf verving door een horizontale in een cirkel gebogen platinum- of aluminiumdraad, en dezen hetzij door middel van zonnelicht, hetzij door middel van een galvanischen stroom verwarmde. Bij gebruik van den galvanischen stroom verkreég hij echter bij een bepaalden graad van verdunning een tegengestelde draaiing van het radiometerkruis, terwijl hij bij grootere en bij kleinere dichtheid van het gas de draaiing in de gewone richting waarnam. Daar hij die abnormale draaiing alleen verkreeg bij gebruik making van den galvanischen stroom en nooit bij verwarming der draden door het zonnelicht, zou men bijna

Het kan in dit geval alleen de door de bestraling veroorzaakte verwarming van de aluminiumschijf zijn boven de temperatuur der omgeving, waardoor de beweging van het radiometerkruis wordt veroorzaakt. Maar hoe heeft dit plaats? Zeker niet door de wrijving van de van de aliminiumschijf opstijgende luchtstroomen tegen de onderzijde der wieken, want daardoor zou een beweging in tegengestelden zin van de waargenomene worden voortgebracht. Door directe stootwerking dier luchtstroomen tegen de onderzijde der wieken zou daarentegen een beweging in den waargenomen zin moeten ontstaan. Die stootwerking der luchtstroomen zal echter worden tegengewerkt, doordat de onderkant der mica-plaatjes warmte van die langs hen strijkende warme luchtstroomen opneemt, want die warmteovergang uit het gas op de onderzijde der mica-plaatjes zou een beweging in tegengestelden zin ten gevolge moeten hebben. Welke dezer beide tegengestelde werkingen de grootste zal zijn, is niet a priori aan te geven. Bij de radiometers met verticale wieken kunnen verticale stroomingen weinig werking uitoefenen, maar bij die met hellende wieken is dit geheel anders. Bij deze is het niet onmogelijk, dat de directe stootwerking der stroomingen zelfs in het zoozeer verdunde gas groot genoeg is om de tegengestelde werking van den warmte-overgang uit het gas op de wieken te overwinnen, en de waargenomen beweging voort te brengen. Het zou ook kunnen wezen, dat de onderzijde der hellende mica-plaatjes, door absorptie van de donkere warmte door de verwarmde aluminiumplaat uitgestraald, een temperatuur verkreeg boven die van het omgevende gas, want mica absorbeert wel niet zeer veel licht, daarentegen veel donkere warmte.

---

tot het besluit komen, dat die normale draaiing met een of andere werking van den galvanischen stroom samenhangt. Daar wij echter omtrent de oorzaak dier abnormale draaiing zelfs geen slechts eenigszins waarschijnlijke gissing kunnen maken, wenschen wij er ons niet verder mede bezig te houden, en verwijzen de belangstellenden naar ZÖLLNER's tweede en derde verhandeling, *Pogg Ann.* Bd. 160, SS. 297 u. 459.

Eene soortgelijke nog meer gecompliceerde proef is door CROOKES beschreven, *Comptes rendus*, 4 février 1878, T. 86, p. 325. Het is opmerkelijk, dat bij vroegere proeven van CROOKES, waarbij hij ook van een galvanischen stroom gebruik maakte, soortgelijke onregelmatigheden als de hier beschrevene optraden, *Phil. Trans.* 1875, vol. 165, pp. 528—532.

Ook hierdoor zou een beweging van de wieken in den waargenomen zin te verklaren zijn. Hebben wij reeds twee mogelijke oorzaken voor de waargenomen beweging gevonden, nog een derde verklaringswijze schijnt mij toe te bestaan. De horizontale vaste aluminiumschijf verhit zich boven de temperatuur der omgeving en geeft warmte aan de boven zijn oppervlak gelegen lucht af. Die lucht stijgt daardoor naar boven en wordt telkens door toestroomende koelere lucht vervangen, en daardoor ondervindt het bovenvlak der aluminiumschijf ten minste in de nabijheid van den rand voortdurend een grootere drukking. Door die grootere drukking kan echter de aluminiumschijf niet in beweging komen, want zij is onbewegelijk en de drukking werkt daarenboven in een richting loodrecht op de schijf. Maar wanneer een gas een grootere drukking uitoefent op een vast oppervlak, en dit oppervlak kan aan die drukking geen gehoor geven doordat het onbewegelijk is, dan zal wegens de gelijkheid van werking en terugwerking, het gas zelf in beweging moeten komen en wel in sterker beweging, dan wanneer het vaste oppervlak door de grootere drukking zich wel in beweging had gesteld. De moleculen van het tegen de bovenzijde der aluminiumschijf gelegen gas zullen dus wegens de onbewegelijkheid der aluminiumschijf een grootere hoeveelheid van beweging van beneden naar boven van die schijf ontvangen, dan wanneer de schijf aan de grootere drukking dier lucht gehoor had kunnen geven. Die grootere hoeveelheid van beweging verticaal naar boven plant zich door de lucht voort tot de mica-plaatjes en werkt op de onderzijde dier mica-plaatjes als bewegende kracht. Hoe dichter de mica-plaatjes zich bij de aluminiumschijf bevinden, hoe krachtiger deze werking zal moeten zijn, omdat de hoeveelheid van beweging bij hare voortplanting van de schijf naar de plaatjes van gasmolecule tot gasmolecule dan minder gelegenheid heeft zich te verstrooien *).

---

*) Deze wijze van verklaring is niet nieuw. Zij is o. a. reeds door SCHUSTER gebruikt, om te verklaren, waarom het bewegelijk opgehangen glazen omhulsel des radiometers in beweging komt, wanneer het radiometerkruis door een of andere kracht verhinderd wordt in draaiende beweging te komen. SCHUSTER ziet echter evenals REYNOLDS over het hoofd, dat tevens gasstroomingen vereischt worden, daar bij een stationnairen toestand van warmte-geleiding zonder stroo-

Drie verschillende mogelijke oorzaken van de waargenomen beweging hebben wij dus reeds gevonden, en het is moeilijk in een zoo gecompliceerd geval als dit een dier oorzaken met zekerheid als de ware of ten minste als de hoofdoorzaak aan te wijzen. Dat de laatste behandelde oorzaak in dit bijzondere geval als hoofdoorzaak beschouwd moet worden, daarvoor zou eenigszins pleiten, dat men, naar het mij voorkomt, slechts door haar een verklaring kan vinden voor de door ZÖLLNER waargenomen beweging bij de omkeering van bovengenoemde proef *). Hij stelde namelijk een vast radiometerkruis van vier, niet met zwartsel bedekte, hellende aluminiumwieken onder een bewegelijke horizontale mica-schijf. Onder den invloed van het licht geraakt de schijf in snelle draaiing in eene richting, alsof van de bovenzijde der hellende mica-plaatjes een afstootende kracht uitging in een richting normaal op het mica-plaatje. Alleen door de laatstgenoemde oorzaak kan men, meen ik, van deze beweging een verklaring geven, maar door haar dan ook een geheel voldoende verklaring.

Niet al de door ZÖLLNER bij deze radiometers waargenomen bewegingen laten zich echter op deze laatste wijze verklaren. Niet bijv. dat bij de eerste inrichting van den radiometer, waarbij het bewegelijke radiometerkruis zich boven de vaste aluminiumschijf bevindt, het kruis in de tegengestelde richting van vroeger gaat draaien, wanneer men niet zooals toen zonnelicht op den radiometer laat vallen, maar het glazen omhulsel van boven met de warme hand aanraakt †). In dit geval kan de overgang van warmte van de bovenzijde van het glazen omhulsel op het aanliggende gas volgens onze theorie niet als voortdurende bewegings-oorzaak worden aangezien, want daar het tegen die

---

mingen de hier waargenomen krachten waarschijnlijk niet kunnen optreden. Deze verklaringswijze moet ook worden toegepast op een proef van SALET (*Comptes rendus*, 1876, II, t. 83, p. 969) en op vele proeven van CROOKES, o. a. op de meeste der verschijnselen bij de door hem vervaardigde toestellen, waaraan hij den naam van otheoskoop gegeven heeft (*Phil. Mag.* (5) vol. 5, p. 69.). Sommige otheoskopen van CROOKES hebben een merkwaardige overeenkomst met den hier beschreven radiometer van ZÖLLNER.

*) l. c. S. 296.

†) l. c. S. 168.

bovenzijde aanliggende gas het meest verwarmde is, kunnen er geene stroomingen ontstaan, en kan dat gas daarom niet door koeler gas telkens vervangen worden, hetgeen voor het voortduren dezer oorzaak een vereischte zou zijn. Van een invloed van gasstroomingen, die van de aluminiumschijf zouden opstijgen, kan hier ook geen sprake zijn, want daar het aluminium voor de donkere warmtestralen een kleiner absorbeerend vermogen bezit dan het mica, zal ook de aluminiumschijf geen hoogere temperatuur aannemen dan de mica-plaatjes en dus ook niet tot opstijgende luchtstroomen kunnen aanleiding geven. Het komt mij voor, dat men de waargenomen beweging in dit geval kan verklaren door aan te nemen, dat de door den bovenkant van het glazen omhulsel uitgestraalde donkere warmte de bovenzijde der hellende mica-wieken in temperatuur doet stijgen, en daardoor een overdruk van het tegen die bovenzijde verwarmde en daarlangs opstijgende gas op die zijde der wiek wordt teweeggebracht. Wij hebben hier dan dezelfde oorzaak van beweging als die welke wij als tweede der mogelijke bewegingsoorzaken behandeld hebben bij de eerst beschrevene proef met dezen radiometer, en zouden hierin dus een reden kunnen vinden, om ook bij die vorige proef deze oorzaak als de hoofdoorzaak te beschouwen.

Bij de tweede inrichting des radiometers, waarbij een bewegelijke mica-schijf zich boven een vast kruis van hellende aluminium-wieken bevond, kreeg ZÖLLNER een draaiing der mica-schijf in de tegenovergestelde richting van vroeger, wanneer hij in plaats van zonnelicht op den radiometer te doen vallen, het glazen omhulsel van onderen met de warme hand aanraakte *). Bij de verklaring van de hier waargenomen beweging kan men zich geloof ik van de vroeger als nummer drie beschreven mogelijke bewegingsoorzaak bedienen. De verwarmde onderkant van het glazen omhulsel geeft warmte af aan het daartegenaan gelegen gas. Dit gas, hetgeen, daar de

---

*) l. c. S. 298. Onze verklaring in dit geval stemt eigenlijk geheel overeen met die door ZÖLLNER zelven gegeven, wanneer men slechts voor „de loodrecht op hun oppervlak door de wanden uitgezonden *deeltjes*" van ZÖLLNER in de plaats stelt: „de loodrecht op hun oppervlak door de wanden aan de gasmoleculen medegedeelde *hoeveelheid van beweging*."

verwarming hier van onderen plaats heeft, telkens door ander gas door middel van stroomingen kan vervangen worden, kan daardoor een voortdurenden overdruk op het glazen omhulzel uitoefenen. Maar dit laatste kan door dien overdruk niet in beweging komen, het zal daarom aan het gas een grootere hoeveelheid van beweging mededeelen, welke door het gas naar de mica-schijf wordt voortgeplant. De hellende aluminium-wieken werken hier als schermen ten opzichte van de door de wanden aan het gas medegedeelde hoeveelheid van beweging en verzwakken daarvan die componenten welke loodrecht op haar oppervlak gericht zijn, zoodat de componenten evenwijdig aan het oppervlak der wieken het overwicht verkrijgen en de mica-schijf in beweging brengen. Misschien dat de beweging der mica-schijf nog eenigszins bevorderd wordt door de directe werking der van de verhitte glaswanden opstijgende luchtstroomen, die door de hellende wieken zulk een richting verkrijgen, dat zij de beweging der mica-schijf in de waargenomen richting bevorderen kunnen. De verwarming der hellende wieken boven de temperatuur der omringende lucht zal hier wel niet geacht kunnen worden tot de beweging mede te werken, omdat het aluminium der wieken een geringer absorptie-vermogen bezit voor de donkere warmtestralen dan het mica Die verwarming zou ook een beweging der schijf in tegengestelde richting van de waargenomene trachten voort te brengen.

Wij hebben gemeend deze proeven van ZÖLLNER omtrent radiometers met hellende wieken eenigszins uitvoeriger te moeten bespreken, omdat wij wenschten aan te toonen, dat ter harer verklaring de emissie-theorie van ZÖLLNER niet vereischt wordt, daar zij ook volgens onze zienswijze een goede verklaring vinden. Dat wij echter altijd de ware verklaring zouden gegeven hebben, willen wij volstrekt niet beweren. Ook bij deze hellende wieken schijnt de directe werking der stroomingen niet als de voornaamste bewegingsoorzaak te kunnen worden aangezien; hoogstens kan deze werking de beweging hier somtijds wellicht een weinig versterken. Bij grootere dichtheid van het gas zal deze werking op de verschijnselen bij hellende wieken waarschijnlijk een grooteren invloed hebben.

Is het in het voorafgaande gebleken, dat alle waargenomen verschijnselen zich laten verklaren door de door ons aangenomen indirecte werking der gasstroomingen, terwijl van sommige dier verschijnselen volgens geen der vroegere theoriën een ongedwongen verklaring te geven was, wij moeten er nu toe overgaan te onderzoeken, of ook volgens de theorie de tijdelijke verandering, die de drukking van de tegen het vaste oppervlak aankomende gasmassa van andere temperatuur gedurende den overgangstoestand ondergaat, van zoodanigen aard is als voor de verklaring der verschijnselen gevorderd wordt.

Wil dit het geval zijn, dan zal in de eerste plaats die verandering der drukking bij afnemende dichtheid van het gas niet te sterk mogen afnemen. Ik zeg met opzet, dat die verandering der drukking niet te sterk mag afnemen, en zeg niet dat zij moet toenemen. Want ik geloof niet, dat een toenemen dier verandering met toenemende verdunning ter verklaring der verschijnselen volstrekt noodzakelijk is. Wel is waar treden die verschijnselen slechts krachtig op bij groote verdunning, en treden bij grootere dichtheid van het gas zelfs verschijnselen in tegengestelden zin in hunne plaats, maar ik geloof, dat dit te verklaren zou zijn door twee tegengestelde werkingen aan te nemen, waarvan de eene de verschijnselen bij grootere dichtheid, de andere die bij groote verdunning teweegbrengt. Wanneer men nu aanneemt, dat de eerste dier werkingen evenredig is met de dichtheid en met het afnemen dier dichtheid dus tevens sterk afneemt, dan is het ter verklaring der verschijnselen bij geringe dichtheid eigenlijk reeds voldoende, wanneer de tweede werking maar minder snel afneemt dan de eerste, een toenemen dier werking is daartoe niet volstrekt noodzakelijk.

In de tweede plaats schijnen vele verschijnselen, vooral die beschreven boven bll. 310 en 311, er op te wijzen, dat de werking van het langs het oppervlak van hoogere of lagere temperatuur stroomende gas op dat oppervlak des te grooter is, naarmate de temperatuur in het gas in de nabijheid van het oppervlak sneller met den afstand verandert. Die grootere werking zou misschien hierdoor kunnen verklaard worden, dat de

gasstroomingen sterker optreden bij een groot dan bij een klein temperatuurverval in het gas, omdat in het eerste geval het verschil in temperatuur en dus ook dat in dichtheid van op een zelfden afstand van elkander verwijderde gas-volumina grooter is; *) of misschien ook hierdoor, dat het naar het oppervlak toestroomende gas met dat oppervlak des te meer in temperatuur zal verschillen op het oogenblik, dat het daarmede in aanraking komt, naarmate het temperatuurverval een grootere waarde heeft. Ofschoon een toenemen van de verandering der drukking van het gas gedurende den overgangstoestand met de grootte van het temperatuurverval in het gas dus niet volstrekt vereischt wordt, willen wij toch onderzoeken of zulk een toenemen dier verandering misschien uit de theorie is af te leiden.

In het hier volgend theoretisch onderzoek omtrent den overgangstoestand, waarin het tegen het vaste oppervlak aankomende gas tijdelijk verkeert, zullen wij ons voorloopig bepalen tot het geval, dat het vaste oppervlak een temperatuur bezit hooger dan die van het gas, hetgeen er mede in aanraking komt. Gedurende dien overgangstoestand zal het gas volgens de kinetische gastheorie een overmaat van druk op het vaste oppervlak uitoefenen. Die overmaat van druk is in de eerste plaats het gevolg hiervan, dat de moleculen, die met het warmere oppervlak in botsing komen, met een grootere levende kracht dat oppervlak verlaten dan wanneer het dezelfde temperatuur bezeten had als het gas, terwijl in den aanvang de dichtheid van het tegen het oppervlak aangelegen gas nog niet door den invloed der hoogere temperatuur tot die waarde gedaald is, welke zij later, als de toestand een stationnaire geworden is, zal aannemen. Of met andere woorden, het aantal

---

*) Dat de sterkte der gasstroomingen toeneemt met de grootte van het temperatuurverval komt mij hoogst waarschijnlijk voor in het geval, dat het temperatuurverval grooter wordt, doordat bij onveranderlijken afstand van de beide oppervlakken, waartusschen in het gas de warmte-geleiding plaats heeft, het verschil in de temperatuur dier oppervlakken grooter wordt. In het geval echter, dat het grooter worden van het temperatuurverval veroorzaakt wordt doordat de beide oppervlakken, terwijl zij hetzelfde verschil in temperatuur behouden, nader bij elkander komen, geloof ik, dat de sterkte der gasstroomingen niet zal toenemen.

moleculen, die in de éénheid van tijd het oppervlak treffen, zal in den aanvang nog in overeenstemming zijn met de grootere dichtheid, welke het gas oorspronkelijk bezit, en eerst allengs tot de kleinere waarde dalen, waartoe dit aantal zich later in den stationnairen toestand zal herleiden; terwijl de kracht van elke botsing grooter is dan met de oorspronkelijke temperatuur van het gas overeenkomt, omdat het oppervlak wegens zijn hoogere temperatuur een grootere hoeveelheid van beweging aan de gasmoleculen, die het treffen, mededeelt.

Maar nog een andere reden is er, waarom het gas in den aanvang een grootere drukking op het warme oppervlak uitoefent. Is de stationnaire toestand bereikt, dan zal overal in het gas de snelheid en het betrekkelijk aantal der moleculen, die zich gelijktijdig in een bepaalde richting voortbewegen, zoodanig zijn, dat de drukking overal en in alle richtingen dezelfde is *). De snelheden der moleculen zullen dan in de verschillende richtingen zoodanige waarden hebben, dat de gemiddelde waarde dier snelheid in een richting loodrecht op de richting der warmte-geleiding het arithmetisch middenevenredige is van de beide tegengestelde snelheden, die de moleculen in de richting der warmte-geleiding en in de daaraan juist tegengestelde richting bezitten. In den aanvang is dit echter nog niet het geval; er zal eenige tijd toe noodig zijn, zij het dan misschien ook slechts een korte tijd, eer de snelheden zich over de verschillende richtingen juist zoodanig verdeeld hebben als in den stationnairen eindtoestand het geval is. Gedurende den overgangstijd zal het arithmetisch gemiddelde der beide tegengestelde snelheden in de richting der warmte-geleiding grooter zijn dan de snelheid in de hierop loodrechte richtingen, en zal daarom ook de drukking van het gas in de eerstgenoemde richting grooter zijn dan in de daarop loodrechte richtingen.

En met de verdeeling van het betrekkelijk aantal mole-

---

*) Wij hebben hier het door CLAUSIUS behandelde geval van warmte-geleiding op het oog, omdat dit het eenige geval is, hetgeen met een voor ons doel voldoende uitvoerigheid is nagegaan.

culen over de verschillende richtingen gaat het gedurende den overgangstoestand op soortgelijke wijze. In den aanvang, als het gas nog overal dezelfde temperatuur bezit, zal van de moleculen, die zich gelijktijdig binnen een zekere ruimte bevinden, in elke richting zich een even groot aantal bewegen. Later in den stationnairen toestand van warmte-geleiding zal er daarentegen van die moleculen een grooter aantal een bewegingsrichting hebben, die naar het warme oppervlak toe- dan daarvan afgekeerd is. Allengs zal de eene toestand in den anderen overgaan. Gedurende den overgangstoestand zal daarom het aantal moleculen, die zich van het warme oppervlak verwijderen, betrekkelijk grooter, het aantal moleculen, die tot het warme oppervlak naderen, betrekkelijk kleiner zijn dan later in den stationnairen toestand het geval zal zijn. Er zullen dus, zoolang de verdeeling van het betrekkelijk aantal moleculen over de verschillende richtingen nog niet die geworden is behoorende bij den stationnairen eindtoestand, door elk vlak loodrecht op de richting van warmte-geleiding meer moleculen gaan van den warmen naar den kouden kant dan omgekeerd *). Nu bezitten echter die moleculen, die in grooteren getale door het vlak gaan, ook een grootere snelheid dan de anderen, die in kleineren getale doorgaan, omdat de eerste van den kant van het warme oppervlak komen. De in de tijdseenheid door het vlak in positieve richting gaande positieve bewegingsgrootheid, of de drukking op het vlak, is hierom grooter dan wanneer, zooals in den oorspronkelijken of in den eindtoestand van het gas, de moleculen in beide richtingen in even grooten getale door het vlak gaan. Gedurende den overgangstoestand zal dus ook, omdat de verdeeling van het aantal moleculen over de verschillende richtingen nog niet geworden is die behoorende bij den stationnairen eindtoestand, in de richting der warmte-geleiding een grootere drukking moeten bestaan.

Én omdat de dichtheid, én omdat de verdeeling van de snel-

---

*) Dit is dan ook de reden, waarom het gas in de nabijheid van het warme oppervlak zich gedurende den overgangstoestand allengs uitzet en een kleinere dichtheid verkrijgt.

heid en van het betrekkelijk aantal der moleculen over de verschillende richtingen. in het met het warmere oppervlak in aanraking komende gas niet terstond zoodanig zijn als later in den stationnairen eindtoestand het geval moet zijn, zal dus tijdelijk het warme oppervlak een overmaat van drukking van het gas ondervinden. Gedurende den overgangstoestand zal het gas, wat die dichtheid en die verdeeling beide betreft, allengs naderen tot den stationnairen toestand, en zal daarom die overmaat van drukking op het warme oppervlak allengs kleiner en eindelijk nul worden.

Het zou nu vooreerst kunnen zijn, dat de overdruk, die hieruit voortspruit, dat de verdeeling van de snelheid en van het betrekkelijk aantal der moleculen over de verschillende richtingen niet terstond is die behoorende bij den stationnairen toestand van warmte-geleiding maar eerst allengs daarin overgaat, hetzij een des te grootere waarde, hetzij een des te langeren duur heeft, naarmate de verandering, die in die verdeeling moet plaats hebben, een meer ingrijpende is, naarmate dus die verdeeling in den stationnairen eindtoestand meer verschilt van de gelijkmatige verdeeling over alle richtingen, zooals die behoort bij een gasmassa, waarvan de temperatuur, de dichtheid en de drukking overal dezelfde zijn.

Nu is CLAUSIUS in het door hem behandelde bijzondere geval van warmte-geleiding tot formules gekomen *), die aantoonen,

---

*) CLAUSIUS komt namelijk in zijn verhandeling tot de volgende formules. Op een afstand x van het warme oppervlak vindt hij voor de gemiddelde snelheid, waarmede de moleculen zich bewegen in een richting, die zulk een hoek maakt met de richting van warmte-geleiding, dat de cosinus van dien hoek μ zij, de uitdrukking:

$$V = u + q \mu \varepsilon,$$

waarin u de gemiddelde snelheid op den afstand x voorstelt in de richting loodrecht op de richting van warmte-geleiding, en ε de gemiddelde weglengte bij een temperatuur van 0^0 en een drukking van 760 mm., waarvan de tweede en hoogere machten verwaarloosd zijn.

Het betrekkelijk aantal moleculen, die zich bewegen in richtingen, waarvoor μ gelegen is tusschen μ en $\mu + d\mu$, bedraagt op dienzelfden afstand x: $\frac{1}{2} J d\mu$, en J is tot op de eerste macht van ε bepaald door de formule:

$$J = 1 - \frac{q}{u} \mu \varepsilon.$$

Wanneer het gas overal dezelfde temperatuur bezit, zijn V en J onafhankelijk van μ. De verdeeling van de snelheid en het betrekkelijk aantal moleculen

dat die verdeeling in den stationnairen toestand des te meer van de gelijkmatige verdeeling afwijkt, naarmate het temperatuurverval in het gas grooter is, naarmate dus de beide oppervlakken, waartusschen in het gas de warmte-geleiding plaats heeft, meer in temperatuur verschillen of nader bij elkander staan. En in de tweede plaats vindt hij die afwijking van de gelijkmatige verdeeling des te grooter, naarmate het gas ijler is. Zoodat het zou kunnen zijn, dat niettegenstaande de tijdelijke overdruk van het gas gedurende den overgangstoestand op het warmere oppervlak bij afnemende dichtheid van het gas moet afnemen, omdat het aantal moleculen, die in de éénheid van tijd het oppervlak treffen evenredig aan de dichtheid afneemt, toch de totale werking van dien overdruk gedurende den overgangstoestand niet afneemt. Dit zou dan kunnen worden toegeschreven óf hieraan, dat de overdruk, die wegens de genoemde reden kleiner wordt met afnemende dichtheid, wegens het grooter zijn van de plaatsgrijpende verandering in de verdeeling juist om evenveel grooter wordt, zoodat de grootte van den overdruk onafhankelijk bleek te zijn van de dichtheid van het gas; óf hieraan, dat de duur van den overgangstoestand des te langer wordt, naarmate het gas ijler wordt, zoodat het kleiner worden van den tijdelijken overdruk dan gecompenseerd zou worden door den langeren tijd, gedurende welken die overdruk blijft werken.

---

over de verschillende richtingen in den stationnairen toestand van warmte-geleiding zal dus des te meer van de gelijkmatige verdeeling afwijken, naarmate in de uitdrukkingen voor V en J de termen, die μ bevatten, grooter zijn, naarmate dus voor eenzelfde gas en eenzelfde temperatuur de grootheid q een grootere waarde heeft.

Maar

$$q = -\frac{5}{4} \cdot \frac{N_0}{N} \cdot \frac{du}{dx},$$

in welke uitdrukking N_0 het aantal moleculen per éénheid van volumen voorstelt bij een temperatuur van 0^0 en een drukking van 760 mm., en N hetzelfde bij de op den afstand x van het warme oppervlak bestaande temperatuur en drukking. De grootheid q is dus des te grooter, naarmate $\frac{du}{dx}$ grooter is, d. i. naarmate de temperatuur in het gas in de richting der warmte-geleiding sneller afneemt, en verder naarmate N kleiner is, d. i. naarmate het gas een geringere dichtheid bezit.

Geheel onmogelijk komen mij de beide gemaakte veronderstellingen niet voor. Vraagt men mij echter, of ik haar voor waarschijnlijk houd, dan kan mijn antwoord niet anders luiden dan neen. Want de grootere afwijking van de gelijkmatige verdeeling over alle richtingen is hier eenvoudig het gevolg van het feit, dat bij grooter temperatuurverval of geringere dichtheid op eenzelfde plaats in het gas moleculen samenkomen, die voor de verschillende richtingen meer in snelheid en in aantal verschillen; omdat zij het laatst in botsing zijn geweest op plaatsen, waarvan de temperatuur hetzij wegens het grootere temperatuurverval, hetzij wegens de grootere gemiddelde weglengte onderling meer verschilt, en meer van die op de beschouwde plaats afwijkt. Ik houd het daarom niet voor waarschijnlijk, dat de grootere afwijking van de gelijkmatige verdeeling invloed zal hebben op de grootte van den tijdelijken overdruk gedurende den overgangstoestand van het gas, en evenmin op den duur van dien overgangstoestand.

Ik houd het echter voor niet onmogelijk, dat de duur van den overgangstoestand toeneemt bij afnemende dichtheid van het gas, maar op geheel andere gronden dan de voorafgaande, die ik nu wensch uiteen te zetten.

Het warme oppervlak geeft warmte over aan het koelere gas, hetgeen er mede in aanraking komt, doordat de gasmoleculen, die tegen het oppervlak aanbotsen, de grootere levende kracht aannemen, die behoort bij de hoogere temperatuur van het oppervlak *). Met deze grootere levende kracht verlaten de gasmoleculen het oppervlak, en zij zullen deze behouden, totdat zij tegen andere koelere moleculen stooten. De gemiddelde afstand van het oppervlak, waarop dit plaats heeft, zal evenredig zijn aan de gemiddelde weglengte der moleculen en dus omgekeerd evenredig aan de dichtheid van het gas. Bij die botsing zullen de moleculen een gedeelte harer overmaat aan levende kracht

*) De wijze, waarop die moleculen de grootere levende kracht van het warmere oppervlak overnemen, kunnen wij niet nader aangeven, daar, zooals wij vroeger opmerkten, omtrent de wijze, waarop de moleculen van het gas en van het vaste lichaam hare bewegingen uitwisselen, zoo goed als niets bekend is. Het in den tekst gezegde moet daarom niet al te letterlijk worden opgevat.

aan moleculen overgeven, die verder van het warme oppervlak verwijderd zijn; deze laatste zullen vervolgens weder aan nog verder verwijderde moleculen een gedeelte der door haar verkregen overmaat aan levende kracht overdragen, en zoo vervolgens.

De overmaat aan levende kracht aan de moleculen door het vaste oppervlak afgegeven, zal zich dus zeer snel in het gas verbreiden en zal in een bepaalden tijd haar werking doen gevoelen op een afstand van het vaste oppervlak, die afhangt van de snelheid waarmede de gasmoleculen zich voortbewegen, maar onafhankelijk is van de dichtheid van het gas. Over dien afstand zullen de moleculen echter een des te grooter aantal malen in botsing zijn geweest, naarmate het gas dichter is. En daar bij elke botsing slechts een deel van de overmaat aan levende kracht wordt overgedragen, zal de werking van de hoogere temperatuur van het oppervlak zich op dien afstand bij het dichtere gas minder krachtig doen gevoelen dan bij het ijlere. De grootte dier werking zal op een bepaalden afstand omgekeerd evenredig zijn aan de dichtheid. De invloed der hoogere temperatuur van het oppervlak zal daarom na een bepaalden tijd op des te grooteren afstand van het oppervlak nog merkbaar zijn, naarmate het gas ijler is.

Die snellere uitbreiding tot grootere afstanden bij het minder dichte dan bij het dichtere gas van den invloed van het warme oppervlak op de levende kracht der gasmoleculen, sluit echter niet in, dat de stationnaire toestand bij het ijlere gas eerder bereikt zal zijn dan bij het dichtere. Wanneer men let op het tegen het warme oppervlak gelegen gas, en vooral hierop heeft men te letten, wanneer men de drukking van het gas op dit oppervlak wil nagaan, dan zal dat gas bij grootere dichtheid eerder komen in een toestand, waarbij de verdeeling van de snelheid en van het betrekkelijk aantal der gasmoleculen over de verschillende richtingen weinig verschilt van die in den stationnairen toestand van warmte-geleiding, en waarbij dus de door den warmte-overgang veroorzaakte overmaat van drukking bijna tot nul gereduceerd is, dan bij geringere dichtheid.

De moleculen, die van het warme oppervlak de overmaat aan levende kracht hebben overgenomen en daarmede toegerust

zich daarvan verwijderen, zullen, nadat zij met andere moleculen in botsing zijn gekomen, weder naar het warme oppervlak worden teruggeslingerd *); maar hare snelheden zullen dan niet meer als vroeger voor alle richtingen dezelfde zijn, en ook zullen zij zich niet meer in alle richtingen in even grooten getale bewegen. De verdeeling van snelheid en aantal over de verschillende richtingen zal reeds eenigszins naderen tot de verdeeling in den stationnairen toestand, en de moleculen zullen dus bij haar tweede botsing, tegen het warme oppervlak niet meer dezelfde overmaat van drukking daarop te weeg brengen als bij haar eerste botsing maar een iets kleinere. Hebben de moleculen voor de tweede maal warmte van het vaste oppervlak opgenomen, dan zullen zij, na weder met andere moleculen in botsing te zijn geweest, zich weder naar het vaste oppervlak toe begeven, en dan in een toestand verkeeren, die, wat de verdeeling van snelheid en aantal betreft, weder iets minder afwijkt van den stationnairen eindtoestand dan toen zij voor de eerste maal naar het vaste oppervlak terugkeerden. Bij elken volgenden terugkeer zal die afwijking kleiner en kleiner worden, en het bedrag dier afwijking zal afhangen van het aantal keeren, dat de moleculen zich van het warme oppervlak verwijderd hebben en weder daarheen teruggeslingerd zijn. Nu zal er tusschen twee opvolgende botsingen dier moleculen tegen het vaste oppervlak een tijd verloopen, die evenredig is aan den weg door de moleculen bij haar heen- en teruggang afgelegd, en die gemiddeld dus ook evenredig is aan de gemiddelde weglengte. De tijd benoodigd om de afwijking van den stationnairen toestand in het tegen het warme oppervlak gelegen gas tot een bepaald bedrag te doen dalen zal dus evenredig zijn aan de gemiddelde weglengte en dus omgekeerd evenredig aan de dichtheid van het gas. De duur van den overgangstoestand van het met het warme oppervlak in aanraking komende gas zal dus omgekeerd evenredig zijn aan de dichtheid van het gas.

---

*) Zij worden óf zelve naar het warme oppervlak teruggeslingerd, óf haar rol wordt overgenomen door de moleculen, waarmede zij in botsing zijn geweest.

Misschien wordt het voorgaande nog eenigszins verduidelijkt op de volgende wijze. Van de gasmassa, die tegen het warme oppervlak aanligt, zullen die moleculen, welke het naast bij dit oppervlak gelegen zijn en zich met de daarvan overgenomen grootere levende kracht verwijderen, een tijd behoeven om met andere moleculen in botsing te komen en zich vervolgens weder naar het oppervlak toe te begeven, die gemiddeld evenredig is aan de gemiddelde weglengte. Gedurende den tijd, dien de moleculen daartoe noodig hebben, zullen andere moleculen nog met de oorspronkelijke onveranderde snelheid en in onveranderd aantal in de verschillende richtingen het warme oppervlak treffen, en omdat zij met grootere snelheid door dat oppervlak worden teruggekaatst, zal gedurende al dien tijd de aanvankelijke overdruk van het gas op het oppervlak blijven bestaan. En dit geldt niet slechts voor de eerste moleculen, die met de grootere levende kracht het warme oppervlak verlaten, maar even goed voor de moleculen, die vervolgens diezelfde rol op zich nemen, voor welke slechts dit verschil bestaat, dat de grootte van den overdruk reeds een kleinere waarde dan de aanvankelijke verkregen heeft; het geldt dus voor den geheelen overgangstoestand. Ook op deze wijze komt men tot het besluit, dat de overgangstoestand van het gas met toenemende verdunning een langeren duur verkrijgt *).

Het komt ons wegens de voorafgaande beschouwingen wel niet geheel onmogelijk maar toch niet waarschijnlijk voor, dat wanneer de temperatuur in het gas in de nabijheid van het warme oppervlak sneller verandert, de totale werking van den overdruk van het gas op het oppervlak grooter zou worden om nog andere redenen dan die welke wij daarvoor boven bll. 318—319 hebben opgegeven. Ter verklaring der verschijnselen van CROOKES

*) Ook deze uitkomst kan ik echter weder hoogstens waarschijnlijk noemen; evenals al mijne uitkomsten, die den overgangstoestand betreffen, ontbreekt haar de volstrekte zekerheid. Want hoewel de overdruk op het warme oppervlak, zooals ik boven heb aangenomen, van den bewegingstoestand van de aan het oppervlak grenzende gasmoleculen afhankelijk zal zijn, zullen toch ook de verder van dat oppervlak verwijderde moleculen op dien bewegingstoestand en daardoor ook op dien overdruk invloed kunnen hebben, en ik zou niet durven beweren, dat ik dien invloed voldoende in rekening heb gebracht.

is dit, zooals wij daar ter plaatse aantoonden, ook niet volstrekt noodzakelijk.

Met afnemende dichtheid van het gas neemt waarschijnlijk de *grootte* van den tijdelijken overdruk tevens af; maar van den *duur* van den overgangstoestand komt het mij het waarschijnlijkst voor, dat hij toeneemt met afnemende dichtheid.

Denken wij ons dus een verticale vlakke plaat, waarvan de eene zijde een temperatuur bezit hooger dan die van het omgevende gas, dan zal tusschen die warme zijde en de andere koelere oppervlakken, die het gas begrenzen, in het gas een warmte-geleiding optreden. Het tegen de plaat gelegen gas zal spoedig in de hoogere temperatuur van deze gaan deelen, en daarvan zal een verticaal opstijgende gasstrooming langs de warme zijde der plaat het gevolg zijn. Het langs de plaat voortdurend naar boven stijgende gas zal telkens vervangen worden door ander gas, dat van onderen en van ter zijde naar de randen der plaat komt toestroomen. Reeds vóórdat dit gas vóór de plaat komt, zal het eenigszins in de hoogere temperatuur gaan deelen, maar als het vóór de plaat zelve aankomt, zal de dichtheid van dat gas nog een grootere zijn dan die, welke het later, als de toestand van warmte-geleiding in dat gas de stationnaire geworden zal zijn, zal bezitten. Ook de verdeeling van de snelheid en van het betrekkelijk aantal der moleculen over de verschillende richtingen zal dan nog een geheel andere zijn dan later, wanneer het vóór de plaat den stationnairen eindtoestand zal hebben aangenomen *). Het gas zal daarom, als het vóór de plaat komt, tijdelijk in den overgangstoestand verkeeren, gedurende welken het een overdruk op de plaat zal uitoefenen.

Neemt men nu aan, dat de duur van den overgangstoestand toeneemt, wanneer de dichtheid van het gas kleiner wordt,

---

*) Ook al neemt men aan, dat die verdeeling reeds voordat het toestroomende gas de plaat bereikt heeft, een gedeelte der verandering heeft ondergaan, die noodig is om haar te maken tot die behoorende bij den stationnairen toestand van warmte-geleiding, ook dan toch zal die verdeeling in het toestroomende gas nog een geheel andere zijn dan later, wanneer het vóór de plaat den stationnairen toestand heeft aangenomen, omdat het gas komt toestroomen van plaatsen, waar de loop der isothermische oppervlakken in het gas een geheel andere is dan *vóór* de plaat.

en neemt men tevens aan, hetgeen waarschijnlijk waar is, dat de stationnaire eindtoestand in het gas is opgetreden lang voordat het opstijgende gas den bovenrand der plaat bereikt heeft, dan zal de overdruk slechts op een gedeelte der plaat werkzaam zijn, maar op een des te grooter gedeelte, naarmate het gas ijler is, omdat het gas dan wegens den langeren duur van den overgangstoestand een langeren weg langs de plaat naar boven kan afleggen, vóórdat de overdruk ophoudt te bestaan. De totale werking van den overdruk zou dan bij gelijke grootte van dien overdruk met den duur van den overgangstoestand moeten toenemen, omdat het gedeelte van de plaat, waarop zich die overdruk doet gevoelen, dan toeneeemt. Neemt men daarentegen aan, dat ook bij grootere dichtheid van het gas de stationnaire eindtoestand nog niet is opgetreden, wanneer het opstijgende gas den bovenrand der plaat reeds bereikt heeft, dan zou toch de werking op de plaat met toenemenden duur van den overgangstoestand grooter moeten worden, omdat de overdruk van het gas dan langer zijn grootere aanvangswaarde zal behouden. Neemt dus met afnemende dichtheid van het gas de grootte van den tijdelijken overdruk eveneens af, dan behoeft daarom de totale werking van dien overdruk gedurende den overgangstoestand nog niet af te nemen wegens het toenemen van den duur van dien overgangstoestand.

Wij hebben tot hiertoe altijd slechts het geval beschouwd, waarbij het oppervlak een hoogere temperatuur heeft dan de omgeving. Hetgeen wij daarvoor gevonden hebben geldt echter mutatis mutandis eveneens voor het geval, dat het oppervlak een temperatuur heeft lager dan de omgeving, en dus in plaats van aan het gas warmte af te geven daarvan warmte opneemt. In dit geval zal het gas tegen de plaat afkoelen en daardoor zullen neêrdalende gasstroomingen ontstaan. Deze zullen gedurende den overgangstoestand een geringere drukking op de plaat uitoefenen, en de grootte van die *vermindering* van druk en haar duur zullen in dit geval van geheel dezelfde omstandigheden afhangen als in het door ons uitvoerig beschouwde geval de grootte en de duur van de *vermeerdering* der drukking.

Wij hebben straks gezegd, dat het ons het waarschijnlijks voorkwam. dat het opstijgende gas reeds lang vóórdat het den bovenrand der plaat bereikt heeft, in een toestand gekomen is, waarin het geen merkbaren overdruk op de warmere plaat meer uitoefent. Ofschoon de duur van den overgangstoestand mij vooralsnog niet toeschijnt voor een juiste bepaling vatbaar te zijn, geloof ik toch, dat, wanneer men let op de voorzeker zeer geringe grootte van de snelheid der gasstroomingen ten opzichte van de moleculaire snelheden bij de gassen, deze veronderstelling niet als gewaagd, maar zelfs als zeer waarschijnlijk moet worden beschouwd. Eerder zou, dunkt mij, omgekeerd de bedenking kunnen oprijzen, dat de duur van den overgangstoestand te kort is, en daarom bij de betrekkelijk geringe snelheid der gasstroomingen het gedeelte der plaat, waarop het gas een merkbaren overdruk uitoefent, te klein is, om uit dien overdruk de door CROOKES bestudeerde kracht te kunnen verklaren.

Wanneer het gas niet tot het uiterste verdund is, zal dus waarschijnlijk het naar de warmere plaat toestroomende gas slechts een korten tijd behoeven tot het aannemen van den stationnairen toestand van warmte-geleiding, en zijn het daarom in dit geval, wanneer de hoogte der plaat niet al te klein is, vooral de onderrand en de zijranden der warmere plaat, die de grootere drukking van het gas zullen ondervinden. Hierin stemmen wij dus, zij het dan ook op geheel andere gronden, overeen met FINKENER, die ook, zooals wij vroeger zagen, bij niet te groote verdunning slechts op de randen en niet op het midden van de wieken eens radiometers een overdruk aanneemt. Wanneer dus FINKENER aan het einde zijner verhandeling een proef beschrijft, die voor deze zienswijze getuigt, dan doet zij dit even goed voor onze theorie. FINKENER *) vervaardigde twee zooveel mogelijk gelijke radiometers, waartusschen alleen dit onderscheid bestond, dat bij den eenen van de plaatjes aluminium, die de wieken vormden, het midden der plaatjes werd weggesneden, zoodat alleen de randen overbleven, bij den anderen daarentegen de geheele plaatjes als wieken

*) FINKENER, *Pogg. Ann.* Bd. 158, S. 594

gebruikt werden. Hij vond nu, dat bij niet al te groote verdunning de beweging der wieken bij den eersten radiometer bijna dubbel zoo snel was als bij den tweeden. Bij grootere verdunning werden de bewegingen in beide radiometers meer en meer aan elkander gelijk. Wanneer aan die enkele proef van FINKENER eenige bewijskracht mag worden toegekend, een zeer groote bewijskracht zou ik er echter niet aan willen toeschrijven, daarvoor zouden meer proeven vereischt worden, dan is die proef even goed in overeenstemming met mijn theorie als met die van FINKENER.

Wil de indirecte werking der gasstroomingen, zooals wij die in het voorgaande hebben opgevat, als oorzaak der verschijnselen van CROOKES kunnen beschouwd worden, dan mogen die gasstroomingen bij afnemende dichtheid van het gas niet tevens sterk afnemen. Wij moeten thans nog onderzoeken, of dit al of niet het geval is.

De kracht, die de stroomingen voortbrengt, is het verschil in gewicht tusschen twee nevens elkander gelegen gelijke gasvolumina. Die kracht is dus evenredig aan het verschil in dichtheid, hetgeen ontstaat doordat het eene volumen gas een hoogere temperatuur verkrijgt dan het andere. Noemen wij t en t_1 de beide temperaturen, d en d_1 de bij die temperaturen behoorende dichtheden, α den uitzettingscoëfficiënt van het gas, dan is:

$$\frac{d-d_1}{d} = \frac{\alpha\ (t_1-t)}{1+\alpha t}$$

de uitdrukking, waaraan de kracht evenredig is, die wegens het temperatuurverschil t_1-t op de éénheid van massa werkt. Die kracht is dus onafhankelijk van de dichtheid. Wanneer nu de krachten, die de stroomingen tegenwerken, ook maar onafhankelijk waren van de dichtheid, zouden de stroomingen bij kleinere dichtheid even sterk moeten zijn als bij grootere dichtheid.

In het gas zelf is de tegenwerkende kracht de inwendige wrijving. Nu is de coëfficient van inwendige wrijving volgens theorie en ervaring onafhankelijk van de dichtheid, en de in-

wendige wrijving zal daarom de stroomingen meer moeten tegenwerken bij kleine dan bij groote dichtheid. De snelheid der stroomingen in het gas zal daarom met het afnemen der dichtheid van het gas tevens moeten afnemen. Maar al mogen in het gas zelf de stroomingen afnemen, dit zal daarom nog niet het geval zijn met de stroomingen langs het vaste oppervlak. KUNDT en WARBURG hebben aangetoond, dat er een glijden der gasmoleculen langs het vaste oppervlak plaats heeft, waarvan de sterkte bij de normale dichtheid van het gas slechts zeer gering is, maar hetwelk bij afnemende dichtheid al sterker en sterker wordt *). Het tegen het oppervlak aanliggende gas zal dus bij afnemende dichtheid meer en meer in de stroomingen gaan deelen, en voor dit tegen het vaste oppervlak aanliggende gas, hetgeen wij in onze theorie voornamelijk op het oog hebben, zal dus niet behoeven waar te zijn, dat de stroomingen van dat gas met het afnemen der dichtheid tevens afnemen. Ten minste zal voor dit gas de snelheid der stroomingen veel minder sterk moeten afnemen dan in het inwendige van het gas.

Eindelijk wil ik er hier nog eens aan herinneren, opdat dit vooral niet vergeten worde, dat ik bij mijne beschouwingen de dichtheid van het gas nooit zoo uiterst klein gedacht heb, dat de afmetingen der warmere of koelere plaat of die der gasmassa, waarin de warmte-geleiding plaats heeft, van dezelfde orde van grootte worden als de gemiddelde weglengte der gasmoleculen. Ik heb altijd verondersteld, dat de stellingen der kinetische gas-theorie nog volkomen op de gasmassa toepasselijk waren, en dit is niet meer het geval, wanneer de afmetingen der gasmassa slechts een klein veelvoud zijn der gemiddelde weglengte.

De voornaamste bedenking tegen de door mij voorgedragen verklaringswijze is, geloof ik, die, welke ik reeds boven noemde, dat het niet bewezen is, dat de overgangstoestand een duur heeft, groot genoeg om uit den overdruk van het gas op het warmere oppervlak gedurende dien overgangstoestand de

*) KUNDT en WARBURG, *Pogg. Ann.* Bd. 155, SS. 338 u. 541.

CROOKES'sche werkingen te kunnen verklaren. Ik geef gaarne toe, dat dit niet bewezen is, maar voeg er bij, het tegendeel is evenmin bewezen. Wel is waar zal naar de tegenwoordig algemeen geldende denkbeelden omtrent de wijze, waarop bij de botsing van twee gasmoleculen de snelheden zich over de beide moleculen verdeelen, de duur van den overgangstoestand uiterst kort en dus ook de totale werking van den overdruk van het gas uiterst klein zijn; maar bij de verschijnselen van CROOKES hebben wij ook altijd met slechts uiterst zwakke werkingen te doen, en het is dus zeer wel mogelijk, dat de werking van den overdruk van het gas gedurende den overgangstoestand daartoe groot genoeg is *).

Maar zal men wellicht zeggen, wanneer het nog niet bewezen kan worden, dat de indirecte werking der gasstroomingen ter verklaring der CROOKES'sche verschijnselen een voldoende grootte heeft, waarom dan niet liever blijvende drukkingsverschillen in den stationnairen toestand van warmte-geleiding ter verklaring gebezigd, waarvan het toch ook nog niet streng bewezen is, dat zij niet kunnen bestaan? Men vergete echter niet, dat ik de theorie der blijvende drukkings-verschillen gemeend heb niet te moeten aannemen, niet zoozeer omdat ik de mogelijkheid van het bestaan dier drukkingsverschillen volstrekt ontkende, maar omdat ik betwijfelde of men ooit zoodanige *blijvende* drukkingsverschillen in het gas zou kunnen vinden, waaruit *alle* waargenomen verschijnselen voldoende konden worden afgeleid.

Door middel van de blijvende drukkingsverschillen, zooals ik die op bl. 282—3 heb aangegeven, en die, zooals ik daar heb trachten uiteen te zetten, voor mij de eenige niet volstrekt onmogelijke blijvende drukkingsverschillen zijn, die in staat zijn van de grondverschijnselen van CROOKES een bevredigende

---

*) Het staat voor mij voorts volstrekt niet geheel vast, dat die denkbeelden omtrent de wijze, waarop de snelheden zich na de botsing over de moleculen verdeelen, in het geheel geen wijzigingen meer zullen ondergaan. Omtrent de krachten bij de botsing tusschen de moleculen werkende, en meer nog omtrent de verandering, die de beweging der de moleculen samenstellende atomen bij de botsing ondergaat, is te weinig bekend, dat men zulk een wijziging, ten minste in het geval dat de moleculen niet overal dezelfde gemiddelde levende kracht bezitten, voor volstrekt onmogelijk zou moeten houden.

verklaring te geven, kan men, geloof ik, de verschillende bewegingen van de wieken der radiometers in hun gewonen vorm voldoende verklaren. Eveneens van de meeste der door CROOKES en ZÖLLNER waargenomen bewegingen bij radiometers met gebogen wieken. Bij deze heeft men daartoe maar in het oog te houden, dat de warmte aan de convexe zijde zich bij de geleiding in het gas allengs over grootere oppervlakken verbreidt, terwijl zij zich aan de concave zijde, ten minste in de nabijheid van het warme oppervlak, allengs op kleinere oppervlakken concentreert; zoodat aan de convexe zijde een vermeerdering, aan de concave zijde een vermindering van de drukking van het gas op het warme oppervlak volgens de vroeger door ons aangenomen blijvende drukkingsverschillen zou moeten bestaan. Deze verschijnselen zouden zich niet minder goed laten afleiden uit die blijvende drukkingsverschillen dan uit de door mij als verklaringsoorzaak aangenomen indirecte werking der gasstroomingen; alleen voor de abnormale draaiing, welke ZÖLLNER waarnam bij zijn half-cilindervormige, aan beide zijden met lampenzwart bedekte wieken, wanneer alleen de concave zijde dier wieken door licht beschenen werd, zou de verklaring mijns inziens een zeer gedwongene worden. Die blijvende drukkingsverschillen schijnen mij echter geen verklaring te geven van de door mij op bl. 303 beschreven proeven van STOKES met radiometers, waarvan de wieken uit metalen plaatjes bestonden, wier eene zijde glad was, en wier andere zijde hetzij met een scherp mes bekrasd, hetzij op electrolytischen weg met een laagje fijn verdeeld metaal bedekt was. En of dit voor al de door ons beschreven meer gecompliceerde verschijnselen van ZÖLLNER mogelijk zal zijn, komt mij hoogst twijfelachtig voor.

Omdat ik dus door zulke blijvende drukkingsverschillen aan te nemen niet alle waargenomen verschijnselen meende te kunnen verklaren, ten minste niet door zoodanige drukkingsverschillen als mij de eenige niet volstrekt onmogelijke schenen te zijn, en omdat verder het bestaan van zoodanige drukkingsverschillen mij niet waarschijnlijk toescheen en ten minste nog geheel onbewezen is, zoodat men daarom volstrekt niet bepalen kan, hoe hun grootte, indien zij bestaan, van de dichtheid van

en het temperatuurverval in het gas zal afhangen, heb ik getracht een andere oorzaak voor de verschijnselen van CROOKES te vinden, een oorzaak, waarvan het bestaan ten minste mij niet twijfelachtig toeschijnt.

En de uitslag van die poging is naar mijne meening deze, dat door de door mij aangenomen oorzaak een betere en meer volledige verklaring der verschijnselen verkregen wordt dan door een der vroegere theoriën. Het onderzoek, of ook volgens de gastheorie die oorzaak als een voldoende oorzaak beschouwd kon worden, is niet zoo bevredigend uitgevallen. Wegens onze nog zoo uiterst geringe kennis omtrent den overgangstoestand en omtrent de wijze, waarop de warmte door een vast oppervlak aan een gas wordt medegedeeld, kon het nog niet bewezen worden, dat de verandering van de drukking van het gas gedurende den overgangstoestand een voldoende grootte en een voldoenden duur heeft om daaraan de CROOKES'sche werkingen te kunnen toeschrijven. Het is verder om dezelfde reden nog niet streng bewezen kunnen worden, dat de totale werking van die verandering der drukking niet te sterk afneemt met de dichtheid van het gas om de radiometerbewegingen bij geringe dichtheid te kunnen verklaren. Doch al is het ook niet bewezen, dat volgens de theorie de indirecte werking der gasstroomingen ter verklaring der verschijnselen voldoende is, er zijn toch aanduidingen, die het niet onwaarschijnlijk doen zijn, dat dit wel het geval is.

Mocht echter ook de door mij voorgestelde oorzaak bij nader onderzoek onvoldoende blijken te zijn, dan blijft er, geloof ik, niets anders over dan te trachten, het bestaan van blijvende drukkings-verschillen in het gas van de boven beschreven soort aan te toonen en door deze de verschijnselen te verklaren.

Ten slotte nog een kort woord over de verschijnselen bij dichtere gassen. Bij groote verdunning van het gas vond CROOKES, dat een daarin geplaatst licht voorwerp door een warm lichaam werd afgestooten, door een koud lichaam, een stuk ijs bijv., werd aangetrokken. Dit is eenvoudig een andere wijze van uitdrukken voor het feit, dat bij bestraling door

licht of warmte de bestraalde en dus verwarmde zijde van het voorwerp wordt afgestooten, dat daarentegen, wanneer een der zijden van het voorwerp door uitstraling naar een kouder lichaam warmte verliest, deze daardoor afgekoelde zijde schijnbaar wordt aangetrokken. Bij grootere dichtheid van het gas vond CROOKES echter juist de omgekeerde werking; het in dit dichtere gas geplaatste voorwerp wordt door een warm lichaam aangetrokken, door een kouder lichaam daarentegen afgestooten. Die werking bij grootere dichtheid van het gas heeft echter veel minder regelmatig plaats dan de tegengestelde werking bij groote verdunning. Laat men het gas allengs ijler worden, dan neemt de eerstgenoemde werking allengs af in intensiteit, bij een bepaalden graad van verdunning ziet men die werking nul worden, het neutrale punt van CROOKES, terwijl bij nog grootere verdunning de tegengestelde werking optreedt met allengs toenemende sterkte *). Wij hebben in het voorafgaande de oorzaak trachten op te sporen voor de laatstgenoemde werking bij groote verdunning van het gas. Ons blijft nu nog slechts over onze meening te zeggen omtrent de oorzaak der tegengestelde werking bij grootere dichtheid van het gas.

De proeven door CROOKES omtrent de werking bij grootere dichtheid gedaan, zijn veel geringer in aantal dan die bij kleinere dichtheid. Zij zijn verder voor een groot deel niet zeer geschikt om de ware oorzaak der werking te leeren kennen. Dat is vooral het geval met de meeste proeven in zijn eerste verhandeling beschreven. Bij deze maakte hij gebruik van een soort zeer gevoelige balans, bestaande uit een zeer licht staafje, dat in het midden ondersteund was en om het steunpunt in een vertikaal vlak kon draaien. Aan de beide uiteinden van het staafje waren twee gelijke lichte voorwerpjes bevestigd, die elkander juist in evenwicht hielden. Nu werd een warm of koud lichaam onder of boven een der beide voorwerpjes gebracht en de werking waargenomen. Bij deze proeven kunnen vele invloeden werkzaam zijn geweest om het voorwerp in beweging te brengen. Vooreerst de door het warme lichaam bewerkte uitzetting der lucht om het eene voorwerpje, waardoor

*) CROOKES, *Phil. Trans.* (1874) vol. 164, p. 501; (1875) vol. 165, p. 519.

dit schijnbaar zwaarder moet worden, ten tweede verticale luchtstroomingen, die op de beweging in verticale richting van het voorwerpje zeker niet zonder invloed zullen geweest zijn, en wellicht nog een derde invloed, waarover later meer. Vooral die proeven, waarbij een door een galvanischen stroom gloeiend gemaakte platinumspiraal zeer dicht bij het lichte voorwerp gebracht werd, zonder dat een vaste wand hen van elkander scheidde, zijn niet geschikt de ware oorzaak der werking te doen kennen, omdat in dit geval de lucht niet alleen tegen het voorwerp maar ook tegen de platinumspiraal aan zich sterk moet verwarmen en daardoor in sterke strooming moet komen.

Beter zijn de proeven in het laatste deel van CROOKES' eerste en in zijn tweede verhandeling beschreven, waarbij het lichte voorwerp niet in verticale, maar in horizontale richting zich bewoog, zoodat de verandering in de schijnbare zwaarte van het voorwerp niet van invloed kon zijn en ook de verticale stroomingen slechts een geringe werking konden uitoefenen. Ook van deze proeven beschouw ik weder als de beste die, waarbij het warme lichaam niet in dezelfde ruimte geplaatst was met het lichte voorwerp, waarop men de werking der warmte-stralen wilde bestudeeren.

Bij alle proeven verkreeg CROOKES, ofschoon de regelmatigheid der verschijnselen niet zeer groot was, bij grootere dichtheid van het gas juist de tegenovergestelde werkingen van die bij groote verdunning door hem waargenomen. De beweging van een verticaal plaatje, waarvan een der zijden een temperatuur verkrijgt hooger of lager dan die der omgeving, is dus een zoodanige, dat het schijnt, alsof in een dicht gas, de zijde van een verticaal plaatje, waarvan de temperatuur hooger is dan die van het omringende gas, een geringere drukking van het gas ondervindt, dat daarentegen, wanneer de temperatuur van die zijde daalt onder die van het omringende gas, dat gas op die zijde eene grootere drukking uitoefent.

Aan de directe stootwerking der luchtstroomen kan ik de waargenomen beweging van het plaatje niet toeschrijven; want ten eerste hebben die stroomen langs het plaatje voornamelijk in verticale richting plaats, en deze kunnen geen horizontale beweging ten gevolge hebben, en ten tweede, al neemt men even-

als NEESEN aan, dat het horizontale luchtstroomen zijn, die de beweging voortbrengen, dan blijft het onverklaard, waarom het plaatje in verschillende richting zich beweegt, al naarmate de eene zijde een temperatuur heeft hooger of lager dan de omgeving, zooals ik meen bij mijn kritiek van NEESEN's theorie te hebben aangetoond. Ik geloof dus, dat de directe stootwerking der stroomingen ook bij het dichte gas niet de oorzaak is der beweging van het plaatje ; wel meen ik, dat de mindere regelmatigheid der verschijnselen bij dichte lucht voornamelijk aan de werking der stroomingen toe te schrijven is.

Wanneer een gas in strooming is, oefent het in de richting van de strooming een grootere drukking uit dan in de daarop loodrechte richtingen. Doch ook in dit verschil in de drukking van een stroomend gas in de verschillende richtingen kunnen wij niet de bewegingsoorzaak hebben, waarnaar wij zoeken. Door temperatuursverhooging van de eene zijde der plaat krijgen wij langs die zijde een opstijgenden luchtstroom, door temperatuursverlaging op dezelfde wijze een neêrdalenden luchtstroom. Maar of die luchtstroom opstijgend of neêrdalend is, in beide gevallen zal hij op de plaat een geringere drukking moeten uitoefenen. Of wij dus de eene zijde der plaat verwarmen boven of afkoelen onder de temperatuur der omgeving, de hier beschouwde werking van de langs de plaat stroomende lucht zal in beide gevallen dezelfde moeten zijn, namelijk een vermindering der op de plaat uitgeoefende drukking. In beide gevallen moest de plaat hierdoor in dezelfde richting in beweging komen, terwijl de proeven hebben aangetoond, dat de plaat in de twee gevallen een beweging in tegengestelde richting aanneemt.

Wij moeten ter verklaring van de hier beschouwde bewegingen der plaat een oorzaak opsporen, die van teeken verandert, wanneer de temperatuursverhooging der plaat door een temperatuursverlaging vervangen wordt.

De eenige door mij te vinden oorzaak, waarbij zulk een verandering van teeken plaats heeft, is de volgende *).

---

*) Ook FINKENER schijnt, zooals ik later bespeurde, in zijn vroeger door ons besproken verhandeling (*Pogg. Ann.* Bd. 158, S. 572), de tegengestelde werking der warmte-stralen bij grootere dichtheid van het gas aan deze oorzaak toe te schrijven. Het begin van § 10 zijner verhandeling kan namelijk, naar mij voorkomt, alleen slaan op het door hem in het begin van § 9 gezegde.

In een gas, waarvan de temperatuur overal dezelfde is en dat onttrokken is aan de werking der zwaartekracht, zullen de dichtheid en de drukking door de geheele gasmassa dezelfde waarde hebben. Door de werking der zwaartekracht zal hierin in zoo verre verandering worden gebracht, dat deze grootheden des te grooter zullen zijn, naarmate men lager in de gasmassa komt. In elke horizontale laag zullen de drukking en de dichtheid overal dezelfde waarde hebben, maar beschouwt men twee horizontale lagen, die op verschillende hoogte gelegen zijn, dan zal de drukking in de diepst gelegen laag grooter zijn dan in de hooger gelegene om het bedrag van het gewicht van het tusschen de beide lagen gelegen gas, en de dichtheid, die altijd evenredig is aan de drukking, zal eveneens in de lager gelegen laag grooter moeten zijn. Hebben wij in het gas een verticale plaat, dan zullen de deelen van de beide oppervlakken der plaat, die in eenzelfde horizontale laag gelegen zijn, gelijke drukking van het gas ondervinden.

Wordt nu de eene zijde der plaat verwarmd, terwijl de andere de oorspronkelijke temperatuur blijft behouden, dan zal ook de tegen de warme zijde der plaat gelegen lucht in die verwarming gaan deelen; die lucht krijgt een hoogere temperatuur en zet zich daarbij uit, zoodat hare dichtheid vermindert. De in eenzelfde horizontale laag gelegen deelen zullen nu niet meer aan beide zijden der plaat dezelfde drukking ondervinden, maar die drukking zal aan de warme zijde geringer zijn, omdat dat deel van de drukking, hetgeen veroorzaakt wordt door het gewicht der boven het beschouwde punt gelegen lucht, aan de warme zijde kleiner zal geworden zijn, daar het gewicht dier lucht, die zich wegens de verwarming heeft uitgezet, kleiner geworden is. Wanneer omgekeerd de eene zijde der plaat zich heeft afgekoeld en de andere zijde niet, zal de temperatuur en dus ook de dichtheid van de tegen de eerste zijde gelegen lucht grooter worden; de drukking zal in eenzelfde horizontale laag grooter zijn aan de afgekoelde dan aan de niet afgekoelde zijde, omdat het gewicht der boven die laag gelegen lucht aan de eerste zijde grooter is.

Hier hebben wij dus een oorzaak, waardoor de drukking aan de verwarmde zijde kleiner, aan de afgekoelde zijde grooter

is dan aan de andere zijde, die de oorspronkelijke temperatuur behouden heeft. Die vermindering of vermeerdering der drukking zal zich vooral op de onderste helft der plaat doen gevoelen.

Die verandering der drukking zal voorzeker voor een gedeelte weder worden opgeheven door de juist door haar veroorzaakte stroomingen. Werd die vermindering der drukking aan de verwarmde zijde der plaat door de stroomingen geheel opgeheven, dan zouden beide zijden der plaat weder dezelfde drukking ondervinden. Voor de deelen der plaat, die juist op de halve hoogte der plaat gelegen zijn, zou de druk dan aan beide zijden geheel dezelfde zijn, de hooger gelegen deelen der plaat zouden aan de warme zijde een grootere drukking ondervinden, de lager gelegen deelen daarentegen aan die zijde een geringere drukking dan aan de andere zijde, omdat de druk aan de warme zijde wegens de geringere dichtheid der lucht minder snel met de hoogte verandert; maar de totale drukking over de geheele plaat zou aan beide zijden dezelfde zijn. Bij afkoeling van de eene zijde zou daarentegen de druk op de bovenste helft der plaat iets grooter, op de onderste helft iets kleiner zijn aan den afgekoelden dan aan den niet afgekoelden kant, maar de totale druk over de geheele plaat zou weder aan beide zijden gelijk zijn.

De stroomingen zullen echter, naar mij voorkomt, de verandering van drukking wel voor een deel, maar slechts voor een klein deel opheffen. Er blijft dus vermindering van druk aan de verwarmde, vermeerdering van druk aan de afgekoelde zijde der plaat. Die verandering van druk zal evenredig zijn aan de dichtheid van het gas. Wij hebben hier dus een oorzaak, die de beweging der bestraalde voorwerpen in een dicht gas kan verklaren, en die, wat de richting waarin zij werkt aangaat, juist tegengesteld is aan de vroeger door ons gevonden oorzaak voor de verschijnselen in verdunde gassen. Daar de nu gevonden oorzaak afneemt bij toenemende verdunning van het gas, de vroeger gevonden oorzaak niet of ten minste veel minder afneemt, is het mogelijk, dat bij een zekeren graad van dichtheid van het gas, het neutrale punt van CROOKES, de tegengestelde werkingen van beide oorzaken juist aan elkander gelijk zijn, en elkander dus opheffen, dat

bij grootere dichtheid de eene, bij kleinere dichtheid daarentegen de andere oorzaak de grootste werking uitoefent, en daardoor den eenen keer een beweging in den eenen zin, den anderen keer een beweging in tegengestelden zin verkregen wordt. De graad van dichtheid, waarbij de werkingen der beide oorzaken elkander juist opheffen, zal niet in alle gevallen dezelfde behoeven te zijn, omdat de grootte dier werkingen bij eenzelfde dichtheid van het gas voor de beide oorzaken van niet volkomen dezelfde omstandigheden afhangt. Beide werkingen zullen in het algemeen des te grooter zijn, naarmate tusschen de beide zijden van het voorwerp een grooter temperatuursverschil bestaat. Maar de snelheid der gasstroomingen werkt bij beide oorzaken verschillend, de eene oorzaak zagen wij wordt er slechts weinig door aangedaan, en zoo iets dan er door verminderd, terwijl de andere er juist door bevorderd wordt. De afstootende werking der warmte vonden wij verder des te grooter, naarmate de temperatuur in het gas in de nabijheid van het verwarmde oppervlak sneller verandert, terwijl de grootte van dit temperatuurverval op de aantrekkende werking der warmte niet dien invloed zal hebben. Het is daarom niet vreemd, dat CROOKES voor het neutrale punt niet onder alle omstandigheden denzelfden graad van dichtheid vond, en dat hij bij sommige proeven, waarbij het temperatuurverval zeer groot was, een afstootende werking der warmte verkreeg bij een graad van dichtheid, waarbij in de meeste gevallen die werking een aantrekkende is.

Groningen, Mei 1878.

OVER EENE EENVOUDIGE BEPALING

DER

KARAKTERISTIEKE FUNCTIE.

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

1. HAMILTON toonde in zijne beroemde verhandeling: „*On a general method in dynamics*" *), dat het bij bewegingsverschijnselen in den regel mogelijk is eene functie, hetzij der coördinaten, hetzij der coördinaten en van den tijd aan te geven, waaruit alles, wat voor de kennis der beweging noodig is, door eenvoudige differentiatie kan worden afgeleid. Die functie geeft dus in zijn vorm de beweging geheel aan en wordt daarom door HAMILTON de *karakteristieke functie* genoemd.

Is het een zeer merkwaardig feit, dat het bestaan eener dergelijke uitdrukking in het algemeen is aan te wijzen, te meer moet het betreurd worden, dat hare opsporing steeds met buitengewoon groote bezwaren verbonden blijft, zelfs in zeer eenvoudige gevallen, waarbij reeds de verlangde vorm tamelijk zamengesteld is.

Voornamelijk door HAMILTON en JACOBI werd den weg aangewezen, die hier moet gevolgd worden; uit hunnen arbeid blijkt, dat de bedoelde functie door integratie eener niet lineaire partiele differentiaal vergelijking van de eerste orde kan worden verkregen. JACOBI vooral, heeft krachtig bijgedragen die inte-

*) *Phil. Transactions of the Royal Society of London.* 1834 and 1835.

gratie uitvoerbaar te maken en daarvoor zelfs eene algemeene methode aangegeven.

Door een geheel anderen weg in te slaan, waarbij men van eenen bij definitie gegeven integraalvorm uitgaat, blijkt, dat in meerdere eenvoudige gevallen van beweging de bepaling der karakteristieke functie zeer gemakkelijk volgt. Wanneer namelijk voor het geval van een stoffelijk punt (en hiertoe bepalen wij ons thans) de beweging op doelmatige wijze in twee onderling rechthoekige richtingen ontbonden wordt, zoodat men de levende kracht in eene dier richtingen door toepassing van grondbeginselen der dynamica een eenvoudigen vorm kan geven, voert eene voor de hand liggende transformatie onmiddellijk tot het gewenschte resultaat.

Wij zullen ons achtereenvolgens met *drie* belangrijke hoofdgevallen van beweging bezig houden.

2. Nemen wij als *eerste* geval de beweging van een vrij stoffelijk punt, waarop alleen de zwaartekracht werkt, in een verticaal vlak.

Bepalen wij de beweging ten opzichte van twee onderling rechthoekige coördinatenassen x en z in horizontale en verticale richting, de laatste in den zin der zwaartekracht van boven naar beneden gaande. Wij hebben dan als V de karakteristieke functie en T de halve levende kracht van het punt aangeeft, ingevolge de door HAMILTON gegeven definitie

$$V = 2\int T dt \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

welke integraal tusschen de grenzen o en t te nemen is.

Duiden wij de halve levende kracht in horizontale en verticale richting respectievelijk door T_1 en T_2 aan, zoo volgt

$$V = 2\int T_1 dt + 2\int T_2 dt \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \quad (2)$$

terwijl

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \qquad T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

verder

$$dt = dx\sqrt{\frac{m}{2\,T_1}} = dz\sqrt{\frac{m}{2\,T_2}}$$

en 2) gaat over in

$$V = \int\sqrt{2\,m\,T_1}\,dx + \int\sqrt{2\,m\,T_2}\,dz \;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Merken wij nu op dat de horizontale snelheid en dus T_1 constant is en stellen wij $\sqrt{2\,m\,T_1} = \beta$, passen wij verder het beginsel der levende krachten toe, volgens welke, als U de krachtfunctie voorstelt,

$$T - U = H = \text{constante.}$$

Zoo wordt

$$T_2 = T - T_1 = H + U - T_1$$
$$= H + U - \frac{\beta^2}{2\,m}$$

en (3) gaat over in

$$V = \beta x + \int\sqrt{2\,m(H + U) - \beta^2}\,.\,dz\,,$$

of daar $U = mgz$, als g de versnelling der zwaartekracht,

$$V = \beta x + \int dz\sqrt{2\,m\,(H + mgz) - \beta^2}\,;$$

voeren wij de integratie uit, zoo volgt voor de karakteristieke functie in dit geval:

$$V = \beta x + \frac{1}{3\,m^2 g}\left\{2\,m(H + mgz) - \beta^2\right\}^{3/2} \;.\;.\;.\; (4)$$

zij bevat, zooals behoort, twee constanten, β en H.

Kortheidshalve $2\,m\,H - \beta^2 = h^2$ stellende, gaat (4) over in

$$V = \beta x + \frac{1}{3\,m^2 g}\,(h^2 + 2\,m^2 g\,z)^{3/2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4a)$$

3. De beweging van het punt volgt door differentiatie van V. Stellen wij vooraf, terwijl

$$2\,T = m \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right\}$$

$$= m\,(x'^2 + y'^2)$$

$$\frac{d\,T}{d\,x'} = m\,x' = m\,v_1 = p_1 \qquad \frac{d\,T}{d\,y'} = my' = m\,v_2 = p_2,$$

zoo wordt, ingevolge de door HAMILTON ontwikkelde theorie, al wat op de beweging van het punt betrekking heeft bepaald door de volgende vergelijkingen:

$$\left(\frac{d\,V}{d\,\beta}\right) = x - \frac{\beta}{m^2 g} \sqrt{h^2 + 2\,m^2 g\,z} = b \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$\left(\frac{d\,V}{d\,H}\right) = \frac{1}{m\,g} \sqrt{h^2 + 2\,m^2 g\,z} = t + C \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\left(\frac{d\,V}{dx}\right) = \beta = p_1 = m\,V_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$\left(\frac{d\,V}{d\,z}\right) = \sqrt{h^2 + 2\,m^2 g\,z} = p_2 = m\,v_2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

hierin stellen b en C constanten voor, die even als β en H door de aanvankelijke voorwaarden worden bepaald.

Van deze vier vergelijkingen geeft (5) de baan, (6) het verband tusschen z en t. Voor de beoordeeling der beweging zou men met deze beide kunnen volstaan; de vergelijkingen (7) en (8) geven echter direct de snelheden v_1 en v_2 in horizontale en verticale richting.

Zij a de aanvankelijke snelheid voor $z=0$, makende een hoek α met de horizontale richting, zoo geeft (7)

$$m v_1 = m a \cos \alpha = \beta = \text{constante},$$

gelijk als bekend was aangenomen.

(8) geeft, zoo voor $z=0$, $\quad v_2 = \overline{v_2} = a \sin \alpha$

$$v_2^2 = \overline{v_2}^2 + 2gz = a^2 \sin^2 \alpha + 2gz$$

verder

$$h^2 = 2mH - \beta^2 = 2mH - m^2 a^2 \cos^2 \alpha = m^2 \overline{v_2}^2 = m^2 a^2 \sin^2 \alpha,$$

zoodat

$$H = \frac{m a^2}{2},$$

welke constante dus onafhankelijk is van de richting der snelheid.

Uit (5) volgt voor de baan,

$$x - \frac{a \cos \alpha}{g} \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + 2gz} = b;$$

bepalen wij b zoo, dat de baan door den oorsprong gaat, zoo volgt

$$b = -\frac{a^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = -\frac{a^2 \sin 2\alpha}{2g};$$

de baan wordt dan

$$x + \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{a \cos \alpha}{g} \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + 2gz}$$

of ontwikkelde,

$$z = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{g x^2}{2 a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Nemen wij z en g in tegengestelde richting, zoo volgt

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 a^2 \cos^2 \alpha}$$

de bekende vergelijking voor de baan van projectielen in het ledige.

Eindelijk geeft (6)

$$\frac{1}{g}\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + 2gz} = t + C\ ,$$

of zoo wij C zoodanig bepalen, dat $t = 0$ als het punt in den oorsprong is,

$$a^2 \sin^2\alpha + 2gz = (gt + a\sin\alpha)^2,$$

$$z = \overline{v_2}\,t + \frac{g}{2}t^2.$$

4. Als *tweede* geval beschouwen wij de beweging van een stoffelijk punt om een aantrekkend middenpunt.

Indien men dit middenpunt als oorsprong van polaire coördinaten r en φ aanneemt, zal de halve levende kracht T worden uitgedrukt door de vergelijking

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin m de massa van het aangetrokken punt.

Men kan die beweging beschouwen als zamengesteld uit twee afzonderlijke: terwijl het punt zich op den draaienden voerstraal bevindt, verplaatst het zich steeds langs dien voerstraal en volbrengt, wanneer de baan gesloten is, ingevolge deze laatste beweging bij iedere omwenteling eene slingering. Noemen wij de halve levende kracht der laatste beweging T_1, die tengevolge der ronddraaing T_2 zoo geeft (1) terwijl

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \qquad T_2 = \frac{m}{2}r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Neemt men het beginsel der perken als voor dit geval bewezen aan, zoo volgt

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=C, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

waarin C eene constante. Uit (2) volgt dan

$$T_2=\frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Voor de karakteristieke functie zal even als vroeger

$$V=2\int T_1\,dt+2\int T_2\,dt,$$

dat is wegens (2) en (3)

$$V=2\int T_1\sqrt{\frac{m}{2\,T_1}}\,dr+m\int r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dt,$$

$$=\int\sqrt{2\,m\,T_1}\,dr+m\,C\int d\varphi. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Uit het beginsel der levende krachten volgt weder als U de krachtfunctie en H eene constante

$$T-U=H$$

of

$$T_1=H+U-\frac{m\,C^2}{2\,r^2}, \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

en, wanneer $m\,C=\alpha$ gesteld wordt,

$$2\,m\,T_1=2\,m\,(H+U)-\frac{\alpha^2}{r^2}. \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

De kracht F, die op m werkt, zij eene aantrekkende, omge-

keerd evenredig aan de n^e macht van den afstand, zoodat $F = -\frac{m\mu}{r^n}$, wij hebben dan

$$U = \int F\,dr = \frac{m\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}$$

en (7) gaat over in

$$2\,m\,T_1 = 2\,m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}.$$

Voor de karakteristieke functie volgt dan

$$V = \int dr \sqrt{2\,m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}} + \alpha\,\varphi\,. \quad . \quad (8)$$

Zij bevat de twee constanten H en α.

5. Wanneer nu a en b nieuwe constanten voorstellen, $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{d\varphi}{dt}$ door r' en φ' worden aangeduid, v_1 en v_2 de snelheden der beide bewegingen aangeven, wanneer verder

$$\frac{dT}{dr'} = m\,r' = m\,v_1 = p_1 \quad \text{en} \quad \frac{dT}{d\varphi'} = m\,r^2\,\varphi' = m\,r\,v_2 = p_2,$$

zoo wordt de beweging volledig bepaald door de volgende *vier* vergelijkingen:

$$\left(\frac{dV}{d\alpha}\right) = -\alpha \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2\,m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} + \varphi = a, \;.\; (9)$$

$$\left(\frac{dV}{dH}\right) = m \int \frac{dr}{\sqrt{2\,m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = t + b, \;.\; (10)$$

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = \sqrt{2\,m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}} = p_1, \;.\;.\;.\;.\; (11)$$

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) = \alpha = p_2, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

(9) geeft de baan; (10) leidt tot het beginsel der perken (dat echter door ons reeds aangenomen werd), (11) geeft de beweging v_1 langs den voerstraal en daardoor de waarde van T_1, (12) geeft v_2. Een nader onderzoek dier vergelijkingen leert het volgende:

Daar $\alpha = mC$ geeft (9)

$$\varphi - a = \int_r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2H}{mC^2} r^2 + \frac{2}{n-1} \frac{\mu}{C^2} \frac{1}{r^{n-3}} - 1}} \ldots (13)$$

Het laat zich gemakkelijk aantoonen, dat de verhouding $\frac{\mu}{C^2}$ van de afmeting $[L^{n-3}]$ is, waarin $[L]$ eene lengte-afmeting voorstelt; immers wij hebben voor de afmetingen, als $[M]$ de massa en $[T]$ den tijd aangeeft,

$$F = -\frac{m\mu}{r^u} = [M\,L\,T^{-2}]$$

dus

$$\mu = [L^{n+1}\,T^{-2}]$$

en daar

$$C^2 = r^4 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = r^2 v_2^2 = [L^4\,T^{-2}],$$

volgt

$$\frac{\mu}{C^2} = [L^{n-3}];$$

stellen wij dus $\frac{\mu}{C^2} = k^{n-3}$, zoo duidt k eene lengteafmeting aan.

De baan wordt dan gegeven door de vergelijking:

$$\varphi - a = \int_r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2H}{mC^2} r^2 + \frac{2}{n-1} \left(\frac{k}{r}\right)^{n-3} - 1}} \ldots (14)$$

Voor aantrekking volgens de wet van NEWTON gaat zij over in

$$\varphi - a = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2H}{mC^2} + \frac{2}{kr} - \frac{1}{r^2}}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

stellen wij hierin, wanneer e een getal,

$$\frac{2H}{mC^2} = \frac{e^2-1}{k^2},$$

zoo volgt

$$\varphi - a = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{e^2-1}{k^2} + \frac{2}{kr} - \frac{1}{r^2}}} = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{e^2}{k^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right)^2}}$$

waaruit

$$\varphi - a = B\cos \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{k}}{\frac{e}{k}}$$

$$\frac{e}{k}\cos(\varphi - a) = \frac{1}{r} - \frac{1}{k}$$

$$r = \frac{k}{1 + e\cos(\varphi - a)}$$

de bekende poolvergelijking der kegelsneden, wanneer de pool in het brandpunt geplaatst is.

Zooals wij opmerkten, leidt (10) tot de vergelijking der perken. Wij hebben namelijk zoo wij (9) ten opzichte van r differentiëren:

$$\frac{\alpha\, d r}{r^2 \sqrt{2m\left(H + \frac{m\mu}{(n-1)\, r^{n-1}}\right) - \frac{\alpha^2}{r^2}}} = d\varphi$$

en wanneer wij deze waarde in (10) overbrengen

$$m \int \frac{r^2\, d\varphi}{\alpha} = t + b$$

of daar $\alpha = m\,C$

$$r^2\, d\varphi = C\, dt$$

de bekende uitdrukking voor het beginsel der perken in dit geval.

Vergelijking (11) geeft

$$p_1 = m\,v_1 = \sqrt{2\,m\left(H + \frac{m\,\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{m^2\,C^2}{r^2}}$$

$$v_1^{\,2} = 2\left(\frac{H}{m} + \frac{\mu}{(n-1)\,r^{n-1}}\right) - \frac{C^2}{r^2}$$

$$T_1 = H + \frac{m\,\mu}{(n-1)\,r^{n-1}} - \frac{m}{2}\,\frac{C^2}{r^2}$$

overeenkomstig het in (6) gevondene. Hieruit volgt verder

$$T_1 = T - \frac{m}{2}\,\frac{C^2}{r^2}$$

$$= \int F\,dr - \frac{m}{2}\,\frac{C^2}{r^2}$$

of na differentiatie

$$-\frac{\mu}{r^n} = \frac{d^2 r}{d\,t^2} - \frac{C^2}{r^3},$$

dat is

$$\frac{\mu}{r^n} = r\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 - \frac{d^2 r}{d\,t^2},$$

bekende formulen der kromlijnige beweging.

Eindelijk geeft (12)

$$p_2 = m r v_2 = \alpha$$

$$v_2 = \frac{Const.}{r},$$

de uitdrukking voor de snelheid van draaing van het punt, dat op een afstand r van het middenpunt verwijderd is.

6. Nemen wij als *derde* geval de beweging van een zwaar punt over het oppervlak van een bol.

Zij de z-as in de richting der zwaartekracht, de assen der x en y horizontaal en als a de straal van den bol is, worde een punt door spherische coördinaten φ en ψ zoodanig bepaald, dat

$$x = a \cos\varphi \cos\psi$$

$$y = a \sin\varphi \cos\psi$$

$$z = a \sin\psi \,.$$

Wij hebben dan als

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi',$$

$$x' = -a(\varphi' \sin\varphi \cos\psi + \psi' \cos\varphi \sin\psi)$$

$$y' = a(\varphi' \cos\varphi \cos\psi - \psi' \sin\varphi \sin\psi)$$

$$z' = a\psi' \cos\psi$$

en voor de halve levende kracht van het punt volgt

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m a^2}{2}(\varphi'^2 \cos^2\psi + \psi'^2) \,.\,. \quad (1)$$

Ontbinden wij nu de snelheid in eene in horizontale en eene in verticale richting en noemen wij de overeenkomstige halve levende krachten T_1 en T_2, zoo zal

$$T = T_1 + T_2$$

en

$$T_1 = \frac{m a^2}{2} cos^2 \psi \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 \qquad T_2 = \frac{m a^2}{2} \left(\frac{d \psi}{d l}\right)^2 \quad . \; . \; . \; (2)$$

Voor de krachtfunctie volgt

$$U = \int m g \cos \psi \, . \, a d \psi = m g a \sin \psi . \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

dus voor de composanten der kracht

$$\Phi = \frac{d u}{d \varphi} = 0 \qquad \Psi = \frac{d u}{d \psi} = m g a \cos \psi \quad . \; . \; . \; (4)$$

Uit (1) volgt verder

$$\frac{d T}{d \varphi'} = m a^2 \varphi' \cos^2 \psi \, , \quad \frac{d T}{d \varphi} = 0 \, ,$$

zoodat eene der bewegingsvergelijkingen volgens LAGRANGE overgaat in

$$\frac{d}{d t}\left(\frac{d T}{d \varphi'}\right) - \frac{d T}{d \varphi} = \Phi,$$

dat is in

$$\frac{d \left(\varphi' \cos^2 \psi\right)}{d t} = 0,$$

derhalve

$$\varphi' \cos^2 \psi = C = \text{constante.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Na deze opmerkingen verkrijgen wij voor de karakteristieke functie

$$V = 2 \int T_1 \, d t + 2 \int T_2 \, d t,$$

$$= m a^2 \int \cos^2 \psi \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 d t + 2 \int T_2 \, d t,$$

$$= m a^2 \int \cos^2 \psi \left(\frac{d \varphi}{d t}\right) d \varphi + 2 \int T_2 \, d t, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

daar nu wegens (2)

$$d\,t = d\,\psi \sqrt{\frac{m\,a^2}{2\,T_2}},$$

zal ingevolge (5) de vergelijking (6) overgaan in

$$V = m\,a^2\,C \int d\varphi + \int d\,\psi \sqrt{2\,m\,a^2\,T_2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Het beginsel der levende krachten geeft

$$\begin{aligned} T_2 &= H + U - T_1 \\ &= H + m\,g\,a\,sin\,\psi - \frac{m\,a^2}{2}\,\frac{C^2}{cos^2\,\psi}, \end{aligned}$$

en wanneer $m\,a^2\,C = \alpha$ gesteld wordt

$$2\,m\,a^2\,T_2 = 2\,m\,a^2\,(H + m\,g\,a\,sin\,\psi) - \frac{\alpha^2}{cos^2\,\psi},$$

(7) geeft dan voor de karakteristieke functie in dit geval

$$V = \alpha\,\varphi + \int d\,\psi \sqrt{2\,m\,a^2\,(H + m\,g\,a\,sin\,\psi) - \frac{\alpha^2}{cos^2\,\psi}}. \quad . \quad . \quad (8)$$

Daar deze integraal in het algemeen niet onder eindigen vorm kan worden daargesteld en zulks evenzeer geldt voor de integralen, die in de uit (8) afgeleide bewegingsvergelijkingen voorkomen, zullen wij eene nadere discussie dier vergelijkingen achterwege laten.

Utrecht, September 1878.

OVER DE

JAARLIJKSCHE BAAN, DIE DE VASTE STERREN

TENGEVOLGE VAN DE

ABERRATIE VAN HET LICHT SCHIJNEN TE BESCHRIJVEN,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.

In bijna alle sterrekundige handboeken wordt, wanneer het slechts om eene eenvoudige verklaring van het verschijnsel der aberratie te doen is, de loopbaan der aarde cirkelvormig en dus hare snelheid eenparig aangenomen. Is het doel, de schijnbare verplaatsing der ster nauwkeuriger na te gaan, dan wordt de excentriciteit der loopbaan der aarde zeer klein ondersteld, en bij de ontwikkeling der formulen hare hoogere machten verwaarloosd.

Men komt op die wijze tot het resultaat, dat elke ster in den tijd van een jaar eene ellips schijnt te beschrijven, waarvan de groote as standvastig (volgens de bepaling van STRUVE $2 \times 20'',445$) en evenwijdig aan de ekliptika gericht is, terwijl de kleine as gelijk is aan dezelfde hoeveelheid, vermenigvuldigd met de sinus der breedte der ster.

Het resultaat is volkomen juist, maar de wijze, waarop het afgeleid is, lijdt, mijns inziens, aan twee gebreken. In de eerste plaats is zij dikwijls zeer omslachtig, terwijl een eenvoudiger en meer rechtstreeksche weg kan gekozen worden om de schijnbare baan der ster af te leiden; ten tweede worden, hetzij reeds van den beginne af, hetzij later, in de afleiding der formulen ver-

kortingen ingevoerd, die den indruk maken alsof het boven uitgedrukte resultaat nog slechts eene benadering is. Men wordt daardoor onwillekeurig tot de vraag geleid, wat toch wel de schijnbare baan der vaste sterren tengevolge van de bewegingen van het licht en de aarde zijn zoude, indien de loopbaan der aarde eene aanzienlijke excentriciteit had, en niet zoo als nu, nagenoeg met een' cirkel overeenkwam. Ik ken geen der nieuwere handboeken der sterrekunde, waar men op deze vraag een voldoend antwoord vindt. *) In het onlangs verschenen handboek over *Cosmographie* van Dr. SCHOUTE, wordt op blz. 179 eene figuur gegeven, die dit antwoord moet voorstellen; maar deze figuur is onjuist en de verklaring onvolledig. In het derde deel van dit werk wordt deze misslag echter erkend.

Ieder die de populaire lessen van onzen te vroeg ontslapenen KAISER heeft bijgewoond, herinnert zich nog wel den toestel, dien hij voor de verklaring der aberratie op die lessen bezigde. De verklaring van het verschijnsel aan de emanatietheorie van het licht ontleenende, werd aangetoond dat elke ster een kringetje schijnt te doorloopen, welks vlak evenwijdig aan dat der ekliptika gelegen is. De loopbaan der aarde werd cirkelvormig ondersteld en hare snelheid dus eenparig, en zoo was het duidelijk, dat de ster ook een' cirkel in dit vlak scheen te beschrijven, met dien verstande evenwel, dat de voerstraal der ster steeds 90^0 vooruit was op den voerstraal der aarde. Voor eene populaire verklaring van het verschijnsel, als een bewijsgrond voor de beweging der aarde om de zon, is eene dergelijke voorstelling ook voldoende; toch moet, al neemt men genoegen in de aanwending der emanatie- in plaats der undulatietheorie, voor een juist begrip van het verschijnsel, zoo als het zich werkelijk voordoet, gelet worden op de drie omstandigheden: 1^0 dat de beweging der aarde om de zon niet eenparig is, maar plaats heeft naar de tweede wet van KEPPLER;

*) Onder het afdrukken dezes zie ik, dat OPPOLZER in zijn voortreffelijk *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, het vraagstuk streng nauwkeurig behandeld heeft, doch ook alleen de formulen afleidt voor den invloed der aberratie, zoowel op rechte opklimmingen en declinatie als op lengte en breedte.

2^0 dat de richting der beweging een' veranderlijken hoek met den voerstraal maakt; 3^0 dat de snelheid van beweging, waarvan de hoeveelheid van de verplaatsing der ster juist afhangt, ook veranderlijk is, — en de vraag is nu, wat wordt de vorm van het kringetje, dat de ster in het vlak evenwijdig aan de ekliptika schijnt door te loopen, en welke is de wet harer beweging?

Het antwoord op deze vraag kan gemakkelijk afgeleid worden, zonder dat men de excentriciteit der aardbaan als eene grootheid beschouwt, waarvan de tweede orde verwaarloosd kan worden; en dit antwoord luidt aldus:

1^0. Welke ook de excentriciteit e der aardbaan is, schijnen door het verschijnsel der aberratie alle sterren een' cirkel te doorloopen, liggende in een vlak, dat evenwijdig is aan dat der ecliptica;

2^0. die cirkel is excentrisch met betrekking tot de plaats A, die de ster zou innemen, indien de aarde stilstond of het licht zich oneindig snel bewoog;

3^0. de excentriciteit van het punt A in den cirkel is gelijk aan die der aardbaan;

4^0. de lijn, die door het punt A en het middelpunt van dezen cirkel loopt, is loodrecht gericht op de groote as van de loopbaan der aarde, zoo dat het genoemde middelpunt zich bevindt aan de zijde, waar de beweging der aarde in haar perihelium naar toe gericht is;

5^0. de beweging der ster in dezen cirkel is onregelmatig. Met betrekking tot het punt A is zij zoodanig dat hare verbindingslijn met dit punt altijd evenwijdig is aan de raaklijn aan de aardbaan, behoorende tot de plaats die de aarde inneemt op het oogenblik dat beschouwd wordt.

6^0. Met betrekking tot het middelpunt des cirkels echter volgt de voerstraal volkomen dezelfde wet als die der aarde, doch in lengte is de ster de aarde steeds 90^0 vooruit.

Het bewijs dezer stellingen is niet moeilijk te geven. Zij in Fig. 1 $ADEG$ de loopbaan der aarde, F het brandpunt, waar zich de zon, C het punt, waar zich de aarde bevindt, dan is $\angle AFC$ de ware anomalie $= v$. Stel $AB = a$ en de excentriciteit der loopbaan $= e$, dan is $BF = ae$; stel den voer-

Fig: 1.

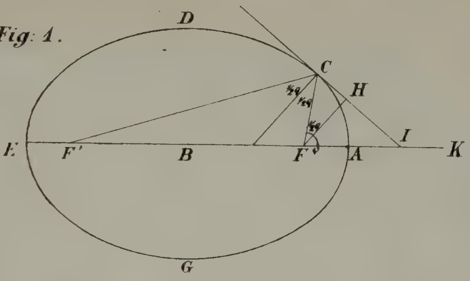


Fig: 2.

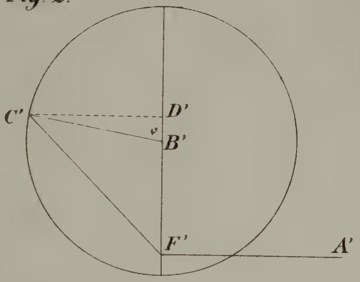


Fig: 3.

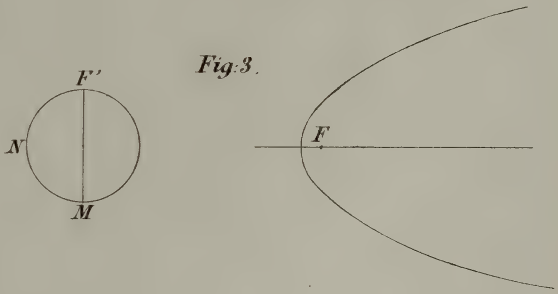
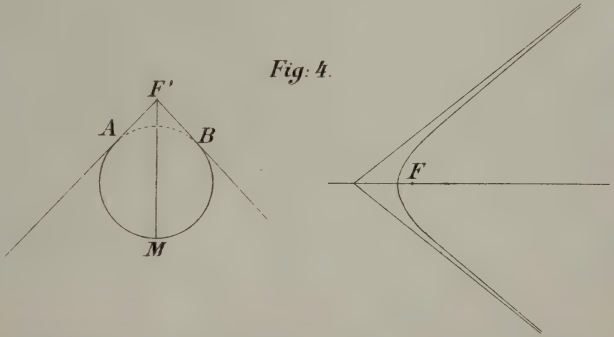


Fig: 4.



straal $FC = r$, en noem den hoek FCF', dien de beide voerstralen met elkander maken q, dan volgt uit driehoek FCF':

$$\cos q = \frac{r^2 + (2a - r)^2 - 4a^2 e^2}{2r(2a - r)};$$

hieruit

$$\cos \tfrac{1}{2} q = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{r(2a - r)}}.$$

En

$$FH = l = r \cos \tfrac{1}{2} q = a\sqrt{1 - e^2}\sqrt{\frac{r}{2a - r}}.$$

Nu is

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v},$$

$$2a - r = \frac{a(1 + 2e\cos v + \varepsilon^2)}{1 + e\cos v},$$

dus is

$$l = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}}.$$

De inhoud der geheele ellips is $= a^2\sqrt{1 - e^2} \times \pi$. Stel den omloopstijd $= T$ sekonden, dan is het perk, in ééne sekonde door den voerstraal doorloopen, $= \frac{a^2\sqrt{1 - e^2} \times \pi}{T} = \frac{1}{2} l s$, als s de lineaire snelheid der aarde in ééne seconde voorstelt. Wij hebben dus

$$s = \frac{2\pi a}{T\sqrt{1 - e^2}}\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}.$$

Noemen wij nu S de snelheid van het licht, A den afstand der ster, λ de hoegrootheid der schijnbare verplaatsing der ster in een vlak evenwijdig aan het vlak der ekliptika, dan is

$$\lambda = \frac{A s}{S} = A \times \frac{2\pi a}{S\,T\sqrt{1 - e^2}}\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}.$$

De richting, waarin deze verplaatsing geschiedt, wordt aan-

geduid door den hoek HJC, dien de raaklijn met de groote as der aardbaan maakte; die hoek is blijkbaar $= v + 90^0 - \frac{1}{2} q$. Makende nu in Fig. 2 $\angle A'F'C'$ hieraan gelijk en $F'C' = \lambda$, dan is C' de plaats, waar de ster zich schijnt te bevinden. De coördinaten van dit punt zijn

$$C'D' = x = -\lambda \sin (v - \tfrac{1}{2} q),$$

$$F'D' = y = \lambda \cos (v - \tfrac{1}{2} q).$$

Uit de zoo even gegevene waarde van $\cos \frac{1}{2} q$ vindt men licht

$$\sin \tfrac{1}{2} q = \frac{e \sin v}{\sqrt{(1 + 2 e \cos v + e^2)}},$$

en verder:

$$\sin (v - \tfrac{1}{2} q) = \frac{\sin v}{\sqrt{(1 + 2 e \cos v + e^2)}},$$

$$\cos (v - \tfrac{1}{2} q) = \frac{\cos v + e}{\sqrt{(1 + 2 e \cos v + e^2)}},$$

Derhalve

$$x = -A \times \frac{2 \pi a}{S\, T \sqrt{1 - e^2}} \cdot \sin v,$$

$$y = A \times \frac{2 \pi a}{S\, T \sqrt{1 - e^2}} \cdot (\cos v + e).$$

Strikt genomen is A niet standvastig, daar de afstand van de vaste ster tot de aarde door de wenteling der aarde om de zon verandert; doch wegens den grooten afstand der vaste sterren is het verschil geheel onmerkbaar; bovendien wordt het geheel opgeheven, wanneer wij alleen de angulaire verplaatsing beschouwen; nemen wij namelijk telkens als éénheid aan eene verplaatsing die zich, uit de aarde bezien, onder eenen hoek van ééne sekonde voordoet, dan moeten wij de gevondene uitdrukkingen door $A \sin 1''$ deelen, en dan verkrijgen wij,

$$\frac{2 \pi a}{S\, T \sin 1'' \sqrt{1 - e^2}} = \alpha$$

stellende, de eenvoudige vergelijkingen

$$x = -\alpha \sin v \qquad = \alpha \cos (v + 90^0),$$

$$y = \quad \alpha \cos v + \alpha e = \alpha \sin (v + 90^0) + \alpha e$$

in welke twee vergelijkingen de boven opgenoemde stellingen liggen opgesloten. In de laatste vergelijking is $\alpha e =$ de lijn $B' F'$ in de figuur, met andere woorden de excentriciteit der cirkelvormige schijnbare baan der ster, die in verhouding tot den straal α dezelfde is als de excentriciteit der aardbaan.

Alle sterren schijnen dus een' dergelijken excentrischen cirkel te doorloopen als in Fig. 2 is afgebeeld; in allen is de as $B' F'$ naar denzelfden kant gericht, namelijk loodrecht op de richting van de groote as der aardbaan.

Hieruit volgt dus, dat de schijnbare baan, die elke ster ten gevolge van de verhouding der lichtsnelheid tot die der aarde beschrijft, is eene ellips, hebbende eene halve groote as $= \alpha =$

$$\frac{2\,\pi\,a}{S\,T \sin 1'' \sqrt{1-e^2}},$$

die gericht is evenwijdig aan de ekliptika, en eene halve kleine as, die gelijk is aan diezelfde grootheid, vermenigvuldigd met de sinus van de breedte der ster.

Om nu te vinden, welke de verplaatsing aan den hemel is, die de ster ten gevolge der aberratie ondergaat, noemen wij

de lengte der ster λ,
de breedte der ster β,
de lengte der zon L,
de lengte van het perigeum der zon Π,

dan is $v = L - \Pi$.

De cirkel, waarin de ster zich schijnt te bewegen, doet zich van de aarde uit gezien, voor als eene ellips, waarvan de groote as langs de breedteparallel gelegen, $= A\,\alpha$, en de kleine as, loodrecht daarop, $= A\,\alpha \sin \beta$ is; de middellijn van dien cirkel, die zich onverkort vertoont en dus met de groote as dezer ellips zamenvalt, staat loodrecht op de lijn, die de aarde met de ster verbindt, en heeft in dien cirkel eene richting van $\lambda - 90^0$ tot $\lambda + 90^0$. Het middelpunt van dien cirkel heeft van de ster

eenen afstand $= A\alpha e$, in eene richting Π–90^0. Geprojecteerd op de bedoelde onverkorte middellijn is dus de abscis van dat middelpunt $+ A\alpha e \cos \Pi - \lambda)$ en de ordinaat $A\alpha e \sin(\Pi - \lambda)$. Uit de aarde gezien, geeft die abscis een lengteverschil van $\alpha e \cos(\Pi - \lambda) \sec \beta$, de ordinaat een breedteverschil van . . . . $\alpha e \sin(\Pi - \lambda) \sin \beta$, uitdrukkingen, die men onder anderen ook, langs eenen langeren, analytischen weg afgeleid, vindt bij DUBOIS in zijne *Cours d'Astronomie*, 2e uitgave (1877) blz. 530. Voor een niet al te lang tijdsverloop kan men deze verplaatsing als onveranderlijk aanzien, doch al heeft de ster geene eigene beweging, dan blijkt toch, dat die verplaatsing afhankelijk is van de richting der groote as en van de excentriciteit der aardbaan, zoowel als van de ligging van het vlak der ekliptika, die allen aan langzame veranderingen onderhevig zijn. De coëfficient αe bedraagt overigens tegenwoordig slechts $20'',445 \times 0,016892 = 0'',343$, en eene verandering dezer grootheid is in de eerste duizendtallen van jaren niet merkbaar, zoodat men zeggen kan, dat deze standvastige term met de middelbare plaats der ster zamensmelt.

Zoo als echter OPPOLZER te recht in zijn „Lehrbuch" opmerkt, mag men deze grootheid bij de berekening der aberratie voor planeten niet verwaarloozen.

Om nu nog de veranderlijke termen der aberratie te kennen, behoeven wij nog slechts de betrekkelijke ligging van de schijnbare plaats der ster C' en het middelpunt van den meergenoemden cirkel B' te beschouwen. De afstand $B'C'$ is standvastig $= A\alpha$, de richting van $B'C'$ is $= \Pi + 90^0 + v = L + 90^0$. De projectie dezer lijn op de boven bedoelde onverkorte middellijn, of anders gezegd op de breedteparallel, is dus $= A\alpha \cos(L - \lambda)$, de ordinaat loodrecht hierop $A\alpha \sin(L - \lambda)$. Eerstgenoemde geeft eene lengteverandering van

$$\alpha \cos(L - \lambda) \sec \beta,$$

laatstgenoemde eene breedteverandering van

$$\alpha \sin(L - \lambda) \sin \beta,$$

zijnde de algemeen bekende uitdrukkingen voor de aberratie in lengte en breedte, die gewoonlijk langs veel langeren omweg gevonden worden.

Wij willen nog nagaan, welke de kring is, die de ster tengevolge der dagelijksche aberratie schijnt te beschrijven. Hier beweegt zich de waarnemer wel met eene eenparige snelheid in eenen cirkel, wiens vlak evenwijdig is aan dat der evennachtslijn, derhalve zal de ster zich tengevolge van de dagelijksche beweging der aarde ook in een' cirkel schijnen te bewegen van kleinere afmetingen dan de voorgaande, wiens vlak insgelijks evenwijdig is aan dat der evennachtslijn, en waarin de ster de plaats der waarneming steeds 90^0 vóór is. Is derhalve de sterretijd t, de rechte klimming der ster a, hare declinatie $= d$, dan is in dit cirkeltje de schijnbare plaats der ster gericht naar $90^0 + t$. Het cirkeltje doet zich weder voor als een ellipsje, waarvan de groote as gericht is langs de parallel, de kleine loodrecht daarop in de richting van den declinatiecirkel; in het cirkeltje is de richting van de onverkorte middellijn, van $a - 90^0$ tot $a + 90^0$. De vermeerdering van rechte opklimming vindt men dus, door dergelijke redeneering als boven is uiteengezet =

$$\alpha' \cos (t - a) \sec d\,,$$

en de vermeerdering van declinatie =

$$\alpha' \sin (t - a) \sin d,$$

in welke formulen α' de constante der dagelijksche aberratie voor de plaats der waarneming is, of wel, als r de voerstraal der aarde voor de waarnemingsplaats en b hare geocentrische breedte voorstelt:

$$\frac{\pi\, r \cos b}{43200\, S \sin 1''},$$

waarvoor echter, binnen $\frac{1}{600}$ nauwkeurig, gesteld mag worden:

$$\frac{\pi\, a \cos \varphi}{43200\, S \sin 1''} = 0'',32 \cos \varphi,$$

waar a de straal der evennachtslijn en φ de geographische breedte voorstelt.

Utrecht, 26 Mei 1876.

NASCHRIFT.

1°. Na de vergadering van 27 Mei, waarin ik den korten inhoud van het bovenstaande mededeelde, maakte ons geacht medelid BÄHR mij op de eigenschap der ellips opmerkzaam, dat al de voeten H der loodlijnen FH, fig. 1, in den cirkelomtrek liggen, die op de groote as AE als middellijn beschreven is. Door deze opmerking wordt het bewijs der stelling, die wij boven bewezen hebben, nog eenvoudiger, want verlengen wij HF tot aan het tweede snijpunt (L) met denzelfden cirkelomtrek, dan is $FL \times FH = FE \times FA =$ constante, dus is FL evenredig aan de snelheid der aarde in het punt C harer baan. Deze lijn FL is steeds loodrecht op de richting der beweging. Al de punten L liggen in den omtrek des cirkels ALE, derhalve zullen ook alle uiteinden van lijnen als $F'C$, in figuur 2, die loodrecht op FL gericht en daaraan evenredig zijn, insgelijks in eenen cirkelomtrek liggen.

Hiermede is de stelling bewezen, maar de juiste afmeting van het door de ster beschreven cirkeltje kan alleen door de boven gegevene redeneering gevonden worden.

2°. In geval de loopbaan der aarde parabolisch in plaats van elliptisch was, zie fig 3, dan blijkt van zelf, hoe de schijnbare baan der ster gewijzigd zou worden. De excentriciteit zou dan $= 1$ zijn, derhalve zou de ster zelve in den omtrek van het aberratiecirkeltje staan De lijn $F'M$, die dit punt met het middelpunt vereenigt, zou loodrecht op de as der parabolische loopbaan der aarde staan. Terwijl de aarde de eerste helft der loopbaan doorloopt, zou de ster schijnen, zich langs den halven cirkel $F'NM$ te bewegen, de middellijn $F'M$ zou weder gelijk zijn aan

$$A \times \frac{s}{S \sin 1''} = A \times \frac{2k}{86400 \sqrt{p}\, S \sin 1''} = \frac{2k \times 497{,}78}{86400 \sqrt{p} \sin 1''}$$

$$= \frac{k \times 497{,}78 \sqrt{2}}{86400 \sin 1'' \sqrt{q}} = \frac{28'',9}{\sqrt{q}}.$$

3°. Ware de loopbaan der aarde eene hyperbola, zie fig 4, dan zou nog altijd de schijnbare baan der ster een cirkel zijn; doch daar dan de excentriciteit van de plaats der ster > 1 zou zijn, zoo zou de ster F' buiten den cirkel staan, $F' A$ en $F' B$ zouden de raaklijnen zijn, uit F' aan den aberratiecirkel getrokken en deze raaklijnen zouden evenwijdig zijn aan de asymptoten der hyperbola. Wanneer de aarde, nog in den eersten tak der hyperbola, zeer ver af zijnde, het perihelium met eene eenparige snelheid naderde, zou de ster nog schijnbaar onbewegelijk in A staan; en tijdens den ganschen loop der aarde langs de hyperbolische baan zou de ster doorloopen den boog $A M B$, behoorende tot den cirkel, waarvan de halve middellijn gelijk is aan

$$\frac{k\sqrt{p}}{86400\, S \sin 1''} = \frac{k\sqrt{p} \times 497{,}78}{86400 \sin 1''} = 20'',442\sqrt{p},$$

zijnde p de parameter der hyperbolische loopbaan. De afstand $F'M$ zou blijkbaar $= \frac{2+e}{2} \times$ deze halve middellijn zijn.

4°. Keeren wij nog eens tot de elliptische beweging der aarde terug, en letten wij op de verplaatsing, die de ster daarbij ondergaat, of wel op den straal van hare schijnbare baan, dan zien wij dat deze *niet* gevonden wordt door de formule

$$\frac{\text{gemiddelde snelheid der aarde}}{\text{snelheid van het licht}},$$

want daar de omtrek eener ellips kleiner is dan die eens cirkels, beschreven op hare groote as, zoo is de gemiddelde snelheid in de ellips ook $< \frac{2\pi a}{T}$, en de straal des aberratiecirkels zou dus verwacht kunnen worden $< \frac{2\pi a}{S\, T \sin 1''}$; maar boven is gevonden $\frac{2\pi a}{S\, T \sin 1'' \sqrt{1-e^2}}$, derhalve grooter, niet alleen dan hetgeen de gemiddelde snelheid geven zou, maar zelfs grooter

dan gevonden zou worden, indien de aarde zich *in den cirkel* bewoog, die de groote as harer loopbaan tot middellijn heeft. De cirkel, waarin de beweging in denzelfden tijd zou moeten plaats hebben, als de omwenteling der aarde geschiedt, om denzelfden aberratiecirkel te geven heeft tot straal $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$ of $\frac{a^2}{b}$, zijnde b de kleine as der elliptische loopbaan der aarde.

Utrecht, 23 Juni 1876.

TWEEDE NASCHRIFT.

Ons geacht medelid VAN DEN BERG heeft mij opmerkzaam gemaakt, dat een dergelijk bewijs, als het zoo even gegevene, ook voorkomt in TH. SIMPSON, *Essays on Curious and Useful subjects in speculative and mixed mathematicks*, London, 1740 *).

Meer uitgebreid heeft FRISIUS er iets over in zijne *Cosmographia* (Milaan 1774—75), Cap. V. *De variationibus ortis e lucis aberratione.* Het 2[de] theorema (Theorema XI), van dit hoofdstuk luidt aldus: *Si spectatoris oculus in sectione aliqua conica moveatur, semita apparens fixae cuiuscumque erit circulus, et centrum apparens motus aut intra, aut extra, aut in ipsa erit peripheria circuli, prout sectio conica erit ellipsis aut hyperbola aut parabola.*

MELANDERHJELM haalt in zijne *Conspectus praelectionum academicarum, continens fundamenta astronomiae*, uitgegeven te Holm, Upsal en Abo, in 1779, deze beide schrijvers aan, maar het schijnt dat na dit tijdstip het bewijs van SIMPSON geheel in het vergeetboek geraakt is.

Daar het door mij gevondene dus niet nieuw meer was, heb

---

*) Dit werk, waarvan hij een exemplaar bezit, komt noch op de Bibliotheek der Leidsche, noch op die der Utrechtsche Universiteit voor.

ik het teruggehouden, maar het is mij gebleken, dat de resultaten over het algemeen of geheel onbekend zijn of althans zeer onvolledig bekend, en daar de werken van SIMPSON, FRISIUS en MELANDERHJELM tegenwoordig zeer zeldzaam zijn, zoo heb ik gemeend, aan een ontvangen verzoek te moeten voldoen, om het medegedeelde nog voor de *Verslagen en Mededeelingen* aan te bieden.

Utrecht, 12 Sept. 1878.

INFLUENCE

OF THE

MOON'S PHASES ON THE TEMPERATURE OF THE AIR AT BATAVIA.

BIJ

P. A. BERGSMA.

When discussing the hourly observations of the temperature of the air made at the Batavia Observatory during the ten years 1866 to 1875, I thought it of some interest to investigate whether any variation, dependent on the moon's phases, might be found in them.

Eight different phases of the moon have been considered in this investigation; they era denoted by the numbers (0), (1), (2), (3), (4), (5), (6) and (7), the numbers (0), (2), (4) and (6) indicating new moon, first quarter, full moon and last quarter: the numbers (1), (3), (5) and (7) indicating the intermediate phases.

The mean temperatures have been calculated for the days of each of these moon's phases, being taken as days of a certain phase not only the days on which this phase fell, but also those days immediately preceding and immediately following them. The mean values obtained in this way for the temperature of the day on the several moon's phases in each of the lustra 1866—1870 and 1871—1875, and in the decade 1866—1875, are given in the columns 2, 3 and 4 of Table I ; the three last vertical columns of this table exhibit for each of these periods the differences of the eight values, obtained for the several moon's

phases, from their mean. The numbers in the last column seem to indicate the existence of a very slight variation of the temperature of the air dependent on the moon's phases, causing the mean daily temperature during one half of the lunation to be slightly higher than during the other half. The range of this variation does not amount to $0^0.1$ C.

The higher temperatures on the days about full moon may be caused by heat radiated by the illuminated side of the moon, facing the earth on these days. If this be really so, the mean temperatures of the hours of the night on the different phases of the moon will show a similar variation, but of greater range. Therefore, the mean temperatures of the hours of the night, 7 p. m. to 5 a. m., on the eight different moon's phases, have been calculated. The result is contained in Table II.

From this table it appears that if the mean temperature on the days of full moon be really a little higher than on other moon's phases, this is not caused by heat radiated from the moon.

Another cause of the higher temperature on the days about full moon may be, that on these days the sky is clearer than on other days, as has sometimes been supposed. If this be really the case, the mean temperatures on the hours of the day will show a variation dependent on the moon's phases, similar to that shown by the mean temperatures of the twentyfour hours, but of greater range. Therefore, the mean temperatures of the hours of the day, 7 a. m. to 5 p. m., on the eight different moon's phases, have been calculated. The result of this calculation is contained in Table III.

From this table it appears that if the mean temperature of the twentyfour hours on the days about full moon be really a little higher than on the days of the other moon's phases, this is caused by the temperature of the day-hours on the days about full moon being higher than on other days, which may be ascribed to the sky being clearer on the days about full moon than on other days. If this be really the case, the mean daily range of the temperature must be greater on the days about full moon than on the other moon's phases. Therefore, the mean daily range of the temperature has been calculated for the eight different

moon's phases. The result of this calculation is given in Table IV.

From this table it appears that the mean daily range of the temperature is higher on the days about full moon than on other moon's phases.

In Table V. the results contained in Tables I. to IV. have been put together. The numbers contained in this table seem to indicate: 1st that the mean temperature of the twentyfour hours, the mean temperature of the hours of the day (7 a. m. to 5 p. m.) and the mean daily range of the temperature are higher on the moon's phases (4) and (5), or on the days about full moon, than on the other moon's phases; 2d that, on the contrary, the mean temperature of the hours of the night (7 p. m. to 5 a. m.) is lower on the moon's phases (4) and (5), or on the days about full moon, than on the other moon's phases; 3d that this variation in the temperature of the air dependent on the moon's phases, which is to be considered as one phenomenon, cannot be a direct effect of heat radiated from the moon's surface towards the earth, but that it is very likely a secondary effect caused by a variation in the clearness of the sky, dependent on the moon's phases.

Being unable to give a complete historical discussion of the question, I refrain from all considerations of this kind, giving only the mere result deduced from the hourly observations of temperature of the air made at Batavia during the decade 1866—1875, a result which, however, wants to be corroborated by another series of ten years observation.

TABLE I. — MEAN TEMPERATURE OF THE TWENTYFOUR HOURS ON EIGHT DIFFERENT MOON'S PHASES.

	Moon's phases.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.
(0)	New moon.	$25^{0}.90$	$25^{0}.69$	$25^{0}.79$	$- 0^{0}.02$	$- 0^{0}.09$	$- 0^{0}.06$
(1)		$25^{0}.87$	$25^{0}.88$	$25^{0}.88$	$- 0^{0}.05$	$+ 0^{0}.10$	$+ 0^{0}.03$
(2)	First quarter.	$25^{0}.96$	$25^{0}.72$	$25^{0}.84$	$+ 0^{0}.04$	$- 0^{0}.06$	$- 0^{0}.01$
(3)		$25^{0}.92$	$25^{0}.84$	$25^{0}.88$	$0^{0}.00$	$+ 0^{0}.06$	$+ 0^{0}.03$
(4)	Full moon.	$25^{0}.96$	$25^{0}.78$	$25^{0}.86$	$+ 0^{0}.04$	$0^{0}.00$	$+ 0^{0}.01$
(5)		$25^{0}.99$	$25^{0}.78$	$25^{0}.89$	$+ 0^{0}.07$	$0^{0}.00$	$+ 0^{0}.04$
(6)	Last quarter.	$25^{0}.89$	$25^{0}.78$	$25^{0}.83$	$- 0^{0}.03$	$0^{0}.00$	$- 0^{0}.02$
(7)		$25^{0}.89$	$25^{0}.77$	$25^{0}.82$	$- 0^{0}.03$	$- 0^{0}.01$	$- 0^{0}.03$
Means of the eight values for the different moon's phases.		$55^{0}.92$	$25.^{0}78$	$25^{0}.85$			

TABLE II. — Mean temperature of the hours of the night (7 p. m. to 5 a. m.) on eight different moon's phases.

	Moon's phases.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.
(0)	New moon.	24°.53	24°.33	24°.43	+ 0°.04	— 0°.07	— 0°.02
(1)		24°.48	24°.52	24°.50	— 0°.01	+ 0°.12	+ 0°.05
(2)	First quarter	24°.50	24°.33	24°.42	+ 0°.01	— 0°.07	— 0°.03
(3)		24°.53	24°.49	24°.51	+ 0°.04	+ 0°.09	+ 0°.06
(4)	Full moon.	24°.46	24°.37	24°.41	— 0°.03	— 0°.03	— 0°.04
(5)		24°.47	24°.38	24°.43	— 0°.02	— 0°.02	— 0°.02
(6)	Last quarter.	24°.50	24°.40	24°.45	+ 0°.01	0°.00	0°.00
(7)		24°.45	24°.41	24°.43	— 0°.04	+ 0°.01	— 0°.02
Means of the eight values for the different moon's phases.		24°.49	24°.40	24°.45			

TABLE III. — MEAN TEMPERATURE OF THE HOURS OF THE DAY (7 A. M. TO 5 P. M.) ON EIGHT DIFFERENT MOON'S PHASES.

	Moon's phases.	1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.	4866—1870.	1871—1875.	1866—1875.
(0)	New moon.	27°.44	27°.22	27°.33	— 0°.07	— 0°.10	— 0°.09
(1)		27°.40	27°.40	27°.40	— 0°.11	+ 0°.08	— 0°.02
(2)	First quarter.	27°.56	27°.28	27°.42	+ 0°.05	— 0°.04	0°.00
(3)		27°.47	27°.36	27°.41	— 0°.04	+ 0°.04	— 0°.01
(4)	Full moon.	27°.62	27°.38	27°.50	+ 0°.11	+ 0°.06	+ 0°.08
(5)		27°.67	27°.36	27°.51	+ 0°.16	+ 0°.04	+ 0°.09
(6)	Last quarter.	27°.43	27°.29	27°.36	— 0°.08	— 0°.03	— 0°.06
(7)		27°.49	27°.29	27°.39	— 0°.02	— 0°.03	— 0°.03
Means of the eight values for the different moon's phases.		27°.51	27°.32	27°.42			

TABLE IV. — MEAN DAILY RANGE OF THE TEMPERATURE ON EIGHT DIFFERENT MOON'S PHASES.

Moon's phases		1866—1870.	1871—1875.	1866—1875.	1866—1870.	1871—1275.	1866—1875.
(0)	New moon.	$6^{0}.47$	$6^{0}.48$	$6^{0}.47$	$-\ 0^{0}.08$	$0^{0}.00$	$-\ 0^{0}.04$
(1)		$6^{0}.40$	$6^{0}.47$	$6^{0}.43$	$-\ 0^{0}.15$	$-\ 0^{0}.01$	$-\ 0^{0}.08$
(2)	First quarter.	$6^{0}.57$	$6^{0}.46$	$6^{0}.52$	$+\ 0^{0}.02$	$-\ 0^{0}.02$	$+\ 0^{0}.01$
(3)		$6^{0}.46$	$6^{0}.49$	$6^{0}.48$	$-\ 0^{0}.09$	$+\ 0^{0}.01$	$-\ 0^{0}.03$
(4)	Full moon.	$6^{0}.70$	$6^{0}.58$	$6^{0}.64$	$+\ 0^{0}.15$	$+\ 0^{0}.10$	$+\ 0^{0}.13$
(5)		$6^{0}.77$	$6^{0}.50$	$6^{0}.63$	$+\ 0^{0}.22$	$+\ 0^{0}.02$	$+\ 0^{0}.12$
(6)	Last quarter.	$6^{0}.42$	$6^{0}.43$	$6^{0}.43$	$-\ 0^{0}.13$	$-\ 0^{0}.05$	$-\ 0^{0}.08$
(7)		$6^{0}.59$	$6^{0}.40$	$6^{0}.49$	$+\ 0^{0}.04$	$-\ 0^{0}.08$	$-\ 0^{0}.02$
Means of the eight values for the different moon's phases.		$6^{0}.55$	$6^{0}.48$	$6^{0}.51$			

TABLE V. — VARIATION OF THE TEMPERATURE OF THE AIR DEPENDENT ON THE MOON'S PHASES.

	Moon's phases	Mean temperature of the twentyfour hours.	Mean temperature of the hours of the night. (7 p. m. to 5 a. m.)	Mean temperature of the hours of the day. (7 a. m to 5 p m)	Mean daily range of the temperature.
(0)	New moon.	— 0°.06	— 0°.02	— 0°.09	— 0°.04
(1)		+ 0°.03	+ 0°.05	— 0°.02	— 0°.08
(2)	First quarter.	— 0°.01	— 0°.03	0°.00	+ 0°.01
(3)		+ 0°.03	+ 0°.06	— 0°.01	— 0°.03
(4)	Full moon.	+ 0°.01	— 0°.04	+ 0°.08	+ 0°.13
(5)		+ 0°.04	— 0°.02	+ 0°.09	+ 0°.12
(6)	Last quarter.	— 0°.02	0°.00	— 0°.06	— 0°.08
(7)		— 0°.03	— 0°.02	— 0°.03	— 0°.02

Batavia, 9 Julij 1878.

INHOUD

VAN

DEEL XIII. — STUK 3.

bladz.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

GEDRUKT BIJ DE BOEVER - KRÖBER - BAKELS.